Trigonometría

Daniel Campos Salas

(Material en construcción)

Contents

1 Definiciones **1**

2 Fórmulas de suma **1**
2.1 Problemas 2

3 Fórmulas de suma-a-producto **3**
3.1 Identidades con ángulos de un triángulo 3
3.2 Problemas 4

4 Ley de cosenos **5**
4.1 Aplicación: Teorema de Descartes 5
4.2 Problemas 7

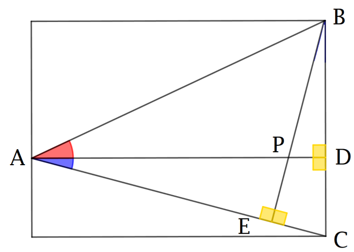
5 Ley de senos **7**
5.1 Problemas 8

6 Teorema trigonométrico de Ceva **8**
6.1 Motivación: Teorema de Morley 8
6.2 Una ecuación trigonométrica 10
6.2.1 Problemas 10
6.3 Teorema de Ceva 11
6.3.1 Problemas 11

1 Definiciones

2 Fórmulas de suma

Ejercicio 2.1. *Considere dos rectángulos, como en la figura, con $\angle DAB = \alpha$ y $\angle DAC = \beta$. Sea E el pie de la perpendicular desde B a AC y suponga que $AD = 1$.*



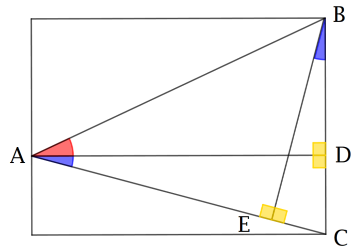
1. *Demuestre que $\angle CBE = \beta$.*

2. *Calcule las distancias AB, AC, AE, AP, BC, BD, BE, BP, CD, CE, DP, en términos de $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\sin\alpha$, $\sin\beta$. (No los determine en términos de $\cos(\alpha+\beta)$ o $\sin(\alpha+\beta)$.)*

Teorema 2.1 (Fórmulas de suma)**.** *Para todo α y β se cumplen las identidades*

$$\sin(\alpha\pm\beta)=\sin\alpha\cos\beta\pm\sin\beta\cos\alpha,\qquad \cos(\alpha\pm\beta)=\cos\alpha\cos\beta\mp\sin\alpha\sin\beta.$$

Prueba. Vamos a demostrar las fórmulas para $\sin(\alpha+\beta)$ y $\cos(\alpha+\beta)$. Consideramos dos rectángulos, como en la figura, con $\angle DAB=\alpha$ y $\angle DAC=\beta$, y usamos que $\angle CBE=\beta$ por el ejercicio anterior.



Podemos suponer sin pérdida de generalidad que $AD=1$. Con esto se tiene

$$\begin{aligned}\sin(\alpha+\beta)=\frac{BE}{AB}=\frac{BC\cos\beta}{AB}&=\frac{(\tan\alpha+\tan\beta)\cos\beta}{\sec\alpha}\\&=\cos\alpha\cos\beta(\tan\alpha+\tan\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\sin\beta\cos\alpha,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\cos(\alpha+\beta)=\frac{AE}{AB}=\frac{AC-EC}{AB}&=\frac{\sec\beta-\sin\beta(\tan\alpha+\tan\beta)}{\sec\alpha}\\&=\cos\alpha(\sec\beta(1-\sin^2\beta)-\sin\beta\tan\alpha)\\&=\cos\alpha(\cos\beta-\sin\beta\tan\alpha)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta.\end{aligned}$$

□

2.1 Problemas

Ejercicio 2.2. *Calcule $\cos 15^\circ$ y $\sin 15^\circ$.*

Ejercicio 2.3 (Fórmulas del ángulo doble)**.** *Use las fórmulas de suma para demostrar que*

$$\sin(2\alpha)=2\sin\alpha\cos\alpha,\qquad \cos(2\alpha)=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha=2\cos^2\alpha-1=1-2\sin^2\alpha.$$

Ejercicio 2.4 (Fórmulas del ángulo triple)**.** *Use las fórmulas de suma para escribir $\cos(3\alpha)$ y $\sin(3\alpha)$. Demuestre que $\cos(3\alpha)$ y $\sin(3\alpha)/\sin\alpha$ son polinomios en $\cos\alpha$.*

Ejercicio 2.5. *El objetivo de este ejercicio es demostrar que $\sin 18^\circ=(\sqrt{5}-1)/4$. Sea $t=\sin 18^\circ$.*

