Problemas

German José Mora Sáenz

10 de Mayo del 2020

1. **(SL 1995, G3).** En el triángulo $\triangle ABC$ el íncirculo de este toca a los lados BC, CA y AB en los puntos D, E y F respectivamente. X en BC tal que el incírculo de $\triangle XBC$ toca a BC en D, y a CX y XB en Y y Z respectivamente. Pruebe que $EFZY$ es un cuadrilátero cíclico.
2. **Teorema de Monge.** Si C_1, C_2 y C_3 son círculos disjuntos, no concgruentes, y A, B y C son los puntos de intersección de las tangentes externas, entonces A, B y C son colineales.
3. **(SL 2000, G3).** Sea O el circucentro de y H el ortocentro del triángulo acutángulo $\triangle ABC$. Demuestren que existen puntos D, E y F en los lados BC, CA y AB respectivamente tal que $OD + DH = OE + EH = OF + FH$ y las rectas AD, BE y CF son concurrentes.
4. Sea $\triangle ABC$ un triángulo acuntángulo con $AC > AB$ y O su circuncentro. Sea D un punto sobre $\overline{BC}$ tal que O está dentro del triángulo $\triangle ADC$ y $\measuredangle DAO + \measuredangle ADB = \measuredangle ADC$. Sean P y Q los circuncentros de los triángulos $\triangle ABD$ y $\triangle ACD$ respectivamente, y sea M la intersección de las líneas $\overleftrightarrow{BP}$ y $\overleftrightarrow{CQ}$. Demuestre que $\overleftrightarrow{AM}$, $\overleftrightarrow{PQ}$ y $\overleftrightarrow{BC}$ son concurrentes.
5. **(USAMO 2003, P4).** Sea $\triangle ABC$ un triángulo. Una circunferencia que pasa por A y B corta corta a los segmentos AC y BC en D y E respectivamente. Las rectas AB y DE se intersecan en F, y las rectas BD y CF se intersecan en M. Pruebe que $MF = MC$ si y solo si $MB \cdot MD = MC^2$.

Soluciones

1. **(SL 1995, G3).** En el triángulo $\triangle ABC$ el íncirculo de este toca a los lados BC, CA y AB en los puntos D, E y F respectivamente. X en BC tal que el incírculo de $\triangle XBC$ toca a BC en D, y a CX y XB en Y y Z respectivamente. Pruebe que $EFZY$ es un cuadrilátero cíclico.

   Solución. Considere $T = EF \cap BC$ aplicando Ceva y Menelao en $\triangle ABC$ con los puntos E, F, D y la recta EF, tenemos que $\frac{TB}{TC} = \frac{BD}{DC}$, y sustituyendo esto en Ceva aplicado al triángulo $\triangle XBC$ con los puntos Y, Z, D que $\frac{XY}{YB} \cdot \frac{BT}{TC} \cdot \frac{CZ}{ZX} = -1$ y por Menelao tenemos que $T - Y - Z$, entonces por potencia punto en ambas circunferencias $TE \cdot TF = TD^2 = TY \cdot TZ$, por lo que $EFZY$ es un cuadrilátero cíclico.

