# Estrategias Ganadoras

Eduardo Salas Jiménez

## 1. Introducción

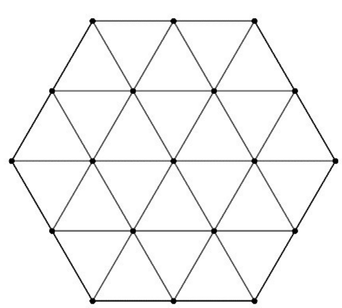
Dentro de la matemática que se estudia en competencias olímpicas, es común encontrar problemas que se basan en juegos, los cuales son jugados por personas, donde cada jugador es llamado un *pensador perfecto*, ya que se parte del supuesto de que estos no cometen errores en sus jugadas y hacen todo lo posible por ganar, cumpliendo siempre con las reglas del juego. Usualmente los juegos son entre dos pensadores perfectos que compiten por la victoria, aunque puede suceder que el empate sea una posibilidad dentro del juego.

En algunos de estos problemas, existen formas de jugar por medio de las que uno de los jugadores es capaz de asegurarse la victoria, sin importar cómo juegue su contrincante. Cuando esto existe, a dicha forma de jugar se le conoce como una *estrategia ganadora*; también hay estrategias que le aseguran a alguno de los dos jugadores por lo menos no perder (en casos donde existe el empate), y en estas ocasiones, la forma de jugar es llamada *estrategia no perdedora*. Para introducir estos conceptos, a continuación tenemos un problema en el que se busca la estrategia ganadora a un juego (este problema se encuentra también en la lista de problemas).

En la figura se muestra una maya hexagonal formada por triangulitos equiláteros. Luis y Juan toman turnos para jugar de la siguiente manera. En su turno, cada jugador colorea un segmento de recta, incluidos sus extremos, de acuerdo a las reglas:

- Los extremos del segmento deben coincidir con los vértices de algunos de los triangulitos.
- El segmento debe estar formado por uno o varios lados de algunos de los triangulitos.
- El segmento no puede tener ningún punto en común con ninguno de los segmentos coloreados anteriormente (incluidos los extremos).

Pierde el jugador que en su turno no pueda colorear ningún segmento. Si Luis juega primero, determine qué jugador tiene una estrategia ganadora y descríbala.



# 2. Aspectos generales

## 2.1. Conceptos básicos

### 2.1.1. Juegos

A nivel olímpico, los juegos constan de una serie de reglas con algunas condiciones iniciales. En estos tipos de juegos generalmente se cuenta con la presencia de dos jugadores que juegan como rivales, y es usual que alternen sus turnos dentro del juego. Sin embargo, es posible encontrar problemas con más jugadores, incluso juegos en los que un único jugador persigue un objetivo y lo que se busca es determinar si es posible o no que lo logre, y cómo en caso de que pueda hacerlo.

Los juegos se desarrollan de manera que los jugadores buscan la victoria. En los juegos es posible que los jugadores ganen o pierdan, aunque en algunos casos el juego puede finalizar con un empate. Es lo usual en este tipo de juegos que no se extiendan de manera indeterminada, es decir, que son juegos finitos o que se terminan tras una cantidad finita de jugadas o movimientos. Con esta información definimos este tipo de juegos de la siguiente manera:

**Definición:** Llamaremos *Juegos Combinatóricos, Olímpicos* o *Competitivos*, a todos aquellos juegos finitos, entre dos jugadores perfectos (ver 2.1.2.), en los que los jugadores tienen la posibilidad de ganar o perder, e incluso la de un empate, y buscan obtener el mejor resultado individual.

### 2.1.2. Pensadores perfectos

En los problemas relacionados a juegos, los jugadores que se involucran en el problema siempre serán pensadores perfectos. Un pensador perfecto es una persona que siempre va a buscar la mejor alternativa para jugar, esto con la intención de llegar a cumplir su objetivo de ganar el juego, o al menos de no perder en el caso de que haya empate y no pueda asegurarse la victoria. Los pensadores perfectos van a hacer todo lo posible por superar a su rival, mientras cumplen, claro está, las reglas del juego.

En síntesis, definimos un *pensador perfecto* o *jugador perfecto* como un jugador que en cada turno que realiza dentro del juego, se asegura de ejecutar la mejor jugada posible y toma la decisión óptima.

### 2.1.3. Estrategia ganadora

Llamamos una estrategia ganadora a una forma de jugar por medio de la cuál, un jugador (pensador perfecto) puede vencer a su oponente en el juego con total seguridad, independientemente de la estrategia que el rival utilice, ya sea otro pensador perfecto, o no. Además, es importante saber que en todo juego finito, de dos jugadores que son pensadores perfectos y saben la información del juego en todo momento, y sin posibilidad de empates, existe una estrategia ganadora para alguno de los dos jugadores.

Por medio de esa estrategia, un jugador puede asegurarse la victoria, y esto suele depender de quién inicie el juego. En fin, una estrategia ganadora es una forma de jugar, con la certeza de vencer al oponente, ante cualquier estrategia posible que el contrincante utilice. Sobre las estrategias ganadoras es importante conocer el siguiente teorema:

**Teorema:** En todo *Juego Combinatórico* sin posibilidad de empate, entre dos jugadores perfectos, existe una *estrategia ganadora* para alguno de los dos jugadores.

### 2.1.4. Estrategia no perdedora

Cuando un juego combinatórico no admite empates, ya vimos anteriormente que alguno de los dos jugadores puede asegurarse la victoria con una estrategia ganadora, con la que evidentemente está evitando una derrota.

En escenarios donde el empate es posible, un jugador prefiere ganar antes que empatar, pero además, el empate es preferido por sobre la derrota. Por esto, un jugador podría tratar de, por lo menos, empatar para no perder, y si es posible obtener la victoria como con las estrategias ganadoras.

En aquellos juegos donde un jugador tiene una estrategia para obtener el mejor resultado posible y evitar ser vencido, nos encontramos frente a otro tipo de estrategias conocidas como *estrategias no perdedoras*.

Ante esta posibilidad de tener la certeza de no perder el juego al obtener un empate o, mejor aún, una victoria, surge un concepto más amplio que el de *estrategias ganadoras* visto en 2.1.3., y este lo definimos a continuación:

**Definición:** Una *estrategia no perdedora* es una forma de jugar por medio de la cuál, el jugador que la posea y utilice, se asegure no perder, y además con certeza va a obtener el mejor resultado posible, ya sea la victoria o el empate.

### 2.1.5. Posiciones ganadoras y perdedoras

En el transcurso de un juego, mientras los jugadores van alternando sus turnos, vamos a encontrar diferentes situaciones (o posiciones) en las que los jugadores van a tener que desarrollar su juego.

Cuando la situación inmediata del jugador actual hace que su oponente esté destinado a la derrota, independiente de lo qué haga, a esta situación se le conoce como una posición perdedora, mientras que si un jugador se encuentra en una situación favorable y puede asegurarse la victoria, a esta se le llama una posición ganadora.

Esto es útil para conocer qué tipo de posiciones son cada una de las posibles situaciones que un jugador puede encontrar, y es más fácil estudiar estas situaciones viendo el juego desde el final hasta el inicio.

Estos conceptos se desarrollan mejor en la sección 3.3., donde se profundiza en cómo este concepto es útil para encontrar estrategias ganadoras y resolver problemas de juegos olímpicos. Esto tiene relevancia ya que si sabemos que la posición inicial de algún jugador es ganadora o perdedora, se puede saber cuál de los dos posee la estrategia ganadora.