1. *Observe que $5\cdot 18^\circ=90^\circ$, de manera que $\sin(3\cdot 18^\circ)=\cos(2\cdot 18^\circ)$.*
2. *Exprese $\sin 54^\circ=\sin(3\cdot 18^\circ)$ como un polinomio en t.*
3. *Exprese $\cos 36^\circ=\cos(2\cdot 18^\circ)$ como un polinomio en t.*
4. *Resuelva la ecuación para concluir el resultado.*

Ejercicio 2.6. *Demuestre que*

$$\sin(3\alpha)=4\sin\alpha\sin(60^\circ+\alpha)\sin(60^\circ-\alpha).$$

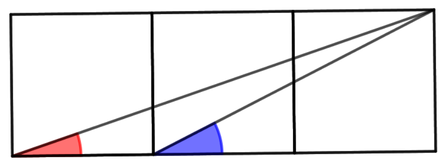
Un ejercicio un poco más difícil es demostrar que, en general, se tiene que

$$\sin(n\alpha)=(-2)^{n-1}\prod_{k=0}^{n-1}\sin\left(\alpha-\frac{180^\circ\cdot k}{n}\right).$$

Ejercicio 2.7. *Use las fórmulas anteriores para deducir que*

$$\tan(\alpha \pm \beta) = \frac{\tan\alpha \pm \tan\beta}{1 \mp \tan\alpha\tan\beta}.$$

Ejercicio 2.8. *Considere la siguiente figura formada por tres cuadrados.*



Determine la suma de los dos ángulos que se muestran.

3 Fórmulas de suma-a-producto

Si tomamos γ, δ tales que $\alpha = \gamma + \delta$ y $\beta = \gamma - \delta$, entonces

$$\begin{aligned}\sin\alpha + \sin\beta &= \sin(\gamma+\delta) + \sin(\gamma-\delta)\\ &= (\sin\gamma\cos\delta + \sin\delta\cos\gamma) + (\sin\gamma\cos\delta - \sin\delta\cos\gamma) = 2\sin\gamma\cos\delta,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\sin\alpha - \sin\beta &= \sin(\gamma+\delta) - \sin(\gamma-\delta)\\ &= (\sin\gamma\cos\delta + \sin\delta\cos\gamma) - (\sin\gamma\cos\delta - \sin\delta\cos\gamma) = 2\sin\delta\cos\gamma.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\cos\alpha + \cos\beta &= \cos(\gamma+\delta) + \cos(\gamma-\delta)\\ &= (\cos\gamma\cos\delta - \sin\gamma\sin\delta) + (\cos\gamma\cos\delta + \sin\gamma\sin\delta) = 2\cos\gamma\cos\delta.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\cos\alpha - \cos\beta &= \cos(\gamma+\delta) - \cos(\gamma-\delta)\\ &= (\cos\gamma\cos\delta - \sin\gamma\sin\delta) + (\cos\gamma\cos\delta + \sin\gamma\sin\delta) = -2\sin\gamma\sin\delta.\end{aligned}$$

Resolviendo para γ y δ, obtenemos que $\gamma = (\alpha+\beta)/2$ y $\delta = (\alpha-\beta)/2$. Con esto hemos probado el siguiente teorema.

Teorema 3.1 (Fórmulas de suma a producto)**.** *Para cualesquiera α, β se cumple que*

$$\sin\alpha \pm \sin\beta = 2\sin\frac{\alpha\pm\beta}{2}\cos\frac{\alpha\mp\beta}{2},$$

$$\cos\alpha + \cos\beta = 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2},$$

$$\cos\alpha - \cos\beta = 2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\beta-\alpha}{2}.$$

Comentario. *Note con cuidado el orden de la diferencia $\beta - \alpha$ en la última expresión.*

3.1 Identidades con ángulos de un triángulo

Consideramos ahora un triángulo ABC y las expresiones

$$\sin A + \sin B + \sin C, \quad \cos A + \cos B + \cos C.$$

Vamos a usar las fórmulas de suma-a-producto para reescribir estas expresiones. Tenemos que

$$\sin B + \sin C = 2\sin\frac{B+C}{2}\cos\frac{B-C}{2} = 2\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B-C}{2},$$

$$\cos B + \cos C = 2\cos\frac{B+C}{2}\cos\frac{B-C}{2} = 2\sin\frac{A}{2}\cos\frac{B-C}{2}.$$

