Lista de problemas 4

Mayo 2020

1. Álgebra

A1. Pruebe que:

$$\frac{(a-b)^2}{2(a+b)} \leq \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}} - \sqrt{ab} \leq \frac{(a-b)^2}{\sqrt{2}(a+b)}$$

A2. Pruebe que el circulo de ecuacion $x^2 + y^2 = 1$ contiene infinitos puntos de coordenadas racionales tales que la distancia entre cualesquiera dos de ellos sea irracional.

A3. Encuentre todas las funciones $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ that satisfy:

$$x^2(f(x) + f(y)) = (x+y)(f(yf(x)))$$

A4. Sean $a_1, a_2, ..., a_n, r$ y D enteros positivos tales que: $\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + ... + \frac{1}{a_n} = r$ y $a_1 a_2 \cdots a_n = D > 1$. Pruebe que el polinomio

$$Q(x) = D(x+1)^r - (x+a_1)(x+a_2)...(x+a_n)$$

no tiene soluciones positivas.

2. Combinatoria

C1. Hay n pueblos en una línea, un día, todos los n pueblos mandan un camión en cada dirección, un total de $2n$ camiones, todos de distintos tamaños y a la misma velocidad, estos camiones se mueven solamente en esa dirección, una vez que se encuentran con otro camión, si el segundo camión se está moviendo en la dirección opuesta, el más grande destruye al más pequeño, pero si el segundo camión va en la misma dirección, el primero destruye al segundo sin importar el tamaño pues lo agarra por detrás.
Demuestre que sin importar los tamaños de los camiones, podemos decir con toda seguridad que existe un pueblo que ninguno de sus dos camiones fue destruido.

C2. Considere 2009 cartas, cada una con un lado dorado y el otro negro, que están en línea sobre una mesa larga. Inicialmente, todas las cartas muestran su lado dorado. Dos jugadores, del mismo lado largo de la mesa, juegan alternándose movimientos. Cada jugada consiste en elegir un conjunto de 50 cartas consecutivas, tal que la primera carta de izquierda a derecha está mostrando su cara dorada, y el jugador le da vuelta a esas 50 cartas, es decir, las que mostraban su cada dorada ahora muestran la negra y vice versa. El último jugador que puede hacer una jugada legal gana el juego.

(a) ¿El juego necesariamente acaba?

(b) ¿Existe una estrategia ganadora para el jugador que empieza el juego?

C3. Vulcano y Neptuno juegan un juego por turnos en una cuadrícula infinita. Antes de iniciar el juego, Neptuno elige una cantidad finita de celdas para inundar. Vulcano está construyendo un *dique*, que es un subconjunto de aristas de la cuadrícula (las llamamos paredes) formando un camino conectado, que no se interseca a sí mismo.
Entonces el juego inicia con Vulcano moviendo primero. Para cada uno de los turnos de Vulcano, puede agregar hasta 3 nuevas paredes al *dique* (manteniendo las condiciones de ser un camino unido que no se interseca). En cada turno de Neptuno, cada celda adyacente a una celda inundada sin una pared entre estas dos celdas, se vuelve inundada también. Demuestre que Vulcano siempre puede, para cualquier conjunto de casillas inundadas con las que Neptuno decidio iniciar, en una cantidad finita de turnos, construir un *dique* hasta que se vuelve un camino cerrado de forma que todas las celdas inundadas están contenidas en el interior del dique, así salvando el mundo de ser inundado.

C4. Se tiene un tablero de 100×100. En cada casilla, hay una ficha que apunta hacia arriba, abajo, a la derecha o a la izquierda. En toda la orilla del tablero hay una pared excepto por el lado derecho de la esquina superior derecha. Se va a colocar un insecto en una de las casillas. Al encontrarse en una casilla, el insecto se va a mover a la casilla vecina en la dirección de la flecha sobre la que está. Después de hacer esto, la flecha sobre la que estaba rota $90°$ en el sentido de las manecillas del reloj. Si el movimiento que se le indica no se puede hacer, el insecto se queda en su lugar pero la flecha sí se mueve (gira). ¿Es posible que el insecto nunca salga del tablero?