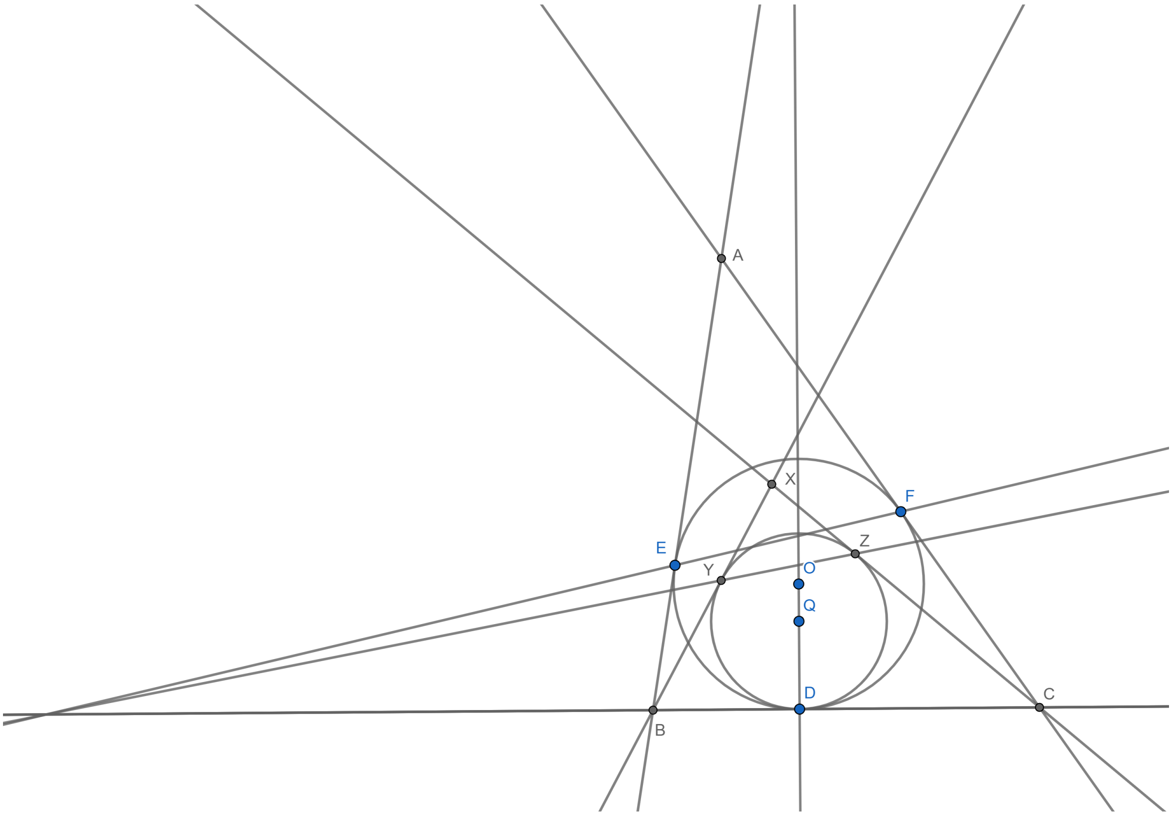

Figura 1: Problema 1

2. **Teorema de Monge.** Si C_1, C_2 y C_3 son círculos disjuntos, no concgruentes, y A, B y C son los puntos de intersección de las tangentes externas, entonces A, B y C son colineales.

   Solución. Sean O_1, O_2, O_3 los centros de las circunnferencias C_1, C_2, C_3 respectivamente. Si O_1, O_2, O_3 son colineales, entonces A, B, C están en la recta que pasa por los centros, y listo. Suponga que O_1, O_2, O_3 no son colineales.

   Si l_{12} es una de las rectas tangentes a C_1 y C_2, similarmente se define l_{23}, y l_{13}. Sean $X = l_{12} \bigcap l_{13}$, $Y = l_{12} \bigcap l_{23}$, y $Z = l_{23} \bigcap l_{13}$.

   Ya que C_1 es tangente a l_{12} y l_{13}, entonces O_1 está en la bisectriz del $\angle YXZ$, similarmente O_2 está en la bisectriz del $\angle XYZ$, y O_3 es la bisectriz del $\angle YZX$, entonces XO_1, YO_2, y ZO_3 concurren, entonces XYZ y $O_1O_2O_3$ están en perspectiva con respecto a un punto, y por Desargues están en perspectiva con respeccto a una recta, por lo tanto A,B y C son colineales.