Usando las fórmulas del ángulo doble obtenemos que

$$\begin{aligned}
\sin A + \sin B + \sin C &= 2\sin\frac{A}{2}\cos\frac{A}{2} + 2\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B-C}{2} \\
&= 2\cos\frac{A}{2}\left(\sin\frac{A}{2} + \cos\frac{B-C}{2}\right) \\
&= 2\cos\frac{A}{2}\left(\cos\frac{B+C}{2} + \cos\frac{B-C}{2}\right) = 4\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\cos A + \cos B + \cos C &= \left(1 - 2\sin^2\frac{A}{2}\right) + 2\sin\frac{A}{2}\cos\frac{B-C}{2} \\
&= 1 + 2\sin\frac{A}{2}\left(-\sin\frac{A}{2} + \cos\frac{B-C}{2}\right) \\
&= 1 + 2\sin\frac{A}{2}\left(-\cos\frac{B+C}{2} + \cos\frac{B-C}{2}\right) = 1 + 4\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}.
\end{aligned}$$

Tenemos entonces que

$$\boxed{\begin{aligned}
\sin A + \sin B + \sin C &= 4\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}, \\
\cos A + \cos B + \cos C &= 1 + 4\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}.
\end{aligned}} \tag{1}$$

Podemos usar las fórmulas del ángulo doble en la segunda expresión para obtener que

$$\left(1 - 2\sin^2\frac{A}{2}\right) + \left(1 - 2\sin^2\frac{A}{2}\right) + \left(1 - 2\sin^2\frac{A}{2}\right) = 1 + 4\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2},$$

y así concluir que

$$\boxed{\sin^2\frac{A}{2} + \sin^2\frac{B}{2} + \sin^2\frac{C}{2} + 2\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2} = 1.}$$

Ejercicio 3.1. *Si ABC es un triángulo, demuestre que*

$$\cos^2 A + \cos^2 B + \cos^2 C + 2\cos A\cos B\cos C = 1.$$

Ejercicio 3.2. *Si $\alpha + \beta + \gamma = 2\pi$, demuestre que*

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma - 2\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma = 1.$$

3.2 Problemas

Ejercicio 3.3. *Demuestre que*

$$\cos((n+2)\alpha) + \cos(n\alpha) = 2\cos\alpha\cos((n+1)\alpha), \quad \sin((n+2)\alpha) + \sin(n\alpha) = 2\cos\alpha\sin((n+1)\alpha).$$

Ejercicio 3.4 (Polinomios de Chebyshev de primer tipo)**.** *Use las identidades anteriores para probar que existe un polinomio de grado n tal que $T_n(\cos\alpha) = \cos(n\alpha)$. Establezca una recurrencia entre estos polinomios.*

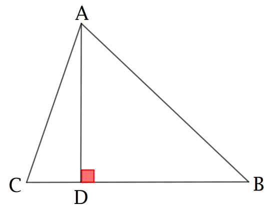
Ejercicio 3.5 (Polinomios de Chebyshev de segundo tipo)**.** *Use las identidades anteriores para probar que existe un polinomio de grado n tal que*

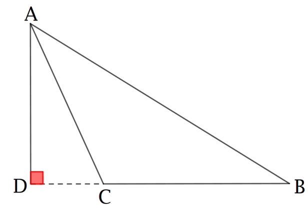
$$U_n(\cos\alpha) = \frac{\sin((n+1)\alpha)}{\sin\alpha}.$$

Establezca una recurrencia entre estos polinomios.

4 Ley de cosenos

Consideramos un triángulo ABC, cuyos lados miden a, b y c. Sea D el pie de la altura desde A, como en la figura.





En el caso en que los ángulos $\angle ABC$ y $\angle ACB$ son agudos, entonces D pertenece al interior del segmento BC y tenemos que

$$a = BC = CD + DB = b\cos C + c\cos B.$$

En el caso en que $\angle ACB > 90°$, tenemos que C pertenece a BD y obtenemos que

$$a = BC = BD - CD = b\cos C - c\cos(180° - B) = b\cos C + c\cos B.$$

En ambos casos obtenemos que

$$\boxed{a = b\cos C + c\cos B.}$$

Tenemos así las tres ecuaciones,

$$a = b\cos C + c\cos B, \quad b = c\cos A + a\cos C, \quad c = a\cos B + b\cos A.$$

Para resolver este sistema podemos multiplicar por a, b y c, respectivamente para obtener

$$a^2 = ab\cos C + ac\cos B, \quad b^2 = bc\cos A + ab\cos C, \quad c^2 = ac\cos B + bc\cos A.$$

Con esto deducimos el siguiente resultado.