## 2.2. Conocimientos previos

### 2.2.1. Tableros

Es habitual encontrar juegos que se desarrollen utilizando un tablero. Los tableros más comunes son los que tienen forma rectangular y están divididos en cuadrados más pequeños llamados *casillas*.

Generalmente, si $n$ y $m$ son enteros positivos, y estos son los tamaños de los lados del tablero rectangular $n \times m$, este se divide totalmente en $n \cdot m$ casillas de lado 1 que no se sobreponen ni dejan vacíos. A estos cuadros cuyos lados miden 1 se les llama *cuadros unitarios*.

En un tablero, un conjunto de casillas que se encuentren sobre la misma línea tienen nombres distintos de acuerdo a su orientación. Si es una línea de casillas en posición vertical se le llama una *columna*, si es horizontal se le conoce como una *fila*, y si es inclinada es conocida como *diagonal*.

En algunos juegos o problemas, se pueden encontrar tableros con formas no rectangulares, que suelen ser polígonos regulares. El más usado es el de triángulo equilátero, donde sus lados miden $n$ y se divide totalmente en triángulos equiláteros de lado 1, todos sin sobreponerse ni dejar huecos.

Otra figura importante en este tipo de problemas es la de los círculos, pues se suele hablar de puntos sobre una circunferencia en los que se determinan ciertos movimientos y condiciones iniciales. Estos acomodos, del círculo o de tableros pueden no ser parte del enunciado a un problema, pero sí llegar a un problema equivalente en el que se utilicen estas figuras y faciliten la resolución del problema original.

### 2.2.2. Ajedrez

Un juego importante dentro de los problemas relacionados a estrategias ganadores es el ajedrez. El ajedrez es un juego de mesa para dos personas, que cuenta con un tablero cuadrado de $8 \times 8$, en donde las casillas del tablero están pintadas de dos colores distintos, generalmente blanco y negro, de modo que cualesquiera dos casillas que comparten un lado están pintadas de diferente color. En el tablero, cada jugador tiene 16 piezas: un rey, una dama, dos torres, dos caballos, dos alfiles y ocho peones.

Al inicio del juego, todas las piezas tienen una posición predeterminada y cada pieza tiene un movimiento específico. En cada casilla hay a lo sumo una pieza, y si una pieza desea (y puede) ocupar una casilla con otra pieza en ella, la sustituye y la pieza que se encontraba allí sale del juego (se dice que la captura o se la come).

Si en la trayectoria de una pieza se encuentra otra, debe detenerse antes o capturarla, a excepción del caballo que puede saltar sobre otras piezas. A continuación explicaremos los movimientos que son permitidos para cada pieza en el juego:

- **Rey:** Se mueve a una casilla que comparta un vértice o un lado con la casilla en la que se encuentra actualmente.
- **Dama:** Se mueve sobre la fila, columna o diagonales sobre las que esté. Puede moverse la cantidad de casillas que desee en una de esas direcciones.
- **Torre:** Se mueve en dirección vertical u horizontal la cantidad de casillas que desee.
- **Caballo:** Se mueve dos casillas de forma vertical u horizontal, y luego una perpendicular a la dirección anterior, es decir, se mueve a una casilla que esté a distancia $\sqrt{5}$ de donde está.
- **Alfil:** Se mueve en forma diagonal la cantidad de casillas que desee.
- **Peón:** Se mueve hacia adelante de forma vertical una casilla. En el primer turno puede avanzar dos casillas. Para capturar otras piezas, no lo hace vertical ni horizontalmente, sino diagonal (adelante a la derecha, o adelante a la izquierda), con una pieza ubicada a $\sqrt{2}$ de distancia.

### 2.2.3. Mazo de naipes

En muchos problemas se tienen cartas para el desarrollo de un juego. Unas cartas populares son las de naipes, que están formados por cuatro grupos de cartas, cada uno con 13 cartas numeradas del 1 al 13. A cada grupo o categoría de cartas se le conoce como palo, y son: corazones, diamantes, tréboles y picas. En total son 52 cartas, 4 por cada número del 1 al 13.

### 2.2.4. Dominó

El dominó es un juego de mesa que se juega con fichas de $2 \times 1$. En problemas olímpicos es importante conocer cuáles son estas fichas porque se utilizan en algunos juegos olímpicos.

Tradicionalmente, cada ficha de dominó tiene un número entero en cada cuadro $1 \times 1$ que conforman una de sus caras, y hay una ficha por cada par números posibles, los cuales se encuentran en el conjunto $\{0, 1, \ldots, 6\}$, y se puede ver que en total hay 28 fichas.

### 2.2.5. Tres en línea (Gato)

Otro juego famoso es el de Tres en línea, también conocido como Gato. Este es un juego para dos personas que colocan fichas, alternadamente, en un tablero de $3 \times 3$. Las fichas de cada jugador son todas iguales, pero distintas a las de su oponente, y en cada casilla puede haber a lo sumo una ficha, sin importar el jugador que la haya colocado.

El juego acaba cuando algún jugador logre tener tres fichas suyas sobre una línea (columna, fila o diagonal mayor), y el que logre esto gana. En caso de que ya se hayan colocado nueve fichas en el tablero y ninguno tenga tres fichas propias en línea, el juego se declara empate.

# 3. Estrategias ganadoras

Existen diferentes métodos, ideas y "trucos" que comúnmente son utilizados a la hora de resolver problemas donde aparecen estrategias ganadoras. Dentro de las herramientas fundamentales se encuentran los términos de paridad, simetría (de varias formas), así como posiciones ganadoras y perdedoras.

El ejemplo inicial es uno de los problemas que son resueltos gracias a la simetría. Por otra parte, esto se complementa con una idea basada en analizar casos más sencillos (conocido como "casitos"), pero equivalentes al problema en cuestión.

También se suele acudir a conocimientos de otras áreas como teoría de números, álgebra, o geometría, e inclusive otros tópicos de combinatoria como el principio de palomar, conteo, doble conteo, grafos, entre otros.

En esta sección vamos a ver las principales de estas ideas y herramientas comunes en problemas de juegos, tanto los que son puramente de este tipo de problemas, como los que no lo son pero se pueden utilizar para resolver problemas de juegos de estrategia ganadora.

Es importante saber que no siempre los problemas se resuelven usando únicamente uno de los temas desarrollados en esta sección, sino que es posible, y común, requerir de varias de estas herramientas para resolver el problema, mezclando los distintos conocimientos e ideas.

## 3.1. Conocimientos de otras áreas

En esta sección no abarcaremos a fondo temas que no son propios de juegos combinatóricos, sino de otras áreas. Estos los enunciaremos pero no desarrollaremos cada uno pues son muy amplios y se deben abarcar desde la perspectiva del área correspondiente para enfatizar en los detalles importantes. Estos temas pueden no ser los únicos, pero quizás son algunos de los más importantes:

- Aritmética básica.
- Divisibilidad.
- Aritmética modular (Congruencias).
- Álgebra básica.
- Factorización.
- Ecuaciones e inecuaciones.
- Conceptos de geometría.
- Polígonos regulares e irregulares.
- Geometría combinatórica.
- Principio del palomar.
- Técnicas de Conteo.
- Doble conteo.
- Teoría de grafos.

## 3.2. Casitos e inducción

La primer técnica de resolver problemas de estrategia ganadora es usada en muchos tipos de problemas, aunque resulta de gran utilidad a la hora de resolver problemas de juegos. Ver y analizar casos más sencillos o pequeños que el problema original es importante para tener una mejor idea de cómo se comporta el juego con las reglas dadas a nivel general.

