Desigualdades (Intro)

René D. Reyes

23 de Mayo 2020

1 Propiedades Básicas

Antes de ver algunas desigualdades conocidas y trucos que resultan útiles en problemas de olimpiadas, es importante entender bien como manipular una desigualdad. Algunas de las siguientes ideas pueden parecerles ya conocidas. Además, por si solas es poco común que sirvan para resolver un problema olímpico de desigualdades. Sin embargo, confundirse respecto a alguna de las siguientes ideas puede llevar a pruebas en falso y errores costosos. Por tanto, es importante tenerlas claras desde el inicio.

La primera propiedad básica es simplemente la definición de una desigualdad. Una desigualdad puede darse de dos maneras: $x > y$ y $x \geq y$. La segunda es la que aparece más en problemas de olimpiadas, y más adelante vamos a ver que el caso de igualdad puede darnos pistas acerca de qué resultados conocidos usar para resolver un problema.

Ya dicho eso, estas son las demás propiedades básicas:

- $a \leq b \implies -b \leq -a$
- $a \leq 0, b \leq 0 \implies ab \geq 0$
- $a \leq 0, b \geq 0 \implies ab \leq 0$
- $a \leq b, c \leq d \implies a + c \leq b + d$
- $0 \leq a \leq b, 0 \leq c \leq d \implies ac \leq bd$
- $a^2 \geq 0 \ \forall a \in \mathbb{R}$
- $a > 1 \implies a^2 > a$
- $0 < a < 1 \implies a^2 < a$
- $a > 0, b > 0, a^2 < b^2 \implies a < b$

Otra propiedad básica de las desigualdades se relaciona al valor absoluto. El valor absoluto de un número real x se denota $|x|$ y es tal que $|x| = x \iff x \geq 0$ y $|x| = -x \iff x < 0$. Esto nos lleva a nuestra primera desigualdad conocida:

Desigualdad Triangular: $|a+b| \leq |a|+|b|$, con igualdad cuando $ab \geq 0$
O, en su forma general:

$$|x_1 + x_2 + ... + x_n| \leq |x_1| + |x_2| + ... + |x_n|$$

con igualdad cuando todos los sumandos tienen el mismo signo. Finalmente, una forma alternativa de ver esta desigualdad es:

$$|x_1 \pm x_2 \pm ... \pm x_n| \leq |x_1| + |x_2| + ... + |x_n|$$

Ejercicios

1. Para números reales a, b, c, muestre que:

$$|a| + |b| + |c| - |a+b| - |b+c| - |c+a| + |a+b+c| \geq 0$$

2. Sean $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ tales que $a+d = b+c$. Demuestre que:

$$(a-b)(c-d) + (a-c)(b-d) + (d-a)(b-c) \geq 0$$

2 Las Medias

Ahora vienen algunas desigualdades que facilmente puede que sean las más importantes para problemas de olimpiadas. Estas desigualdades son relaciones entre cuatro *medias*; la media aritmética, la media geométrica, la media cuadrática y la media hármonica. Empezaremos por definir las cuatro medias, luego veremos la relación de desigualdad entre ellas, y finalmente dejaremos una versión alternativa de ellas.
Las cuatro medias se definen de la siguiente manera para numeros Reales no-negativos $x_1, x_2, ..., x_n$:

- **Media Aritmética**(MA):

$$\frac{x_1 + x_2 + ... + x_n}{n}$$

- **Media Geométrica**(MG):

$$\sqrt[n]{x_1 x_2 ... x_n}$$

- **Media Cuadrática**(MQ):

$$\sqrt{\frac{x_1^2 + x_2^2 + ... + x_n^2}{n}}$$

- **Media Harmónica**(MH):

$$\frac{n}{\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+...+\frac{1}{x_n}}$$