Teorema 4.1 (Ley de cosenos)**.** *En un triángulo ABC, con lados a, b, c, se tiene que*

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A,$$

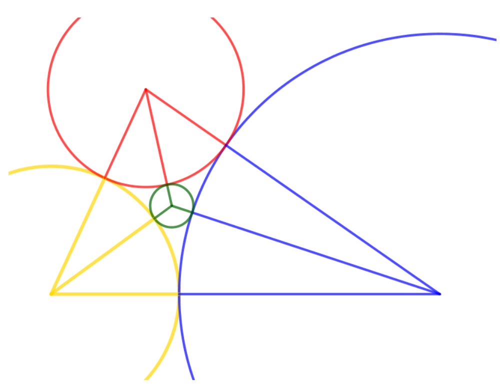
o equivalentemente,

$$\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}.$$

4.1 Aplicación: Teorema de Descartes

Consideramos ahora el siguiente problema:

Dados tres círculos tangentes exteriormente, de radios x, y, z, ¿cuál es el radio del círculo interno tangente exteriormente a los tres?



Comentario. *De momento no vamos a considerar el problema de la existencia de tal círculo, sino solo el cálculo del radio.*

Denotamos por X, Y, Z los centros de los círculos de radios x, y, z, respectivamente, por O el centro del círculo interno y r su radio. Sabemos que los puntos de tangencia están alineados con los centros, de manera que $YP = y + r$, $ZP = z + r$, $YZ = y + z$. Tenemos entonces que

$$\begin{aligned}\cos\angle YPZ &= \frac{(y+r)^2 + (z+r)^2 - (y+z)^2}{2(y+r)(z+r)} \\ &= \frac{2(yr + zr + r^2 - yz)}{2(y+r)(z+r)} = \frac{(y+r)(z+r) - 2yz}{(y+r)(z+r)} = 1 - \frac{2yz}{(y+r)(z+r)}.\end{aligned}$$

Análogamente, tenemos que

$$\cos\angle ZPX = 1 - \frac{2xz}{(x+r)(z+r)}, \quad \cos\angle XPY = 1 - \frac{2xy}{(x+r)(y+r)}.$$

Vamos a usar el resultado de Ejercicio 3.2. Para hacer más fácil la manipulación, vamos a denotar

$$u = \frac{yz}{(y+r)(z+r)}, \quad v = \frac{xz}{(x+r)(z+r)}, \quad w = \frac{xy}{(x+r)(z+r)}.$$

Tenemos que

$$\begin{aligned}(1-2u)^2 + (1-2v)^2 + (1-2w)^2 &= 3 - 4(u+v+w) + 4(u^2+v^2+w^2), \\ 2(1-2u)(1-2v)(1-2w) &= 2 - 4(u+v+w) + 8(uv+uw+vw) - 16uvw.\end{aligned}$$

De esta manera, la identidad $(1-2u)^2 + (1-2v)^2 + (1-2w)^2 - 2(1-2u)(1-2v)(1-2w) = 1$ de Ejercicio 3.2, implica que

$$4(u^2+v^2+w^2) - 8(uv+uw+vw) + 16uvw = 0,$$

o bien,

$$\begin{aligned}&\frac{y^2z^2}{(y+r)^2(z+r)^2} + \frac{x^2z^2}{(x+r)^2(z+r)^2} + \frac{x^2y^2}{(x+r)^2(y+r)^2} - \frac{2x^2yz}{(x+r)^2(y+r)(z+r)} \\ &\qquad - \frac{2xy^2z}{(x+r)(y+r)^2(z+r)} - \frac{2xyz^2}{(x+r)(y+r)(z+r)^2} + \frac{4x^2y^2z^2}{(x+r)^2(y+r)^2(z+r)^2} = 0.\end{aligned}$$

Multiplicando por $(x+r)^2(y+r)^2(z+r)^2$ y dividiendo por $x^2y^2z^2r^2$ obtenemos que

$$\begin{aligned}&\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{r}\right)^2 + \left(\frac{1}{y}+\frac{1}{r}\right)^2 + \left(\frac{1}{z}+\frac{1}{r}\right)^2 \\ &\qquad - 2\left(\frac{1}{y}+\frac{1}{r}\right)\left(\frac{1}{z}+\frac{1}{r}\right) - 2\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{r}\right)\left(\frac{1}{z}+\frac{1}{r}\right) - 2\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{r}\right)\left(\frac{1}{y}+\frac{1}{r}\right) + \frac{4}{r^2} = 0.\end{aligned}$$