Estos casitos pueden verse como los casos base de una inducción, aunque no en todos los casos es necesario (o posible) acudir a utilizar inducción para resolver el problema. Sin embargo, para estudiar dichos casos base, es primordial saber cuáles casos son los que se pueden usar y cuáles aportan más información para resolver el problema.

En problemas que utilizan tableros, ya sean cuadrados, rectangulares o de otras formas, puede ser útil visualizar el problema en un tablero que conserve las propiedades importantes dentro del problema, pero a una escala menor.

Por ejemplo, si se quiere probar o encontrar alguna estrategia ganadora en un tablero de $2020 \times 2020$, se pueden estudiar casos de tableros de $1 \times 1$, $2 \times 2$ o $3 \times 3$, pero quizás por las condiciones del problema el lado del tablero requiere una medida par, así que acudiríamos a uno $2 \times 2$, $4 \times 4$ o $6 \times 6$. Si en vez de eso necesitamos que sea congruente a algún $a$ en módulo $m$, pues se pueden buscar otros números con esta características con mayor proyección.

Por otra parte, cuando se aplica alguna operación a un número, ya sea porque está escrito en una pizarra, o porque representa la cantidad de objetos en una bolsa o una caja en el juego, esto puede visualizarse mejor cambiando el número que se tiene originalmente por otro más pequeño. Al igual que en el caso anterior, con el tablero, es importante ver si el número depende de alguna variable como su paridad, su congruencia en algún módulo, u otras variables según el problema.

Este tipo de casitos, como los demás que se pueden encontrar en los distintos problemas, facilitan la resolución de los mismos pues ayudan a conjeturar una posible estrategia ganadora y con esto llegar a una conclusión contundente de cómo un jugador puede asegurarse la victoria.

En algunos casos no se utiliza inducción como tal, sino que con lo visto en cada casito estudiado, es posible demostrar una estrategia en el caso solicitado, ya sea un número específico o para $n$. En cambio, existen problemas que requieren de estos casitos como casos base para probar una premisa inductivamente. Esto llega a conclusiones generales, ya sea que se desee demostrar para $n$ o para un valor dado.

Por último, otra forma de resolver el problema utilizando casos, pero no necesariamente pequeños, es cuando se analiza el problema para las distintas posibilidades existentes. Esto es, comprender lo que sucede para algún $n$ cuando este es par o cuando es impar, o lo que sucede cuando $n$ tiene residuo $0, 1, \ldots, m-1$ al ser dividido por $m$.

Lo anterior incluso puede llegar a ser necesario, pues hay juegos en los que no siempre es el mismo jugador el que posee la estrategia ganadora, ya que puede suceder que si $n$ es par gana quien empieza, y este pierde en caso contrario.

## 3.3. Posiciones ganadoras y perdedoras

Ya se vio anteriormente, en la sección 2.1.5., qué son las posiciones ganadoras y perdedoras. Este concepto resulta muy útil para encontrar estrategias ganadoras, ya que si conocemos qué tipo de posición es la posición inicial de algún jugador, sabemos quién tiene asegurada la victoria.

En particular, para determinar si una posición es ganadora o perdedora, lo más fácil es dar por supuesto que el juego acabó, y pensar en los eventos previos al fin del juego, es decir, tratar de conocer cómo se dio el juego para que un jugador ganara o perdiera.

Una vez que el juego acabó, la última persona en jugar fue la que ganó o perdió, entonces el que jugó el turno anterior a este, forzó al resultado final del juego. Así sucesivamente, se puede saber cómo cada escenario posible del juego pudo ser ganador o perdedor para la persona que jugó en ese turno.

Haciendo esto, se puede llegar a que la posición inicial del juego estaba predeterminada a ser una posición ganadora o perdedora, y por eso, lo único que debe hacer el jugador con la estrategia ganadora es forzar a que su oponente solo tope con posiciones perdedoras y así lograr vencerlo.

En ocasiones el método no es visualizar el juego desde el final hasta el escenario inicial, sino que se puede ver cómo ciertas posiciones son ganadoras o perdedoras, por ejemplo, un juego en el que todos los números impares sean posiciones perdedoras, así que el otro jugador debe tratar de dejar el escenario a su oponente en números impares para ganarle.

Analizar posiciones a nivel general, como se mencionó anteriormente, es común con problemas en los que se utilizan congruencias modulares, pues se ve cómo de acuerdo a la congruencia del número, este es una posición ganadora o perdedora, aunque no es exclusivo de ese tipo de problemas.

Es más común utilizar posiciones ganadoras y perdedoras en juegos con una trama secuencial, es decir, donde una jugada afecta en gran medida a la siguiente, y así durante todo el juego, como cuando se le aplican operaciones a un número hasta obtener algún resultado. Esto es más factible, puesto que un evento del juego solo pudo haber pasado por medio de alguna jugada, que conocemos, hizo el jugador anterior, y por esto se puede hacer un procedimiento como el que explicamos anteriormente.

## 3.4. Coloraciones

Las coloraciones son herramientas muy útiles en problemas de juegos, y aunque no son completamente suficientes para resolver los problemas, pueden ser fundamentales y facilitar la solución en gran medida.

Las coloraciones son usadas generalmente en tableros, en los que se colorean las casillas con cierto patrón u orden, de manera que al dar color a las casillas del tablero, esto mejore la comprensión de la dinámica del juego, y se llegue a encontrar una forma de jugar respecto a la coloración asignada. Las coloraciones no son exclusivas de juegos en tableros, sino que también se utilizan en problemas donde se usa un tablero pero no hay un juego de por medio.

Las coloraciones también pueden usarse en otras condiciones y problemas, por ejemplo en grafos, donde se pueden colorear las aristas o los vértices según sea conveniente en el problema. También es posible usarlas en problemas donde distinguir objetos por colores es útil, como colorear algunas cajas de rosa y otras de celeste para diferenciarlas dentro del juego.

Para saber dónde se puede usar una coloración, lo más importante es practicar problemas que lo ameriten para desarrollar un instinto que nos guíe para saber no solo cuándo colorear, sino cómo hacerlo, que es donde se encuentra la dificultad para idear una coloración ante un problema.

Existen coloraciones comúnmente usadas que con la práctica se van convirtiendo en ideas recurrentes. La más sencilla y popular, sin lugar a dudas, es la coloración de un tablero de ajedrez. Esta se detalla en 2.2.2., que es colorear el tablero con dos colores, de manera que dos casillas que compartan un lado sean coloreadas distinto.

Esto se suele usar en tableros cuadrados y rectangulares, aunque también se puede usar en tableros triangulares. Otras coloraciones posibles son colorear las filas, columnas o diagonales con dos o más colores, alternando y siguiendo un patrón. Esto quiere decir que, si los colores son $c_1, c_2, \ldots, c_n$, entonces la línea $nk + i$ tiene todas sus casillas del color $c_i$, donde por línea podemos entender columna, fila o diagonal.

En otros casos se podrían colorear solamente algunas líneas, o colorear de acuerdo a patrones dados, pero no es el objetivo de esta sección describir todas las coloraciones, sino introducir esta técnica que facilite la solución de problemas que así lo requieran.

## 3.5. Invarianzas

Una invarianza es una condición o característica que se mantiene constante (no varía) a pesar de que se cambien otros factores dentro de un problema. Las invarianzas son de gran utilidad en matemáticas en general, pues conocer algunas características constantes pueden facilitar comprender el funcionamiento de algunos fenómenos y conseguir predecir resultados con base en las invarianzas.