3. Geometría

G1. Dado un trapezoide $ABCD$ con $\overline{AB} \parallel \overline{CD}$, asuma que existen puntos E sobre la recta $\overleftrightarrow{BC}$ y fuera del segmento $\overline{BC}$, y F dentro del segmento $\overline{AD}$ tales que $\measuredangle DAE = \measuredangle CBF$. Denotamos por I el punto de intersección de $\overleftrightarrow{CD}$ y $\overleftrightarrow{EF}$, y por J el punto de intersección de $\overleftrightarrow{AB}$ y $\overleftrightarrow{EF}$. Sea K el punto medio del segmento $\overline{EF}$, asuma que no cae sobre la línea $\overleftrightarrow{AB}$. Pruebe que I se encuentra en en circuncírculo de $\triangle ABK$ si y sólo si K está en el circuncírculo de $\triangle CDJ$.

G2. Sea $\triangle ABC$ un triángulo acutángulo inscrito en un círculo de centro O. Si las alturas $\overline{BD}, \overline{CE}$ se intersecan en H y el circuncentro de $\triangle BHC$ es O_1, pruebe que AHO_1O es un paralelogramo.

G3. Sea $\triangle ABC$ un triángulo acuntángulo con $AC > AB$ y O su circuncentro. Sea D un punto sobre $\overline{BC}$ tal que O está dentro del triángulo $\triangle ADC$ y $\measuredangle DAO + \measuredangle ADB = \measuredangle ADC$. Sean P y Q los circuncentros de los triángulos $\triangle ABD$ y $\triangle ACD$ respectivamente, y sea M la intersección de las líneas $\overleftrightarrow{BP}$ y $\overleftrightarrow{CQ}$. Demuestre que $\overleftrightarrow{AM}$, $\overleftrightarrow{PQ}$ y $\overleftrightarrow{BC}$ son concurrentes.

G4. Los puntos K y M están sobre los lados $\overline{AB}$ y $\overline{CD}$, respectivamente, de un cuadrilátero convexo $ABCD$. Sea L el punto de intersección de los segmentos $\overline{AM}$ y $\overline{KD}$, y sea N el punto de intersección de los segmentos $\overline{KC}$ y $\overline{BM}$.

(a) Probar que si K y M son los puntos medios de $\overline{AB}$ y $\overline{CD}$, entonces:

$$(KLMN) < \frac{1}{3}(ABCD)$$

(b) Probar que si $\dfrac{AK}{KB} = \dfrac{CM}{MD} = \dfrac{m}{n}$, entonces:

$$(KLMN) < \frac{mn}{m^2 + mn + n^2}(ABCD)$$

4. Teoría de números

N1. La sucesión de Fibonacci $(f_1, f_2, f_3, \ldots)$ está definida por $f_1 = 1, f_2 = 1$ y, para $n \geq 2, f_{n+1} = f_n + f_{n-1}$. ¿Cuánto vale $f_{n+1}^2 - f_n f_{n+2}$?. Demuestre que $5f_n^2 + 4(-1)^n$ es un cuadrado perfecto.

N2. Sea $p > 3$ un número primo. Considere la fracción:

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{p-1} = \frac{m}{n},$$

con $(m, n) = 1$.

1. Demuestre que p divide a m.
2. Demuestre que p^2 divide a m.

N3. Denotamos por $d(m)$ el número de divisores positivos de un entero positivo m, y por $w(m)$ el número de primos distintos que dividen a m. Sea k un entero positivo. Demuestra que hay una infinidad de enteros positivos n tales que $w(n) = k$ y $d(n)$ no divide a $d(a^2 + b^2)$ para todos a y b enteros positivos tales que $a + b = n$.

N4. Considere el conjunto

$$A = \left\{1 + \frac{1}{k} : k = 1, 2, 3, 4, \cdots\right\}$$

(a) Pruebe que todo entero $x \geq 2$ puede ser escrito como el producto de uno o más elementos de A, que no son necesariamente distintos.

(b) Para cada entero $x \geq 2$ sea $f(x)$ el menor entero tal que x puede ser escrito como el producto de $f(x)$ elementos de A, que no son necesariamente distintos.
Pruebe que existen infinitos pares de enteros (x, y) con $x \geq 2$, $y \geq 2$, tales que:

$$f(xy) < f(x) + f(y)$$

(Los pares (x_1, y_1) y (x_2, y_2) son diferentes si $x_1 \neq x_2$ o $y_1 \neq y_2$).