Tenemos que

$$\begin{aligned}\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{r}\right)^2 + \left(\frac{1}{y}+\frac{1}{r}\right)^2 + \left(\frac{1}{z}+\frac{1}{r}\right)^2 &= \frac{3}{r^2} + \frac{2}{r}\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right) + \left(\frac{1}{x^2}+\frac{1}{y^2}+\frac{1}{z^2}\right), \\ \left(\frac{1}{y}+\frac{1}{r}\right)\left(\frac{1}{z}+\frac{1}{r}\right) + \left(\frac{1}{x}+\frac{1}{r}\right)\left(\frac{1}{z}+\frac{1}{r}\right) + \left(\frac{1}{x}+\frac{1}{r}\right)\left(\frac{1}{y}+\frac{1}{r}\right) &= \frac{3}{r^2} + \frac{2}{r}\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right) + \left(\frac{1}{xy}+\frac{1}{xz}+\frac{1}{yz}\right).\end{aligned}$$

De esta manera, la igualdad de arriba implica que

$$\frac{1}{r^2} - \frac{2}{r}\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right) + \left(\frac{1}{x^2}+\frac{1}{y^2}+\frac{1}{z^2} - \frac{2}{xy} - \frac{2}{xz} - \frac{2}{yz}\right) = 0.$$

Reescribiendo se obtiene que

$$\frac{1}{r^2} + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} + \frac{1}{z^2} = 2\left(\frac{1}{rx} + \frac{1}{ry} + \frac{1}{rz} + \frac{1}{xy} + \frac{1}{xz} + \frac{1}{yz}\right).$$

Completando el cuadrado al lado izquierdo concluimos el siguiente resultado.

Teorema 4.2 (Descartes)**.** *Si x, y, z, r son los radios de los círculos descritos anteriormente, entonces*

$$2\left(\frac{1}{r^2}+\frac{1}{x^2}+\frac{1}{y^2}+\frac{1}{z^2}\right)=\left(\frac{1}{r}+\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)^2.$$

4.2 Problemas

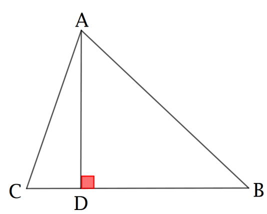
Ejercicio 4.1. *Calcule* $\cos\angle BGC$ *y* $\cos\angle BHC$*. Demuestre que B, C, G y H son concíclicos si y sólo si $b^2+c^2=2a^2$.*

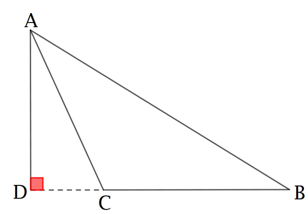
Ejercicio 4.2 (Napoleón)**.** *Demuestre que si se construyen triángulos equiláteros exteriormente sobre los lados de un triángulo, entonces sus centros forman un triángulo equilátero. Demuestre el resultado también en el caso en que los triángulos equiláteros se construyan internamente. Demuestre que la diferencia de las áreas, entre los triángulos equiláteros formados por los centros exteriores e interiores, es igual al área del triángulo ABC.*

Problema 1 (Irán 1999)**.** *Sea el triángulo ABC, con los ángulos B y C mayores que $45°$. Se construyen exteriormente los triángulos rectángulos isósceles CAM y BAN, e interiormente el triángulo rectángulo isósceles BPC, de tal forma que los ángulos rectos son CAM, BAN y BPC. Pruebe que el triángulo MNP también es rectángulo isósceles.*

5 Ley de senos

En el triángulo ABC tenemos que $h_a = b\sin C = c\sin B$ (usando que $\sin(180° - \alpha) = \sin\alpha$ si fuera el caso que alguno de los ángulos no es agudo).





Esto nos da que $b/\sin B = c/\sin C$. De manera análoga obtenemos el resultado con a y por lo tanto deducimos una primera versión de la ley de senos,

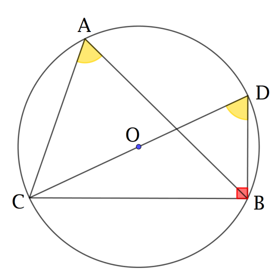
$$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}.$$

A continuación demostramos que estas cantidades son igual al diámetro del circuncírculo del triángulo.

Teorema 5.1 (Ley de senos)**.** *En un triángulo ABC con circunradio R se cumple que*

$$\frac{BC}{\sin A}=\frac{CA}{\sin B}=\frac{AB}{\sin C}=2R.$$

Prueba. Ya conocemos la igualdad de los tres cocientes, de manera que lo que resta demostrar es que estos son iguales a $2R$. Podemos suponer sin pérdida de generalidad que $\angle A < 90°$, de manera que el circuncentro O está del mismo lado de la recta BC que A.