Específicamente en juegos con estrategias ganadoras, se suelen encontrar invarianzas que llevan a algún jugador a ganar o perder según se tengan las circunstancias iniciales. Esto se relaciona en gran medida con la importancia de estudiar casitos que ayuden a intuir y formalizar estas invarianzas.

Es importante poder distinguir aquellas invarianzas que resulten de utilidad en la solución del problema, por ejemplo que una cantidad de casillas de cierto color se mantiene constante, que un número siempre es múltiplo de 3, o que una pieza en un tablero coloreado como de ajedrez siempre se mueve cambiando el color de su casilla.

Este último ejemplo llama la atención, ya que en algunos casos, para ver las invarianzas es necesario llevar a cabo previamente una coloración o algún cambio al problema para poder encontrar esa invarianza que resuelve el problema, como por ejemplo, que con cierta coloración una ficha sólo está en cuadros negros, o que cada ficha es adyacente a una cantidad par de cuadros blancos.

## 3.6. Paridad

La paridad se basa en que todo número entero es par o impar, y a estas características se les conoce como la paridad de un número. En muchas ocasiones, la paridad de números importantes en algunos juegos llega a ser relevante en los mismos, por lo que es indispensable conocer más sobre cómo esto facilita la solución de problemas.

En algunos casos, donde a un número (o a una cantidad) se le efectúan cambios, es posible que la paridad determine posiciones ganadoras o perdedoras, por lo que es importante conocer esto para que un jugador mantenga la paridad a los números que él necesite para hacerse con la victoria.

Así mismo, cuando se suman o restan números y el resultado depende de la paridad, se debería acudir a un análisis de cómo la paridad puede afectar mi juego. No está de más recordar que la suma de dos números con la misma paridad, da como resultado un número par, mientras que si sumamos dos números con distinta paridad, el resultado es impar.

En algunos casos sustituir los números impares por 1 y los números pares por 0 o por 2, facilita la comprensión de los problemas, así como la redacción, pues manipular estos números es más cómodo que tener números relativamente grandes, donde lo único que nos importa de ellos es si son pares o impares.

Lo anterior también se relaciona con lo visto en 3.2. sobre analizar casitos pequeños, pues es posible que sea más fácil distinguir los casos según la paridad de un número para resolver el problema. Esta técnica puede extenderse a ver más casos y no solamente en 0 y 1, sino que se puede ver como los residuos en módulo $n$, que es básicamente lo que se hace con la paridad para el caso específico de $n = 2$.

Es útil recordar que si buscamos que una suma de números tenga cierta paridad, no importa que no controlemos los primeros números, pues un solo número es suficiente para cambiar o para conservar la paridad. Igualmente, si queremos que una suma de números de cierto residuo en algún módulo, podríamos controlar esto de acuerdo a los números que sumemos, para llegar a obtener una estrategia ganadora en problemas donde la congruencia de los números sea fundamental para ganar o perder.

## 3.7. Simetría

La simetría dentro de las jugadas de un juego lo entenderemos como una correspondencia entre las jugadas realizadas por los jugadores, donde un jugador busca, a partir de cierto momento, copiar en cierta forma lo que hace su oponente en su respectivo turno.

Existen diferentes formas de copiar al rival, y esta estrategia la puede usar tanto el segundo jugador copiando al primero, o el primer jugador iniciando de forma que luego pueda copiar al segundo. A esta forma de jugar se le llama *jugar simétrico*, y la referencia de la simetría puede variar. En esta sección distinguiremos la simetría respecto a un punto, a una línea, o simplemente copiando las jugadas del rival.

### 3.7.1. Copiar las jugadas

La primer forma de jugar simétrico es simplemente copiar los movimientos del oponente. Por ejemplo, si utilizamos lo visto en 3.6. sobre paridad y jugamos para mantener un total par, podríamos solamente clonar la paridad de las jugadas del rival. Incluso, si lo que se busca es lo contrario, una forma de ganar podría ser jugar opuesto, lo que viene a ser una simetría inversa de las jugadas del rival.

Conocer si copiar las jugadas rivales nos da la victoria es importante para resolver este tipo de problemas, y como ya se dijo, esto puede ser favorable tanto para el segundo jugador (copiando desde su primer turno), como para el primer jugador (copiando desde su segundo turno, tras el primer turno rival), y eso aplica para las dos simetrías que veremos luego, las cuales aplican en juegos con elementos geométricos en el plano.

### 3.7.2. Simetría respecto a una línea

Cuando se juega a poner objetos, colorear figuras (puntos, segmentos, líneas, y demás), u otro tipo de jugadas similares, la simetría también puede ser una forma de asegurarse la victoria. Cuando el eje de simetría de las figuras puede ser una linea, lo que hace el jugador que copia es reflejar la jugada de su contrincante respecto a la línea ya mencionada.

Esta simetría nos asegura que cada vez que el rival pueda jugar de un lado de la línea, existe la posibilidad de jugar simétrico a él, por lo que la primer persona sin poder jugar será el oponente antes que quién posea la estrategia ganadora de jugar simétrico.

Lo fundamental es saber cuál línea corresponde al eje de simetría y asegurar que las jugadas a cada lado del eje son simétricas y posibles, para asegurar la victoria de alguno de los dos jugadores, que es el que copia a su rival. Debemos enfatizar en la necesidad de probar una correspondencia entre las jugadas y justificar que son simétricas.

### 3.7.3. Simetría respecto a un punto

Por último, veremos otra forma de jugar simétrico con algunas variaciones a la simetría respecto a una línea (3.7.2.), y esto es cuando se juega simétrico respecto a un punto. Lo anterior significa que, en juegos donde las jugadas consistan en colocar figuras (puntos, segmentos, líneas, ...) en el plano, o jugadas similares, cada vez que un jugador finalice su turno, el oponente hará su juego como una rotación de 180° respecto a un punto (el mismo punto a lo largo de todo el juego).

Con esta forma de copiar juego rival, al igual que en 3.7.2., la persona que copia los movimientos rivales se asegura que puede jugar cada vez que su rival lo haga antes, por lo que el otro será quien en algún momento no tenga jugadas disponibles. En este caso, también es importante determinar el punto sobre el que se harán las rotaciones y asegurarse de que esta forma de jugar asegura la victoria.

Tanto 3.7.2. como 3.7.3., son técnicas viables en tableros rectangulares, así como en otro tipo de figuras en el plano. En el caso de los tableros rectangulares, suele suceder que la línea de reflexión es una línea de casillas (columna, fila o diagonal mayor) o una recta que pasa entre dos columnas o dos filas del centro, dependiendo de las dimensiones del tablero.

Cuando se trata de una rotación, esta puede ser con la casilla o con el vértice del centro del tablero, aunque nuevamente depende de las dimensiones que posea el tablero. Por ejemplo, un tablero de $3 \times 3$ sí cuenta con una casilla central, pero en un tablero de $20 \times 20$, el centro del tablero es un único punto.

# 4. Problemas propuestos

1. Dos personas toman turnos poniendo fichas de dominó en una mesa cuadriculada de $2 \times 3$ de manera que cada ficha cubre exactamente 2 espacios. Pierde quien ya no pueda poner más fichas. Determine una estrategia ganadora para uno de los jugadores.