Entonces, se cumplen las siguientes desigualdades:

$$MQ \geq MA \geq MG \geq MH$$

Con igualdad si y solo si $x_1 = x_2 = ... = x_n$
Para problemas de olimpiadas, la relación mas útil tiende a ser la Media Aritmética-Media Geométrica, por lo tanto vale la pena familiarizarse con ella:

$$\frac{x_1+x_2+...+x_n}{n} \geq \sqrt[n]{x_1x_2...x_n}$$

Además, a menudo se aplica esta a solamente dos números, por lo que también vale la pena familiarizarse bastante con la expresión:

$$\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$$

Finalmente, existe una variación de la Media Aritmética - Media Geométrica, la cual sirve como una generaización de la desigualdad:

MA-MG con Pesos: Si $x_1, ..., x_n, t_1, ..., t_n$ son números positivos tales que $t_1 + ...t_n = 1$, entonces se cumple que:

$$t_1x_1 + t_2x_2 + ... + t_nx_n \geq x_1^{t_1}x_2^{t_2}...x_n^{t_n}$$

Nótese que si escogemos $t_1 = t_2 = ... = t_n = \frac{1}{n}$, entonces obtenemos MA-MG regular.

Ejercicios

1. Demuestre que si $a, b, c > 0$ y $(1+a)(1+b)(1+c) = 8$ entonces $abc \leq 1$

2. Sean a, b, c números positivos con $a+b+c = 1$. Muestre que:

$$\left(\frac{1}{a}-1\right)\left(\frac{1}{b}-1\right)\left(\frac{1}{c}-1\right) \geq 8$$

3. Sean $a_1, ..., a_n, b_1, ..., b_n$ números positivos tales que $a_1 + ... + a_n = b_1 + ... + b_n$. Demuestre que:

$$\frac{a_1^2}{a_1+b_1} + ... + \frac{a_n^2}{a_n+b_n} \geq \frac{1}{2}(a_1 + ... + a_n)$$

3 Otras Desigualdades Útiles

Además de las medias, existen algunas otras desigualdades conocidas que a menudo son útiles para resolver problemas olímpicos. Las dos que pondremos en esta sección no se alejan demasiado de las medias en términos de que tan estrictas son las condiciones para poder aplicarlas. Por lo general requieren un poco más de creatividad que las medias, pero definitivamente vale la pena conocerlas bien. Dicho todo eso, vamos con la siguiente desigualdad:

Desigualdad del Reacomodo: Si se tienen dos colecciones de números reales $a_1 \leq a_2 \leq ... \leq a_n$ y $b_1 \leq b_2 \leq ... \leq b_n$, entonces para cualquier permutación (reacomodo) $(a'_1, a'_2, ..., a'_n)$ de $(a_1, a_2, ..., a_n)$ se tiene que:

$$a_1b_1 + ... + a_nb_n \geq a'_1b_1 + ... + a'_nb_n \geq a_nb_1 + ... + a_1b_n$$

La igualdad de la izquierda se da sii $(a'_1, a'_2, ..., a'_n) = (a_1, a_2, ..., a_n)$ y la de la derecha se da sii $(a'_1, ..., a'_n) = (a_n, ..., a_1)$

Algo que les puede llamar la atención aquí es que se necesitan dos secuencias *ordenadas*. Es poco común que un problema de olimpiadas venga con las variables ya ordenadas, pero eso no significa que no puedan utilizar esta desigualdad! Basta con verificar si las condiciones del problema permiten o no asignarle un orden arbitrario a las variables. Entonces, pueden asignar un orden sin pérdida de generalidad, y luego aplicar la desigualdad de reacomodo. Además, no es necesario que las dos colecciones de números sean distintas, entonces aunque el problema solo involucre una colección, pueden encontrar uso para esta desigualdad.