Sea D el punto diametralmente opuesto a C, de manera que $\angle CBD = 90°$ y $\angle CDB = \angle A$. Esto implica que

$$\sin A = \frac{BC}{CD} = \frac{BC}{2R},$$

que era lo que queríamos probar. □

5.1 Problemas

Ejercicio 5.1. *Sea ABC un triángulo con circunradio R. Demuestre que la medida de la altura desde A es igual a*

$$h_a = 2R \sin B \sin C,$$

y que el área del triángulo es igual a

$$(ABC) = \frac{1}{2} bc \sin A = 2R^2 \sin A \sin B \sin C.$$

Ejercicio 5.2. *Sea ABC un triángulo con inradio r. Demuestre que el aŕea es igual a*

$$(ABC) = \frac{1}{2}(a+b+c)r.$$

De lo anterior se sigue que

$$r = \frac{2(ABC)}{a+b+c} = \frac{2R \sin A \sin B \sin C}{\sin A + \sin B + \sin C}.$$

Use la identidad (1) *y las fórmulas del ángulo doble para concluir que*

$$r = 4R \sin \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2}.$$

Ejercicio 5.3. *Sea ABC un triángulo con $\angle ACB = 45°$. Se considera el punto D sobre el lado BC tal que $BD = 2CD$ y $\angle ADB = 60°$. Halle la medida de $\angle ABC$.*

Ejercicio 5.4. *Sea $ABCD$ un cuadrado y P un punto interior tal que $\angle PCD = \angle PDC = 15°$. Demuestre que el triángulo ABP es equilátero.*

Problema 2 (OMCC 2006)**.** *Sea $ABCD$ un cuadrilátero convexo. Sea I el punto de intersección de las diagonales $\overline{AC}$ y $\overline{BD}$. Sean E,H,F y G puntos sobre los segmentos $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CD}$ y $\overline{DA}$, respectivamente, tales que $\overline{EF}$ y $\overline{GH}$ se cortan en I. Sea M el punto de intersección de $\overline{EG}$ y $\overline{AC}$ y sea N el punto de intersección de $\overline{HF}$ y $\overline{AC}$. Demuestre que*

$$\frac{AM}{IM} \cdot \frac{IN}{CN} = \frac{IA}{IC}.$$

Problema 3 (IMO Shortlist 2005)**.** *Sea ABC un triángulo acutángulo con $AB \neq AC$, sea H su ortocentro y M el punto medio de BC. Los puntos D en AB y E en AC son tales que $AE = AD$ y D,H,E son colineales. Pruebe que HM es perpendicular a la cuerda común de los circuncírculos de los triángulos ABC y ADE.*

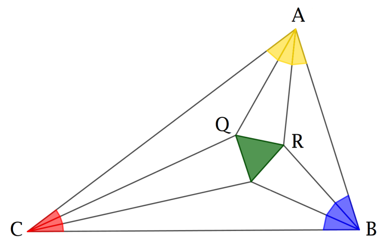
6 Teorema trigonométrico de Ceva

6.1 Motivación: Teorema de Morley

Vamos a usar como motivación la demostración del siguiente bello teorema clásico para derivar un resultado de unicidad para una ecuación trigonométrica. Nos encargaremos de demostrar este resultado de unicidad en la siguiente subsección.

Teorema 6.1 (Morley)**.** *Las intersecciones de las trisectrices de un triángulo determinan un triángulo equilátero.*

Prueba. Sea ABC el triángulo y sean Q y R los vértices del triángulo formado por la intersección de las trisectrices del ángulo A con las otras dos.



Como $\angle AQC = 180° - \frac{A}{3} - \frac{C}{3} = 120° + \frac{B}{3}$, por ley de senos tenemos que

$$AQ = \frac{AC \sin\frac{C}{3}}{\sin(120° + \frac{B}{3})} = \frac{2R \sin B \sin\frac{C}{3}}{\sin(120° + \frac{B}{3})}.$$

Observamos que $\sin(120° + \frac{B}{3}) = \sin(60° - \frac{B}{3})$ y $\sin B = \sin(180° - B)$. Esto nos recuerda las fórmulas del ángulo triple de Ejercicio 2.6, de manera que

$$\frac{\sin B}{\sin(120° + \frac{B}{3})} = \frac{\sin B}{\sin(60° - \frac{B}{3})} = 4 \sin\frac{B}{3} \sin\left(60° + \frac{B}{3}\right),$$

y por lo tanto obtenemos que

$$AQ = 8R \sin\frac{B}{3} \sin\frac{C}{3} \sin\left(60° + \frac{B}{3}\right).$$

De manera análoga, obtenemos que

$$AR = 8R \sin\frac{B}{3} \sin\frac{C}{3} \sin\left(60° + \frac{C}{3}\right),$$

por lo que

$$\frac{\sin(60° + \frac{B}{3})}{\sin(60° + \frac{C}{3})} = \frac{AQ}{AR} = \frac{\sin\angle ARQ}{\sin\angle AQR}. \tag{2}$$