2. Los números del 1 al 20 están escritos en una pizarra, en orden y en una sola fila. Dos jugadores, por turnos, ponen signos "+" y "−" entre los números. Cuando todos los signos son puestos, la expresión resultante se evalúa. Gana el primer jugador si el resultado es par; gana el segundo jugador si es impar. ¿Quién gana y cómo?

3. En el plano se colocan monedas de 1, 2, 3 y $n$ olcolones en los puntos $(a, b)$ donde $a$ y $b$ son enteros positivos menores o iguales que 4, con exactamente una moneda en cada uno de estos puntos. En el punto $(1, 1)$ hay 1 olcolón, en los puntos $(1, 2), (2, 2), (2, 1)$ hay 2 olcolones, en los puntos $(3, c)$ y $(d, 3)$ con $c$ y $d$ enteros positivos menores o iguales que 3, hay 3 olcolones, y en el resto de puntos hay $n$ olcolones.

Adrián y Bob juegan a elegir puntos con al menos un olcolón y tomar todos los olcolones que estén en ese punto, iniciando por Adrián que, en el primer turno, elige el punto que él desee. Luego se tienen las siguientes reglas:

- Si en el turno $k \geq 1$ se eligió el punto $(a, b)$, el que juega en el turno $k + 1$ debe elegir un punto $(c, d)$ con $c \leq a$ y $d \leq b$
- Si todos los puntos $(c, d)$ que cumplen lo anterior no tienen monedas, el jugador del turno $k + 1$ puede elegir cualquier otro punto con al menos un olcolón.

El juego acaba cuando no hay más olcolones en el plano. Si gana quien al finalizar tenga más olcolones, determine quién tiene asegurada la victoria y cuál es su estrategia ganadora para los casos de $n = 2$ y $n = 4$. *(Banco de Problemas, Final OLCOMA 2019)*

4. Carlos y Fernando juegan en una cuadrícula de $3 \times 3$, a colocar fichas celestes y rosadas. El primer jugador selecciona alguna de las fichas y la coloca en una de las casillas; seguidamente, el segundo jugador selecciona alguna de las fichas (de cualquier color) y la coloca en una de las casillas disponibles (que aún no posee una ficha), y así sucesivamente, iniciando por Carlos y jugando alternadamente. Gana el primero que forme una línea de tres fichas del mismo color en cualquier orientación (horizontal, vertical o diagonal). Determine cuál de los dos jugadores posee una estrategia ganadora y explique cuál es.

5. En un tablero de $n \times n$, Natalia y Nicole juegan alternándose a escribir números, ya sea 0 o 1, en cada casilla del tablero. En cada casilla hay a lo sumo un número escrito y el juego finaliza cuando se han escrito $n^2$ números. El objetivo de Natalia es que la suma de los números escritos en cada fila, así como la suma de todos los números del tablero posean la misma paridad, mientras que el objetivo de Nicole es impedir esto. Determine quién tiene estrategia ganadora para los casos de $n = 2018$ y $n = 2019$. *(Entrenamiento zonas alejadas, Final OLCOMA 2019)*

6. Jake y Myriam tienen el número 19 escrito en una pizarra, y juegan alternadamente, iniciando por Jake como sigue: Si el número $n$ está escrito en la pizarra, este puede ser sustituido por $n-3$ o por $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor$, según el jugador lo desee. Pierde el jugador que en su turno escriba un número menor o igual 0 en la pizarra. Determine cuál es la estrategia ganadora y cuál jugador es quien tiene asegurada la victoria.
**Nota:** Se define $\lfloor x \rfloor$ como la parte entera de $x$, es decir, el mayor entero que es menor o igual a $x$, por ejemplo, $\lfloor \frac{7}{2} \rfloor = \lfloor 3,5 \rfloor = 3$ y $\lfloor \frac{8}{2} \rfloor = \lfloor 4 \rfloor = 4$. *(Entrenamiento zonas alejadas, Final OLCOMA 2019)*

7. Dos jugadores (Andrew y Brandon) y otras 2021 personas forman un círculo, de modo que Andrew y Brandon no quedan en posiciones consecutivas. Andrew y Brandon juegan por turnos alternadamente empezando por Andrew. Una jugada consiste en tocar a una de las personas que se encuentra a su lado, la cual debe salir del círculo.

Gana el jugador que logre sacar del círculo a su oponente. Demostrar que uno de los dos jugadores tiene una estrategia ganadora y describir dicha estrategia. *(OMCC, 2001)*

8. En una pizarra se escriben los números $1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9$. Arturo y Ben juegan por turnos. Cada jugador en su turno escoge uno de los números que quedan en la pizarra y lo borra, junto con todos sus múltiplos (si los hay). El jugador que borra el último número pierde. Arturo juega primero. Determinar si alguno de los dos jugadores tiene una estrategia ganadora y explicar cuál es esa estrategia. *(OMCC, 2004)*

9. León y Hamana tienen 2019 cartas en una mesa. Juegan alternadamente, iniciando por León, a tomar cartas de la mesa con la siguiente regla: En cada turno, cada jugador puede eliminar $n$ cartas, con $1 \leq n \leq 6$. Pierde el jugador que tome la última carta de la mesa. Determine quién tiene la estrategia ganadora y explique cómo se asegura ser un campeón. *(Problema clásico)*

10. Hay 20202 fichas en una mesa. Alex y David juegan alternadamente, iniciando por Alex, a retirar fichas de la mesa. En cada turno, el jugador puede retirar 1, 2, 3 o 4 fichas. Gana el jugador que retira la última ficha. ¿Quién tiene la estrategia ganadora y cómo juega para obtener siempre la victoria? *(Problema clásico)*

11. Clara y Daniela tienen fichas en una mesa, y juegan alternadamente con la siguiente regla: en cada turno, el jugador elimina una cantidad entera de fichas entre 1 y $k$, inclusive, donde $k$ es un entero positivo. Suponga que la cantidad de fichas en la mesa es $n$, con $n > k$, y comienza Clara. Con base en esto, resuelva lo siguiente:

(a) Si gana el jugador que retira la última ficha, determine cuál jugador posee una estrategia ganadora y explique dicha estrategia para cada posible $n$.

(b) Si pierde el jugador que retira la última ficha, determine cuál jugador posee una estrategia ganadora y explique dicha estrategia para cada posible $n$. *(Problema clásico)*

12. Dos jugadores toman turnos poniendo monedas circulares en una mesa circular, de manera que una cara de la moneda debe estar en contacto con la superficie de la mesa. Pierde el que ya no pueda poner más fichas. Determine una estrategia ganadora para uno de los jugadores.

13. Jossie y Shelly tienen tres grupos de 2020 globos cada uno y juegan de la siguiente manera: un movimiento consiste en escoger uno de los grupos, descartar los globos de todos los grupos restantes y dividir el escogido en dos o tres grupos, con al menos un globo cada uno. Pierde la persona que no pueda hacer un movimiento completo. Si $A$ empieza, entonces determine quién tiene la estrategia ganadora y describa la estrategia. *(Clasificatorio OMCC, 2020)*

14. Olcomae coloca 2021 monedas de 1, 2 o 3 olcolones en una fila. Olcomae quiere que entre cualesquiera dos monedas de 1 olcolón haya al menos una moneda; entre cualesquiera dos monedas de 2 olcolones haya al menos dos monedas; y entre cualesquiera dos monedas de 3 olcolones haya al menos 3 monedas. Determine todas las cantidades de monedas de 3 olcolones que puede poner Olcomae. *(Clasificatorio OMCC e IMO, 2020)*

15. Olcomae juega en un tablero de $N \times N$ empezando con un 0 en todas sus casillas. En cada paso, Olcomae elige una casilla y le suma un mismo entero (positivo o negativo) a todas las casillas en la misma columna y misma fila de la casilla seleccionada, sin sumarle nada a la que eligió. Decimos que el entero $N$ es *bonito* si es posible que, después de una cantidad finita de pasos, Olcomae logre escribir 2020 en las $N^2$ casillas a la misma vez.