La siguiente desigualdad es un poco más complicada, y no siempre es evidente cuando se puede utilizar un problema. Además, el caso de igualdad es un poco más complejo que los que hemos visto hasta ahora. Sin embargo, es bastante poderosa y tiene menos condiciones que reacomodo e incluso las medias. Por lo tanto, vale la pena tenerla como herramienta al intentar un problema de desigualdades:

Desigualdad de Cauchy-Schwarz: Para cualesquiera números reales $x_1, ..., x_n$ y $y_1, ..., y_n$, se cumple que:

$$(x_1y_1 + x_2y_2 + ... + x_ny_n)^2 \leq (x_1^2 + ... + x_n^2)(y_1^2 + ... + y_n^2)$$

La igualdad se da si y solo si:

$$\frac{x_1}{y_1} = \frac{x_2}{y_2} = ... = \frac{x_n}{y_n}$$

Una ventaja de la desigualdad de Cauchy-Schwarz es que, como pueden ver, se puede aplicar a cualquier conjunto de números reales. A veces es complicado ver dónde se puede aplicar, ya que los problemas no siempre vienen con las variables elevadas al cuadrado, entonces es necesario encontrar alguna sustitución, o factorizar los términos de alguna manera no-trivial.

Además de estas dos desigualdades conocidas, existen otras que son menos comunes y un poco más especificas, pero que de vez en cuando resultan bastante útiles. Sin embargo, me parece mucho más importante que dominen las Medias, Cauchy-Schwarz y Reacomodo a que medio entiendan un montón de desigualdades conocidas. Igual si les interesan, dejaré algunas en los ejercicios de esta sección.

Ejercicios

1. (Desigualdad de Nesbitt) Demuestre que para $a, b, c \in \mathbb{R}^+$, se tiene que:

$$\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{b+a} \geq \frac{3}{2}$$

2. (Desigualdad de Tchebyshev) Sean $a_1 \leq ... \leq a_n$ y $b_1 \leq ... \leq b_n$. Demuestre que:

$$\frac{a_1b_1 + ... + a_nb_n}{n} \geq \left(\frac{a_1 + ... + a_n}{n}\right)\left(\frac{b_1 + ... + b_n}{n}\right)$$

4 Trucos

Para terminar este material, me parece necesario tener una lista de algunos trucos que pueden ser útiles al trabajr un problema de desigualdades. La mayoría de estos trucos no son únicamente para este tipo de problemas. En realidad son trucos de álgebra en general, o hasta estrategias generales para solución de problemas. Además, incluiré un par de métodos que a veces pueden ser tentadores pero en general no dan fruto, o en el peor de los casos llevan a pruebas en falso. Empecemos con los trucos que vale la pena tener en cuenta al comenzar un problema de desigualdades:

- **Si y Solamente Si:** Un truco simple pero útil es tratar de manipular la expresión dada en el problema para obtener un resultado conocido, o al que se le pueda aplicar alguna desigualdad conocida. La mejor forma de hacer esto es buscar una relación de "si y solo si" entre la expresión original y la expresión simple. Esto puede involucrar algunas expresiones intermedias, y es importante que la relación entre estas también sea de "si y solo si".
  Esto se debe al hecho de que necesitamos la implicación en una dirección para poder llegar de la expresión original a la conocida. Pero, también necesitamos que una vez demostrada la expresión simple, esta implique la expresión original. Esta idea queda confusa en palabras, entonces les doy

un ejemplo.
Si queremos demostrar MA-MG para dos variables:

$$\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab} \iff \frac{(a+b)^2}{4} \geq ab \text{ (ya que a y b son no-negativos)}$$

$$\iff a^2 + 2ab + b^2 \geq 4ab \iff a^2 - 2ab + b^2 \geq 0 \iff (a-b)^2 \geq 0$$

Y sabemos que esta última desigualdad es cierta ya que para cualquier real x se tiene que $x^2 \geq 0$. Entonces, tenemos que algo conocido implica nuestra desigualdad original, por lo tanto esta es cierta.
Me parece importante agregar que hay que tener mucho cuidado que todas las relaciones que vamos encontrando sean de verdad un "si y solo si" y que la implicación no vaya en una sola dirección. Sino, llegar a un resultado conocido no sirve de nada ya que no podemos "devolvernos" con las relaciones dadas.