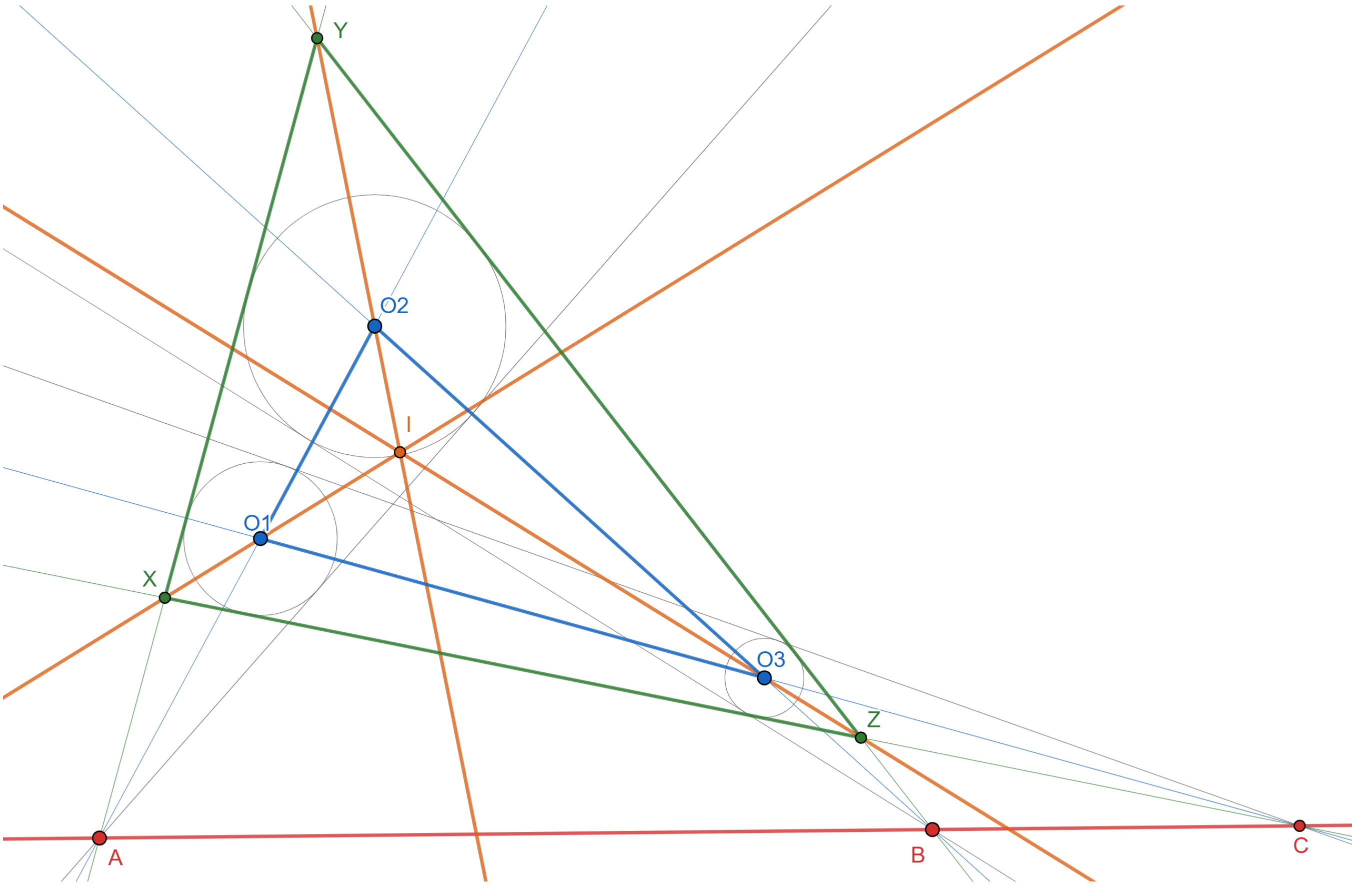

Figura 2: Problema 2

3. **(SL 2000, G3).** Sea O el circucentro de y H el ortocentro del triángulo acutángulo $\triangle ABC$. Demuestren que existen puntos D, E y F en los lados BC, CA y AB respectivamente tal que $OD + DH = OE + EH = OF + FH$ y las rectas AD, BE y CF son concurrentes.