(a) Determine si el entero 2019 es bonito. En caso afirmativo, describa una serie finita de pasos con la que Olcomae pueda escribir 2020 en las $2019^2$ casillas simultáneamente.

(b) Determine si el entero 506 es bonito. En caso afirmativo, describa una serie finita de pasos con la que Olcomae pueda escribir 2020 en las $506^2$ casillas simultáneamente.

**Nota**: Olcomae puede repetir la casilla en diferentes pasos y puede sumar enteros distintos en diferentes pasos. *(Clasificatorio OMCC, 2020)*

16. Barbie y Ken tienen una cuerda con 2020 perlas. Juegan alternando los turnos, y en el primer turno, Barbie corta la cuerda en dos cuerdas con $a_1$ y $a_2$ perlas respectivamente, donde $a_1 > 0$, $a_2 > 0$ y $a_1 + a_2 = 2020$. En cada turno siguiente, el jugador respectivo desecha una de las dos cuerdas cortadas en el turno anterior, y con la otra cuerda repite el proceso inicial realizado por Barbie en el primer turno. Pierde el jugador que tras desechar una de las dos cuerdas, no puede cortar la otra (porque esta tiene una única perla). Determine cuál es la estrategia ganadora y quién la tiene. *(Clasificatorio OIM, 2018)*

17. Dos jugadores toman turnos trazando diagonales en un 2020-*ágono* regular. Ellos pueden trazar una diagonal mientras no interseque interiormente una diagonal que ya haya sido trazada en otro turno. Pierde el que no pueda trazar más diagonales. Determine una estrategia ganadora para uno de los jugadores.

18. Alicia y Benito juegan, de manera alternada, a trazar diagonales en un $n$-*ágono* regular, con $n$ par. Ellos pueden trazar un diagonal mientras no interseque interiormente una diagonal trazada en algún turno anterior. Pierde el que no pueda trazar más diagonales. Determine una estrategia ganadora para alguno de los dos jugadores, si inicia Alicia.

19. Ingrid y Maricruz tienen escrito el número 60 en una pizarra. Juegan alternadamente, iniciando por Ingrid, a sustituir el número $n$ escrito en la pizarra por un número de la forma $n - d$, donde $d$ es un divisor de 60. Pierde la que escribe en la pizarra un número menor o igual que 0. ¿Cuál es la estrategia ganadora y quién la tiene? *(Entrenamiento zonas alejadas, Final OLCOMA 2019)*

20. Dos jugadores, por turnos, ponen alfiles en los cuadrados de un tablero de ajedrez de tal forma que ninguno de los ya puestos pueda capturar a otro. El que ya no puede poner más alfiles pierde. ¿Quién tiene la estrategia ganadora y cuál es?

21. Allan y Brenda juegan, alternadamente e iniciando por Allan, a colocar caballos de ajedrez en un tablero de $8 \times 8$, de manera que no pueden haber dos caballos que se ataquen. Pierde el jugador que no puede poner otro caballo en el tablero. Determine quién tiene la estrategia ganadora y cómo debe jugar. ¿Cuál es la estrategia ganadora si se juega en un tablero de $2019 \times 2019$?

22. Se tienen 98 puntos en una circunferencia. María y José juegan alternadamente de la siguiente manera: Cada jugador une dos puntos que no hayan sido unidos anteriormente. El juego acaba cuando cada uno de los 98 puntos ha sido usado como vértice de al menos un segmento. Gana la persona que dibuja el último segmento. Si empieza José, ¿quién puede asegurar que va a ganar el juego?

23. Los números 36 y 25 se escriben en una pizarra. Andy y Bart se alternan alternadamente para escribir la diferencia positiva entre dos números ya escritos, siempre y cuando esta diferencia no esté ya escrita en la pizarra. Si gana quien ya no pueda escribir ningún número y comienza Andy, determine una estrategia ganadora para alguno de los dos jugadores. ¿Qué sucede si inicialmente están escritos los números 2012 y 2008, en vez de 36 y 25?

24. En un tablero de $10 \times 10$, dos jugadores en cada turno colocan una ficha de dominó sobre dos cuadritos del tablero, sin que dos fichas se traslapen. El que ya no pueda colocar más fichas pierde. ¿Quién tiene la estrategia ganadora y detalle cuál es?

25. Cinco jarras vacías e idénticas de 2 litros de capacidad están ubicadas sobre los vértices de un pentágono regular. Cenicienta y su madrastra malvada realizan el siguiente procedimiento por rondas: Al inicio de cada ronda, la madrastra toma un litro de agua de un río cercano y distribuye su contenido arbitrariamente en las 5 jarras. Luego Cenicienta escoge un par de jarras vecinas, vierte todo su contenido en el río, y las regresa a su lugar. Luego la siguiente ronda empieza. El objetivo de la madrastra es conseguir que una de las jarras rebalse. El objetivo de Cenicienta es prevenir que eso suceda. ¿La madrastra puede asegurar que una de las jarras rebalse?

26. Se tienen 2009 cajas numeradas del 1 al 2009, algunas de las cuales contienen piedras. René y Kuff juegan alternadamente, comenzando por René. Una jugada consiste en seleccionar una caja $i$ que no esté vacía, tomar una o más piedras de esa caja y ponerlas en la caja $i + 1$. Si $i = 2009$, las piedras que se tomen se desechan. El jugador que retire la última piedra (dejando todas las cajas vacías) gana.

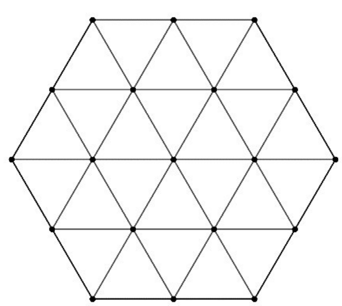
(a) Suponiendo que inicialmente en la caja 2 hay 2009 piedras y todas las demás cajas $(1, 3, 4, 5, \ldots, 2009)$ están vacías, halle una estrategia ganadora para uno de los dos jugadores y justifíquela.

(b) Suponiendo que inicialmente cada caja contiene exactamente una piedra, halle una estrategia ganadora para uno de los dos jugadores y justifíquela. *(OMCC, 2009)*

27. En la figura se muestra una maya hexagonal formada por triangulitos equiláteros. Boschini y Sofía toman turnos para jugar de la siguiente manera. En su turno, cada jugador colorea un segmento de recta, incluidos sus extremos, de acuerdo a las reglas:

- Los extremos del segmento deben coincidir con los vértices de algunos de los triangulitos.
- El segmento debe estar formado por uno o varios lados de algunos de los triangulitos.
- El segmento no puede tener ningún punto en común con ninguno de los segmentos coloreados anteriormente (incluidos los extremos).