- **Factorizar, Expandir y Cancelar:** En el ejemplo anterior, se vio un ejemplo básico de este truco. Es común que el problema venga con los elementos agrupados de tal manera que escondan algun resultado conocido. Por lo tanto, es bueno utilizar manipulación algebraíca para "explorar" el problema. Otra razón por lo cual esto puede ser útil es que a veces es necesario factorizar la expresión de tal manera que podamos aplicarle alguna desigualdad conocida a cada factor. Veremos un ejemplo de esto luego de presentar el siguiente truco.

- **Sustitución:** Los problemas de desigualdades a menudo traen expresiones dificiles de manipular, por lo que crear nuevas variables en términos de las del problema y sustirlas en la desigualdad puede ser útil. Además, los problemas de desigualdades a venudo vienen acompañados de una o más condiciones para las variables, y la sustitución puede ayudarnos a incorporar estas condiciones en la desigualdad como tal. Como ejemplo, demostraremos la siguiente desigualdad:
Si a, b, c son números reales positivos y menores que 1 con $a + b + c = 2$ entonces:
$$\left(\frac{a}{1-a}\right)\left(\frac{b}{1-b}\right)\left(\frac{c}{1-c}\right) \geq 8$$
Ahora, definimos $x = 1 - a, y = 1 - b, z = 1 - c$. Entonces, utilizando la condición dada para a, b, c, tenemos que:
$$x + y + z = 3 - (a + b + c) = 1 \implies a = 1 - x = y + z, b = x + z, c = x + y$$
Sustituyendo obtenemos la desigualdad:
$$\left(\frac{y+z}{x}\right)\left(\frac{x+z}{y}\right)\left(\frac{x+y}{z}\right) \geq 8 \iff (y+z)(x+z)(x+y) \geq 8xyz$$
Ahora, podemos aplicar MA-MG a cada factor:
$$\frac{y+z}{2} \geq \sqrt{yz} \implies (y+z) \geq 2\sqrt{yz}$$

$$\frac{x+z}{2} \geq \sqrt{xz} \implies (x+z) \geq 2\sqrt{xz}$$
$$\frac{x+y}{2} \geq \sqrt{xy} \implies (x+y) \geq 2\sqrt{xy}$$

Si multiplicamos estos tres resultados, obtenemos:

$$(y+z)(x+z)(x+y) \geq (2\sqrt{yz})(2\sqrt{xz})(2\sqrt{xy}) = 8xyz$$

Por tanto, nuestra desigualdad original es cierta.

- **Transitividad:** Si tenemos dos expresiones A y B y queremos demostrar que $A \geq B$, a menudo es buena idea encontra una expresión intermedia C tal que es evidente que $A \geq C$, y luego demostrar que $C \geq B$.
  Hay dos ADVERTENCIAS sobre este tema que es importante recordar al utilizar esta técnica. Primero, es posible que la desigualdad original sea muy exacta, por lo que encontrar una expresión intermedia puede resultar dificil. Entonces, a veces vale la pena sustituir algunos valores en las variables para ver si este es el caso. La segunda advertencia es la siguiente. Si queremos demostrar $A \geq B$, y encontramos una expresión C tal que $A \geq C$ y $B \geq C$, estas relaciones no nos dicen ABSOLUTAMENTE nada sobre la relación entre A y B. Parece obvio, pero es fácil confundirse después de llevar mucho tiempo pensando en el problema.

- **Casos de Igualdad:** Buscar los casos de igualdad para el problema puede darnos una idea de qué desigualdades conocidas podemos y no podemos usar para demostrarla. Además, nos da una idea de como se comporta la desigualdad en términos de simetría y otras relaciones entre las variables.