Solución. Considere A' la reflexión de H con respecto a la recta BC, analogamente se definen B' y C'. Es conocido que A', B' y C' están en el circuncírculo del $\triangle ABC$ (Pruébelo!). Además

$$\angle ODD' = 90 - \angle OA'A = 90 - \angle OAA' = 90 - (90 - C - (90 - B)) = 90 + C - B$$

$$\angle OD'D = 180 - B - \angle OAB = 180 - B - (90 - C) = 90 + C - B$$

Así $\angle ODD' = \angle OD'D$, así el $\triangle ODD'$ es isósceles, y el punto medio de DD' es el punto medio de BC, de donde $BD = CD'$ $CD = BD'$. Analogamente $CE = AE'$, $AE = AE'$, $AF = BF'$ y $BF = AF'$, de donde por teorema de Ceva $\frac{AF}{FB} \cdot \frac{BD}{DC} \cdot \frac{CE}{EA} = \frac{BF'}{F'A} \cdot \frac{CD'}{D'B} \cdot \frac{AE'}{E'C} = 1$, por lo que AD, BE y CF concurren.

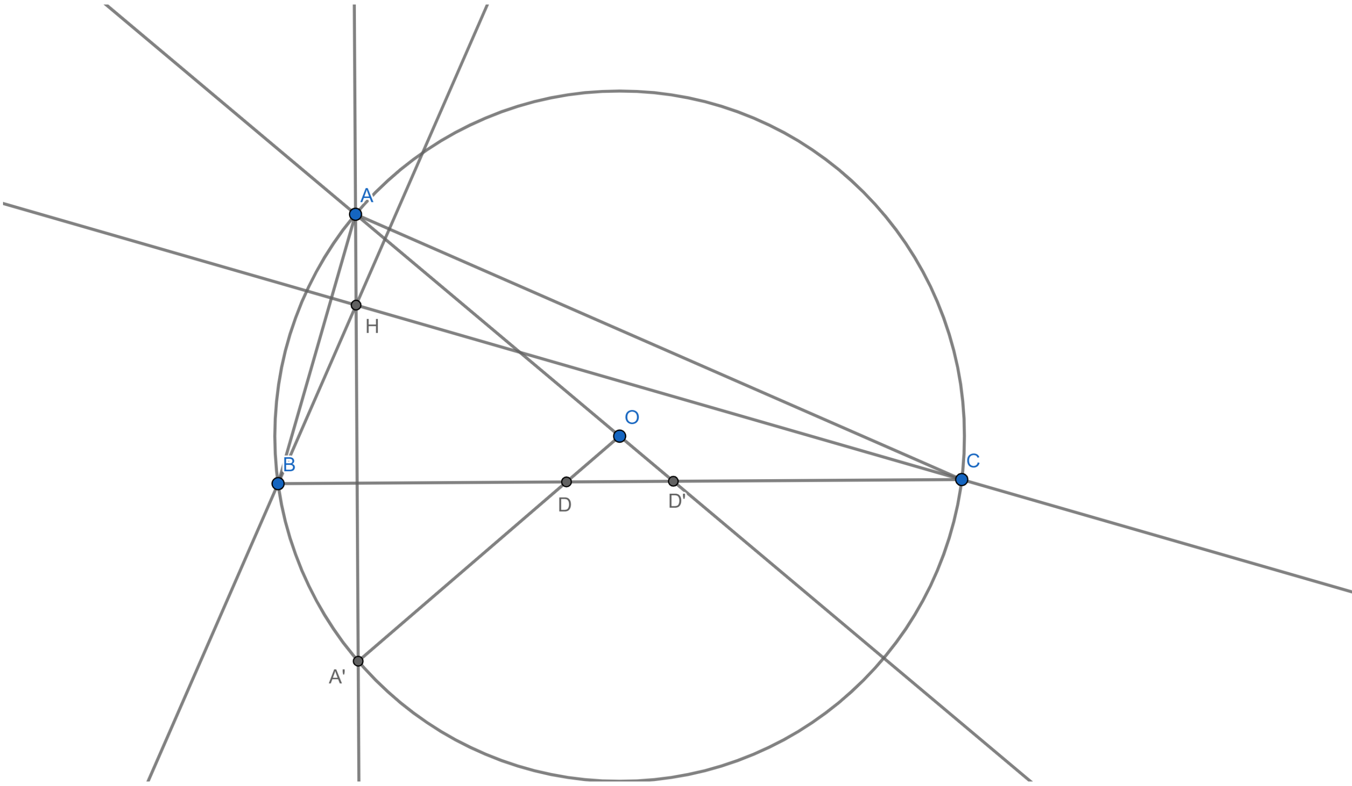

Figura 3: Problema 3

4. Sea $\triangle ABC$ un triángulo acuntángulo con $AC > AB$ y O su circuncentro. Sea D un punto sobre $\overline{BC}$ tal que O está dentro del triángulo $\triangle ADC$ y $\measuredangle DAO + \measuredangle ADB = \measuredangle ADC$. Sean P y Q los circuncentros de los triángulos $\triangle ABD$ y $\triangle ACD$ respectivamente, y sea M la intersección de las líneas $\overleftrightarrow{BP}$ y $\overleftrightarrow{CQ}$. Demuestre que $\overleftrightarrow{AM}$, $\overleftrightarrow{PQ}$ y $\overleftrightarrow{BC}$ son concurrentes.

   Solución. Primero note que M está en el circuncírcirculo del $\triangle ABC$ (Pruébelo!). Luego defina $X = AM \cap BC$. Basta demostrar que $\triangle XAD$ es isósceles. Vamos a demostrar que $\angle DAM = \angle ADC$. Note que $AMCB$ es cíclico, entonces $\angle DAM = 180 - \angle BAD - \angle MCB$.

   También $\angle BAD = 90 \angle ACB - \angle DAO$, entonces $\angle DAM = 90 + \angle ACB + \angle DAO - \angle MCB = 90 + \angle ACB + \angle DAO - \angle ACB - -\angle ACM = 90 + \angle DAO - \angle ABM$.

   Ahora $\angle ABM = 90 - \angle ADB = 90 - \angle ADC + \angle DAO$, entonces $\angle DAM = 90 + \angle DAO - 90 + angle ADC - \angle DAO = \angle ADC$.

   Por lo tanto $\triangle XAD$, $\triangle XEB$ y $\triangle XFC$ son isósceles, por lo que la bisectriz de los triángulos pasa por P y Q, de donde AM, BC y PQ concurren.