Pierde el jugador que en su turno no pueda colorear ningún segmento. Si Boschini juega primero, determine qué jugador tiene una estrategia ganadora y descríbala. *(OMCC, 2017)*



28. Luciia y Javier tienen 2018 tarjetas numeradas del 1 al 2018. Los números siempre son visibles y juegan a tomar una tarjeta alternadamente, iniciando por Javier. Al finalizar, ambos suman los números de sus tarjetas y gana quien tenga como resultado un número par. ¿Quién tiene la estrategia ganadora y cuál es? *(OMCC, 2018)*

29. Se tiene un polígono regular $P$ con 2019 vértices, y en cada vértice hay una moneda. Dos jugadores Azul y Rojo van a jugar alternadamente, empezando por Azul, de la siguiente manera: Primero Azul elige un triángulo con vértices en $P$ y pinta el interior del triángulo de azul, después Rojo elige un triángulo con vértices en $P$ y pinta el interior del triángulo de rojo, de tal forma que los triángulos formados en cada jugada no se intersecan en su interior con ninguno de los anteriores.

Continúan así hasta que ya no puedan elegir más triángulos para pintarlos. Después, la moneda de cada vértice la gana el jugador que tenga más triángulos de su color incidiendo en ese vértice (si hay la misma cantidad de triángulos de los dos colores incidentes a ese vértice, entonces ninguno de los dos gana esa moneda, y la moneda se anula). Gana el jugador que logra más monedas. Encuentre una estrategia ganadora para alguno de los dos jugadores.
**Nota:** dos triángulos pueden compartir vértices o lados. *(OMCC, 2019)*

30. El número 3 está escrito en una pizarra. Ana y Bernardo toman turnos, empezando por Ana, para jugar el siguiente juego: Si el número escrito en la pizarra es $n$, el jugador en su turno debe reemplazar este número por un entero $m$ que sea coprimo con $n$ y además con $n < m < n^2$. El primer jugador que escriba un número mayor o igual a 2016 pierde. Determine cuál de los jugadores tiene una estrategia ganadora y descríbala. *(OMCC, 2016)*

31. Anselmo y Bonifacio inician un juego donde alternadamente sustituyen un número escrito en una pizarra. En cada turno, un jugador puede sustituir el número escrito en la pizarra por la cantidad de divisores positivos de dicho número, o por la diferencia entre el número y la cantidad de divisores positivos que este tiene. Anselmo es el primer jugador en jugar, y el jugador que escribe por primera vez el número 0 es el ganador. Si el número inicial es 1036, determine cuál jugador tiene una estrategia ganadora y describa dicha estrategia.
**Nota:** Por ejemplo, el número de divisores de 14 es 4, donde estos divisores son 1, 2, 7, y 14. *(OMCC, 2015)*

32. En un tablero de ajedrez ($8 \times 8$), un rey se encuentra en la casilla de la esquina inferior izquierda. Jula y Kim se turnan, comenzando por Jula, a mover el rey una casilla, ya sea hacia la derecha, hacia arriba o diagonalmente (derecha y arriba). La jugadora que logre colocar al rey en la casilla de la esquina superior derecha del tablero gana. ¿Quién tiene la estrategia ganadora, y cuál es esta?

33. Se tienen 2008 bolsas rotuladas del 1 al 2008, con 2008 ranas en cada una. Wilson y Evelyn juegan alternadamente iniciando por Wilson. Una jugada consiste en seleccionar una bolsa y sacar de ella la cantidad de ranas que se deseen (al menos una), quedando en ésta $x$ ranas ($x \geq 0$). Después de cada jugada, de cada bolsa con número de rótulo mayor al de la bolsa seleccionada y que contenga más de $x$ ranas, se escapan algunas hasta que queden $x$ en la bolsa. Pierde el jugador que saque la última rana de la bolsa 1. Encuentre y justifique una estrategia ganadora. *(OMCC, 2008)*

34. Se tienen 2020 piedras en una bolsa. Alison y Bianca juegan alternadamente con las siguientes reglas:

(a) En cada turno, el jugador puede tomar 1, 2, 3, 4 o 5 piedras de la bolsa.

(b) En cada turno, el jugador tiene prohibido tomar la misma cantidad de piedras que el otro jugador tomó en el turno anterior, es decir, en la última jugada.

El perdedor es aquel jugador que no puede hacer un movimiento válido en su turno. Si Alison es la primera en jugar, determine cuál jugador tiene una estrategia ganadora e especifique dicha estrategia.

35. Bryan y Keylor tienen tres torres de monedas: una con 10 monedas, otra con 15 y otra con 20. En cada turno, empezando por Bryan, un jugador elige una torre y la divide en dos torres más pequeñas (cada una de las dos con al menos una moneda). El perdedor es el jugador que no puede hacer eso. ¿Quién puede asegurarse la victoria y cómo?

36. Dos jugadores, Amaury y Brad, juegan por turnos el siguiente juego: Se tiene un montón de 2003 piedras. En su primer turno, Amaury escoge un divisor de 2003, y retira ese número de piedras del montón inicial. Posteriormente, Brad escoge un divisor del número de piedras restantes, y retira ese número de piedras del nuevo montón, y siguen así sucesivamente. Pierde el jugador que retire la última piedra. Demostrar que uno de los dos jugadores tiene una estrategia ganadora y describir dicha estrategia. *(OMCC, 2003)*

37. Angie y Moisés tienen el número 1 escrito en una pizarra, y juegan el siguiente juego, iniciando por Angie: en cada turno, un jugador puede multiplicar el número actual por cualquier entero desde el 2 hasta el 9, y reemplazar el número escrito en la pizarra por el nuevo resultado. El jugador que llegue a un número mayor que 1000 gana. Determinar quién posee una estrategia ganadora y detalle dicha estrategia.

38. Se tiene una caja que contiene 1024 tarjetas. En cada tarjeta está escrito un conjunto de dígitos decimales de tal forma que todos los conjuntos son diferentes (en particular, una de las tarjetas está vacía). Dos jugadores, de forma alternada, retiran tarjetas de la caja (una tarjeta en cada turno). Después de que la caja está vacía, cada jugador revisa si puede retirar una de sus tarjetas tal que cada uno de los diez dígitos aparezca un número par de veces entre las tarjetas que le quedan a ese jugador. Si un jugador puede hacer esto pero el otro no puede, el que sí puede es el ganador, de otra manera se declara un empate.
Determine todas las primeras jugadas que puede realizar el primer jugador para que él tenga estrategia ganadora.

39. Hay tres bolsas, cada una con 10 monedas. Amanda y Bill, por turnos quitan tantas monedas como quieran de alguna de las bolsas. Pierde quien ya no pueda hacer una movida. Determine una estrategia ganadora para alguno de los dos jugadores.

40. Se escribe una fila de doce 3's en una pizarra. En cada turno un jugador puede colocar un signo "+" o un signo "×" entre dos números adyacentes, siempre y cuando no exista ya un signo entre ellos. Eventualmente todos los espacios se llenan con esos signos. La expresión resultante se evalúa para obtener un número. Si es par, gana el primer jugador; si es impar, gana el segundo. ¿Quién puede asegurarse la victoria y cuál es la estrategia ganadora para ese jugador?

41. Dado un entero positivo $n$, todos sus divisores positivos son escritos en una pizarra. Dos jugadores Daniel y Santiago juegan el siguiente juego:

En cada turno, cada jugador colorea uno de los divisores de $n$, ya sea de rojo o de azul. Ellos eligen el color que deseen, pero no pueden colorear números que hayan sido coloreados antes. El juego termina cuando todos los números han sido coloreados. Daniel gana si el producto de todos los números rojos es un cuadrado perfecto, o si no hay números coloreados de rojo, Santiago gana en cualquier otro caso. Si Daniel inicia, determine quién tiene la estrategia ganadora para cada $n$. *(OIM, 2017)*

42. Empiece con $n = 2$. Dos jugadores toman turnos sumándole un divisor propio de $n$ al $n$ actual. Gana el que escriba un número mayor o igual a 1990. ¿Qué jugador tiene estrategia ganadora?