Ahora que ya vimos algunos trucos que pueden ser útiles, quiero mencionar trucos o técnicas con las que hay que tener mucho cuidado, o incluso evitar:

- **División:** A veces parece buena idea dividir por alguna expresión algebraíca, pero antes de hacerlo hay que asegurarse de que las condiciones del problema no permitan que esta expresión sea igual a 0. Sino, esto podría llevar a pruebas en falso, o a tener que tratar dos casos distintos durante el resto del problema. También es importante revisar que la expresión no sea negativa, sino al dividir por ella habría que cambiar la dirección de la desigualdad.

- **Contradicción:** Esta técnica es muy fuerte y común en áreas como la teoría de números o combinatoria, pero en desigualdades puede llevar a dar círculos o a problemas más complicados. A pesar de que parece buena idea decir "Para demostrar que el lado derecho es menor o igual al izquierda, asumiremos que es mayor y buscaremos una contradicción", la mayoría del tiempo no lo es. El resultado sigue siendo una desigualdad, y mientras que por un lado tenemos desigualdades conocidas, no tenemos muchas "contradicciones conocidas" para desigualdades.

- **Ejemplo/Contraejemplo:** Dar ejemplos en los cuales la desigualdad se cumple, o contraejemplos para argumentar que el negativo de la desigualdad no puede ocurrir, no es buena idea. Sin importar la cantidad de ejemplos, esta estrategia no cuenta como una demostración. Además, puede ser una pérdida de tiempo calcular muchos contraejemplos en vez de lograr progresar hacia una demostración de verdad.
  Dicho eso, algunos ejemplos bien pensados pueden ayudar a entender el problema, pero hay que saber parar de buscar ejemplos y empezar la demostración.

5 Problemas (Tarea)

Los siguientes problema vienen APROXIMADAMENTE en orden de más accesible a más dificil. En la siguiente sesión que tengamos, cuando les de las soluciones, les diré de donde salieron estos problemas, ya que la mayoría son de competencias pasadas.

1. Sean a, b, c números positivos tales que $a + b + c = 1$. Demuestre que: $\sqrt{4a+1} + \sqrt{4b+1} + \sqrt{4c+1} \leq \sqrt{21}$

2. Sean a, b, c reales positivos tales que $a + b + c = 1$. Demuestre que:
$$a\sqrt{a^2+6bc} + b\sqrt{b^2+6ac} + c\sqrt{c^2+6ab} \leq \frac{3\sqrt{2}}{4}$$

3. Sean a, b, c números reales tales que $\frac{1}{a+b} + \frac{1}{b+c} + \frac{1}{a+c} = 1$ y $ab+bc+ac > 0$. Demuestre que:
$$a + b + c - \frac{abc}{ab+bc+ac} \geq 4$$

4. Sean $x_1, x_2, \cdots, x_{11} \in \mathbb{R}^+$ ordenados en forma creciente. Pruebe que:
$$\left(\sum_{k=1}^{11} kx_k\right)\left(\sum_{n=1}^{11}(12-n)x_n\right) \leq 2019\sqrt{\sum_{j=1}^{11} x_j^4}$$

5. Demuestre que para todos los reales $x_1, x_2, ..., x_n$:
$$\frac{x_1}{1+x_1^2} + \frac{x_2}{1+x_1^2+x_2^2} + \cdots + \frac{x_n}{1+x_1^2+\cdots+x_n^2} < \sqrt{n}.$$

6. Sean $a_2, a_3, \cdots, a_n$ reales positivos tales que $a_2a_3\cdots a_n = 1$. Demuestre que:
$$(1+a_2)^2(1+a_3)^3\cdots(1+a_n)^n > n^n$$

6 Bibliografía

- Bulajich, R., Gómez, J.A., Valdez, R. (2005). *Desigualdades.* UNAM. http://www.acm.ciens.ucv.ve/main/entrenamiento/material/Desigualdades%20-%20Radmila,%20Jose%20Antonio%20y%20Rogelio.pdf
- Art of Problem Solving. *Community: Contest Collections.*