Tenemos que

$$\left(60° + \frac{B}{3}\right) + \left(60° + \frac{C}{3}\right) = 120° + \frac{B + C}{3} = 180° - \frac{A}{3} = \angle ARQ + \angle AQR.$$

En vista de (2) y Lema 6.2 (que probaremos en la siguiente sección), obtenemos que

$$\angle ARQ = 60° + \frac{B}{3}, \qquad \angle AQR = 60° + \frac{C}{3}.$$

Esto implica que

$$QR = \frac{AQ \sin\angle QAR}{\sin ARQ} = \frac{8R \sin\frac{B}{3} \sin\frac{C}{3} \sin(60° + \frac{C}{3}) \cdot \sin\frac{A}{3}}{\sin(60° + \frac{B}{3})} = 8R \sin\frac{A}{3} \sin\frac{B}{3} \sin\frac{C}{3}.$$

Puesto que esta fórmula es simétrica con respecto a A, B, C, concluimos el resultado. $\square$

6.2 Una ecuación trigonométrica

En la sección anterior, nos encontramos con un sistema de ecuaciones de la forma

$$\alpha_1 + \beta_1 = \alpha_2 + \beta_2, \qquad \frac{\sin \alpha_1}{\sin \beta_1} = \frac{\sin \alpha_2}{\sin \beta_2}. \tag{3}$$

Queremos demostrar que el sistema anterior implica que $\alpha_1 = \alpha_2$ y $\beta_1 = \beta_2$. Sin embargo, si la suma de los ángulos en (3) es π, entonces la segunda ecuación se cumple automáticamente sin que haya ninguna implicación sobre la igualdad de los pares de los ángulos. Para los propósitos usuales, como el de Teorema 6.1, el siguiente resultado va a ser suficiente.

Lema 6.2. *Si $\alpha_i, \beta_i > 0$ satisfacen el sistema de ecuaciones* (3) *y $\alpha_1 + \beta_1 = \alpha_2 + \beta_2 < \pi$, entonces $\alpha_1 = \alpha_2$ y $\beta_1 = \beta_2$.*

Prueba. La condición de que los ángulos sean positivos y que su suma sea menor que π implica que podemos considerar dos triángulos $A_iB_iC_i$ tales que $\angle A_i = \alpha_i$ y $\angle B_i = \beta_i$. La igualdad en la suma de los ángulos implica que $\angle C_1 = \angle C_2$. Por ley de senos, la igualdad en los cocientes implica que

$$\frac{B_1C_1}{A_1C_1} = \frac{B_2C_2}{A_2C_2}.$$

Por el criterio LAL concluimos que los triángulos $A_1B_1C_1$ y $A_2B_2C_2$ son semejantes, y así $\alpha_1 = \alpha_2$ y $\beta_1 = \beta_2$. □

Prueba alternativa. La igualdad de los cocientes implica que

$$\cos(\alpha_1 - \beta_2) - \cos(\alpha_1 + \beta_2) = 2 \sin \alpha_1 \sin \beta_2 = 2 \sin \alpha_2 \sin \beta_1 = \cos(\alpha_2 - \beta_1) - \cos(\alpha_2 + \beta_1).$$

La igualdad de la suma de ángulos implica que $\alpha_1 - \beta_2 = \alpha_2 - \beta_1$, por lo que obtenemos finalmente que

$$\cos(\alpha_1 + \beta_2) = \cos(\alpha_2 + \beta_1).$$

Ahora, tenemos que $0 < \alpha_1 + \beta_2, \alpha_2 + \beta_1 < 2\pi$, por lo que la igualdad implica dos posibles casos:

$$\alpha_1 + \beta_2 = \alpha_2 + \beta_1, \quad (\alpha_1 + \beta_2) + (\alpha_2 + \beta_1) = 2\pi.$$

El segundo caso no es posible ya que $(\alpha_1 + \beta_2) + (\alpha_2 + \beta_1) = (\alpha_1 + \beta_1) + (\alpha_2 + \beta_2) < 2\pi$. Por lo tanto, obtenemos que $\alpha_1 + \beta_2 = \alpha_2 + \beta_1$. Esta ecuación y la igualdad de la suma implican fácilmente el resultado. □

