Problemas clásicos

Daniel Campos Salas

(Material en construcción)

Problema 1 (Problema de las monedas)**.** *Dados dos enteros positivos coprimos a y b, determine el mayor entero positivo que no se puede escribir de la forma $am + bn$ con m y n enteros no negativos.*

Problema 2. *Dado una terna de números reales (a, b, c), esta se transforma en una nueva terna $(-a + b + c, a - b + c, a + b - c)$. Si todos los elementos son positivos, entonces se repite el proceso; en caso contrario se detiene. Determine todas las ternas de reales positivos (a, b, c) para los cuales el proceso nunca se detiene.*

Problema 3. *Sea $ABCD$ un cuadrado y P un punto interior tal que $\angle PCD = \angle PDC = 15^\circ$. Demuestre que el triángulo ABP es equilátero.*

Problema 4. *Sea ABC un triángulo isósceles con $AB = AC$. Sea D el punto medio de BC y E el pie de la perpendicular desde D a AB. Si M es el punto medio de DE, demuestre que AM es perpendicular a CE.*

Problema 5 (Wolstenholme)**.** *Sea $p > 3$ un número primo. Demuestre que si*

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{p-1} = \frac{m}{n},$$

con $(m, n) = 1$, entonces p^2 divide a m.

Problema 6. *Demuestre que si ab divide a $a^2 + b^2 + 1$, entonces $a^2 + b^2 + 1 = 3ab$.*

Problema 7 (Teorema de la mariposa)**.**

Problema 8. *Sea $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ una permutación del conjunto $\{1, 2, \ldots, n\}$. Determine el menor y mayor valor posible de la suma $x_1x_2 + x_2x_3 + \ldots + x_nx_1$.*

Problema 9 (Sucesiones de Farey)**.** *Sea n un entero positivo. Considere el conjunto de fracciones simplificadas a/b con $1 \leq b \leq n$ y $0 \leq a \leq b$. Suponga que este conjunto se ordena de manera creciente. Demuestre que si $a/b < c/d$ son dos fracciones consecutivas, entonces $bc - ad = 1$.*

Problema 10. *Considere dos círculos tangentes exteriormente entre sí y tangentes a una recta común. Si sus radios son r_1 y r_2, determine la distancia entre los puntos de tangencia con la recta.*

Problema 11. *Considere tres círculos tangentes exteriormente entre sí y tangentes a una recta común. Si los radios de los círculos externos son r_1 y r_2, entonces determine el radio del círculo interno en función de r_1 y r_2.*

Problema 12. *Encuentre una función $f(n)$ tal que el n-ésimo término de la sucesión*

$$1,\ 2,\ 2,\ 3,\ 3,\ 3,\ 4,\ 4,\ 4,\ 4, \ldots$$

sea igual a $\lfloor f(n) \rfloor$.

Problema 13. *¿Cuántas veces entre medianoche y mediodía sería imposible decir la hora en un reloj cuyas manecillas para los minutos y las horas son idénticas?*

Problema 14. *Sea n un entero positivo. Demuestre que todos los coeficientes binomiales $\binom{n}{k}$, con $k = 0, 1, \ldots, n$, son impares si y sólo si $n+1$ es una potencia de 2.*

Problema 15 (Goldbach)**.** *Demuestre que no existe un polinomio $P(x)$ con coeficientes enteros tal que $P(n)$ sea primo para todo entero positivo n.*

Problema 16. *Sea m un entero positivo fijo y sean $z_1, \ldots, z_k$ números complejos tales que*

$$z_1^n + \ldots + z_k^n = 0,$$

para $m \leq n \leq m+k-1$. Demuestre que $z_1 = \ldots = z_k = 0$.

Problema 17. *Sea k un entero positivo. Demuestre que los polinomios*

$$P_k(x) = \frac{1}{k!} \prod_{j=0}^{k-1} (x-j)$$

satisfacen que $P_k(n)$ es entero para todo entero n. Demuestre que si $P(x)$ un polinomio de grado d tal que $P(n)$ es entero para todo entero n, entonces existen enteros $c_0, c_1, \ldots, c_d$ tal que

$$P(x) = c_0 + c_1 P_1(x) + \ldots + c_d P_d(x).$$

Problema 18 (Beatty)**.** *Si α y β son irracionales positivos tales que $1/\alpha + 1/\beta = 1$, entonces todo entero positivo pertenece exactamente a una de las sucesiones $\{\lfloor n\alpha \rfloor\}$ y $\{\lfloor n\beta \rfloor\}$. Conversamente, si todo entero positivo pertenece exactamente a una de las sucesiones $\{\lfloor n\alpha \rfloor\}$ y $\{\lfloor n\beta \rfloor\}$, entonces α y β son irracionales positivos tales que $1/\alpha + 1/\beta = 1$.*

References

[1] , ,