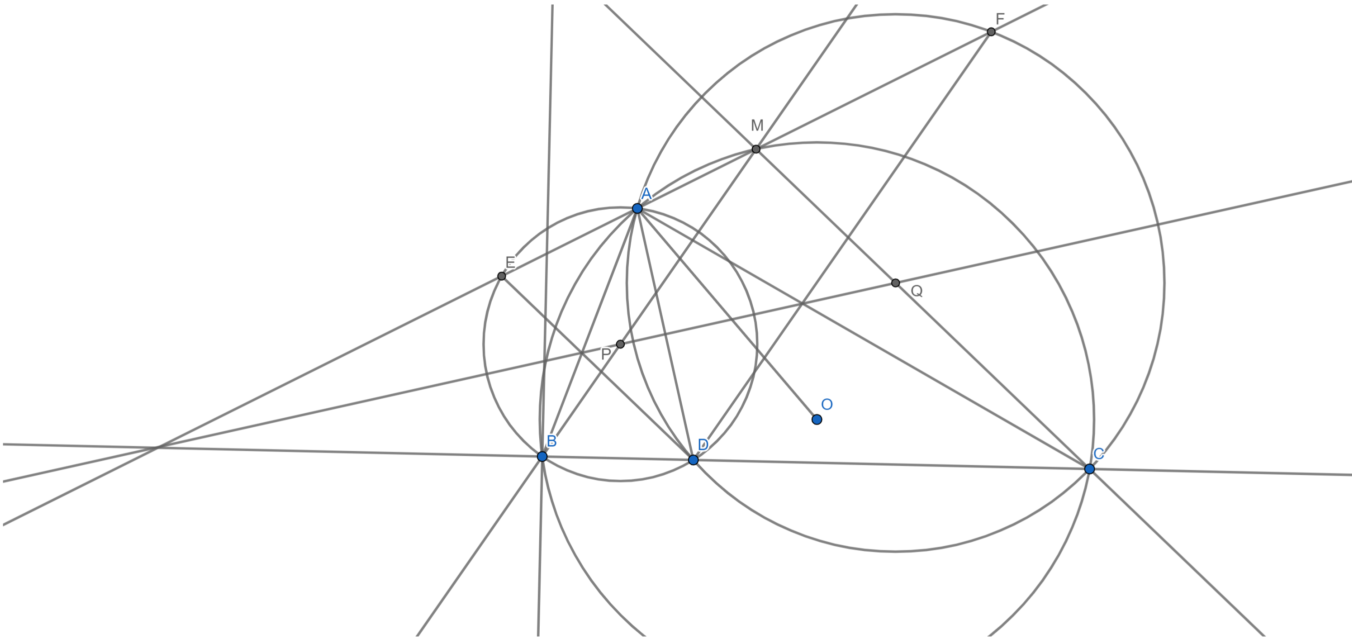

Figura 4: Problema 4

5. **(USAMO 2003, P4).** Sea $\triangle ABC$ un triángulo. Una circunferencia que pasa por A y B corta corta a los segmentos AC y BC en D y E respectivamente. Las rectas AB y DE se intersecan en F, y las rectas BD y CF se intersecan en M. Pruebe que $MF = MC$ si y solo si $MB \cdot MD = MC^2$.

   Solución. Aplicando Ceva tenemos que $\frac{CM}{MF} \cdot \frac{FA}{AB} = \frac{CE}{EB}$. De donde $CM = MF$ si y solo si $AE//FC$ si y solo si $\angle MCD = \angle DAE = \angle MBC$ si y solo si $\triangle CMD$ $\triangle BMC$ y como comparten el ángulo M esto sucede si y solo si $\frac{CM}{MD} = \frac{MB}{CM}$, si y solo si $MB \cdot MD = MC^2$.

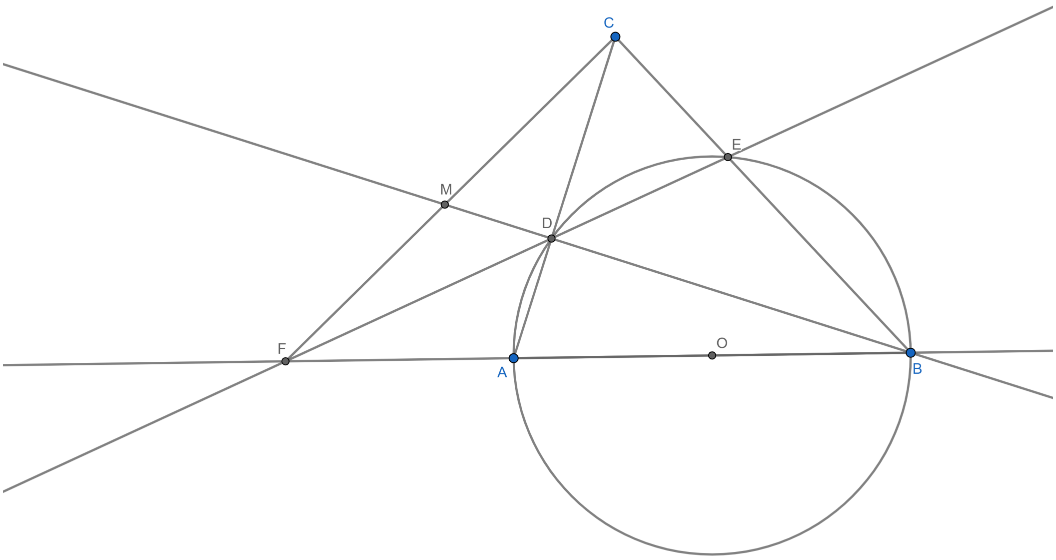

Figura 5: Problema 5