6.2.1 Problemas

Problema 4 (R. Gelca, EE.UU. 1998, Banco de problemas)**.** *En una circunferencia de diámetro AB, se toman los puntos C, D, E en un lado de AB y F en el otro lado, tal que los arcos AC, CD y BE miden $20°$ y el arco BF mide $60°$. Sea M la intersección de BD y CE. Pruebe que $FM = FE$.*

Problema 5 (OMCC 2008)**.** *Sea ABC un triángulo acutángulo. Se toman los puntos P y Q en el interior de los lados AB y AC, respectivamente, tales que B, P, Q y C estén en una misma circunferencia. La circunferencia circunscrita al ΔABQ corta a BC de nuevo en S y la circunferencia circunscrita al ΔAPC corta de nuevo a BC en R. Las rectas PR y QS se intersecan en L. Demuestre que la intersección de AL y BC no depende de la escogencia de P y Q.*

Problema 6 (Extensión OMCC 2008)**.** *Sean A, B, C y L como en el problema anterior. Demuestre que AL es perpendicular a BC.*

6.3 Teorema de Ceva

Teorema 6.3 (Ceva)**.** *Sea ABC un triángulo, con D, E y F en los lados BC, CA y AB, respectivamente. Entonces AD, BE y CF concurren si y solo si*

$$\frac{\sin\angle BAD\cdot\sin\angle CBE\cdot\sin\angle ACF}{\sin\angle CAD\cdot\sin\angle ABE\cdot\sin\angle BCF}=1.$$

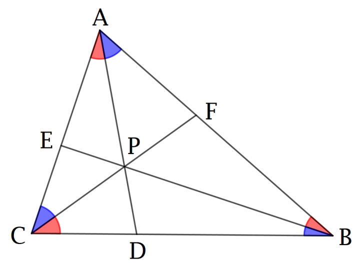
Prueba. Supongamos que AD, BE y CF concurren en un punto P. Por ley de senos tenemos que

$$\frac{\sin BAD}{\sin ABE}=\frac{\sin BAP}{\sin ABP}=\frac{BP}{AP},$$

y análogamente obtenemos que

$$\frac{\sin CBE}{\sin BCF}=\frac{CP}{BP},\qquad \frac{\sin ACF}{\sin CAD}=\frac{AP}{CP}.$$

Multiplicando las expresiones concluimos que el producto es igual a 1.



Consideramos ahora el converso, es decir, el caso en que el producto sea 1. Sea P la intersección de BE y CF. Por el argumento anterior con ley de senos tenemos que

$$\frac{\sin\angle BAP\cdot\sin\angle CBE\cdot\sin\angle ACF}{\sin\angle CAP\cdot\sin\angle ABE\cdot\sin\angle BCF}=1,$$

y así concluimos que

$$\frac{\sin\angle BAP}{\sin\angle CAP}=\frac{\sin\angle BAD}{\sin\angle CAD}.$$

Por Lema 6.2 obtenemos que $\angle BAP=\angle BAD$, es decir, P pertenece a AD, y por lo tanto AD, BE y CF concurren. □

6.3.1 Problemas

Problema 7 (D. Campos, OLCOMA 2019)**.** *Sea ABC un triángulo con $\angle BAC=30°$ y $\angle ABC=80°$. Sean Γ_B y Γ_C los círculos por A tangentes al lado BC en B y C, respectivamente. Sea $D\neq A$ la intersección de Γ_C con el lado AB y sea J la intersecció de Γ_B con el segmento CD. Si I es el incentro del triángulo ABC, demuestre que A, C, I y J son concíclicos.*

Problema 8 (Rumanía 2006, 9 grado, Banco de problemas)**.** *Sea I el incentro del triángulo ABC y sean A_1, B_1, C_1 los incentros de los triángulos IBC, ICA, IAB, respectivamente. Demuestre que AA_1, BB_1, CC_1 son concurrentes.*

Problema 9 (IMO Shortlist 2001)**.** *Sea A_1 el centro del cuadrado inscrito en el triángulo acutángulo ABC con dos vértices del cuadrado en el lado BC. Los otros dos vértices del cuadrado están sobre los lados AB y AC. Los puntos B_1 y C_1 se definen de manera similar para cuadrados inscritos con dos de sus vértices sobre AC y AB, respectivamente. Pruebe que las rectas AA_1, BB_1 y CC_1 son concurrentes.*

Problema 10 (IMO Shortlist 2006)**.** *Sea $ABCDE$ un pentágono convexo tal que $\angle BAC=\angle CAD=\angle DAE$ y $\angle ABC=\angle ACD=\angle ADE$. Las diagonales BD y CE se intersecan en P. Pruebe que la recta AP biseca al lado CD.*