43. Dos jugadores llamados Azul y Rojo juegan por turnos en un tablero de $10 \times 10$. Azul tiene una lata de pintura azul y Rojo una de pintura roja. Comenzando por Azul, cada jugador en su turno elige una fila o columna del tablero que no haya sido escogida anteriormente por ninguno de los dos y pinta sus 10 casillas con su propio color. Si alguna(s) de esas casillas ya estuviese pintada, el nuevo color cubre al anterior.

Luego de 20 turnos, al agotarse las filas y columnas disponibles, el juego finaliza. Entonces se cuenta la cantidad de casillas de cada color y se determina el ganador de acuerdo a la siguiente regla:

- Si la cantidad de casillas rojas supera en diez o más a la cantidad de casillas azules, entonces gana Rojo. De lo contrario gana Azul.

Determine si alguno de los dos jugadores tiene una estrategia ganadora y explique cuál es la estrategia. *(OMCC, 2005)*

44. Considere el juego de *Ajedrez doble*, donde se juega con el tablero y las piezas del Ajedrez convencional, pero cada jugador hace 2 movimientos en cada turno. Suponga que el segundo jugador tiene estrategia ganadora. Muestre que el primer jugador puede robar esta estrategia. Concluya que el segundo jugador no puede tener estrategia ganadora en el *ajedrez doble*. *(Problema Clásico)*

45. Un juego solitario. Suponga que a cada lado de un 2021-*ágono* regular se le asigna un número entre $+1$ y $-1$. Demuestre que existe un vértice tal que el producto de todos los números asignados a cada lado que contiene a ese vértice, es $+1$.

46. En un tablero de $1 \times n$ se encuentran escritos los números del 1 al $n$, no necesariamente en orden, donde $n$ es un entero positivo. Dos jugadores, Alitos y Jeje, juegan alternadamente iniciando por Alitos. Una jugada consiste en tomar una casilla y pintarla de rosado o celeste. Una casilla pintada no puede volver a ser coloreada. Cuando se pinta todo el tablero, se toman las casillas coloreadas con celeste y se suman los números en ellos. Si el número resultante es divisible entre 3, gana Jeje. De lo contrario, gana Alitos. Para cada posible valor de $n$, determine una estrategia ganadora para alguno de los dos jugadores.

47. Se tiene una cuadrícula de $5 \times 5$. Marianne y Nancy juegan bajo las siguientes reglas: La jugadora que empieza coloca una ficha en cualquiera de las casillas de la fila de arriba. La otra jugadora mueve la ficha una casilla a la derecha, a la izquierda o abajo (nunca en diagonal) de la casilla donde estaba al iniciar su turno. A continuación, la primer jugadora hace lo mismo y siguen jugando por turnos. La ficha no puede pasar por la misma casilla dos veces durante el juego. Gana la jugadora que lleve la ficha a la última fila (la de abajo), y empieza Marianne. ¿Quién tiene la estrategia ganadora y cuál es?

48. Un jugador coloca una ficha en una casilla de un tablero $m \times n$ dividido en casillas de tamaño $1 \times 1$. El jugador mueve la ficha de acuerdo a las siguientes reglas:

- En cada movimiento, el jugador cambia la ficha de la casilla en que ésta se encuentra a una de las casillas que tienen un lado en común con ella.
- El jugador no puede ubicar la ficha en una casilla que ésta ha ocupado previamente.
- Dos movimientos consecutivos no pueden tener la misma dirección.

El juego termina cuando el jugador no puede mover la ficha. Determine todos los valores de $m$ y $n$ para los cuales el jugador puede colocar la ficha en alguna casilla tal que ésta llegue a ocupar todas las casillas al terminar el juego.

49. Hay 1001 bolinchas en una mesa. Una jugada consisten en tomar $p^n$ bolinchas de la mesa, donde $p$ es cualquier número primo y $n$ puede ser cualquier entero mayor o igual a cero. Se juega entre dos personas (Fidel y Jaime), empezando por Fidel. El jugador que toma la última bolincha gana. ¿Quién tiene una estrategia ganadora y cuál es?

50. El número 2 está escrito en una pizarra. Ana y Bruno juegan alternadamente, iniciando por Ana. Cada uno, en su turno, sustituye el número escrito en la pizarra por el número que se obtiene al aplicar exactamente una de las siguientes operaciones: multiplicar el número por 2, multiplicar el número por 3 o sumar 1 al número. El primer jugador en escribir un número mayor o igual a 2011 gana el juego. Determine cuál jugador tiene una estrategia ganadora y descríbala. *(OIM, 2011)*

51. De una baraja de cartas convencional, se toman todas las cartas *As*, 2, 3, 4, 5 y 6 de cada palo. Estas 24 cartas se colocan boca arriba en una mesa. Edwin y Marcela por turnos, iniciando por Edwin, voltean una carta que esté boca arriba, y cada vez que pasa esto se considera la suma de las cartas volteadas (el *As* cuenta como 1). El jugador que obtenga una suma mayor a 31 pierde.

52. En una pizarra se encuentra escrito un número formado por 12061 números 1. Lulú y Xánder juegan por turnos a borrar un 1 y cambiarlo por un 0. El juego termina cuando la cantidad de 0's sea mayor a la cantidad de 1's. Gana Lulú si el número restante es múltiplo de 7; de lo contrario, gana Xánder. Si comienza Lulú, ¿quién puede asegurarse la victoria y cuál es la estrategia ganadora?

53. Sea $n$ un entero positivo. Abril y Candace realizan un juego en el que alternan turnos, y en cada turno una jugadora escoge un entero positivo $k \leq n$. Las reglas del juego son:

(i) Una jugadora no puede escoger un número que haya sido escogido por alguna de las jugadoras en un turno anterior.

(ii) Una jugadora no puede escoger un número adyacente a alguno de los números que esa misma jugadora haya escogido en un turno anterior.

(iii) El juego es un empate si todos los números han sido escogidos; de otra forma, la jugadora que no puede escoger un número en su turno pierde el juego.

Abril realiza el primer turno. Determine el resultado del juego, asumiendo que las dos jugadoras usan estrategias óptimas.
**Aclaración:** Un número entero $a$ es adyacente de $b$ si $|a - b| = 1$.

54. Dos jugadores, Phineas y Ferb toman turnos poniendo banderas alrededor de una circunferencia. Phineas tiene $n$ banderas rojas y Ferb tiene $n$ banderas verdes. No se puede poner una bandera encima de otra. Una vez colocadas las $2n$ banderas se reparte el área del círculo delimitado por la circunferencia de la siguiente manera:

- Si la bandera más cercana a un punto es de color rojo, el punto es de Phineas.
- Si por el contrario la bandera más cercana es verde el punto es de Ferb.
- Si la bandera roja más próxima a un punto se encuentra a la misma distancia del punto que la bandera verde más próxima, entonces el punto es neutro. No es de Phineas ni de Ferb.

Gana el jugador que al finalizar el juego, se queda con una mayor área del círculo. Describa una estrategia ganadora para uno de los jugadores, si Phineas coloca la bandera inicial. *(OIM, 2007)*

55. Susana y Brenda juegan a escribir polinomios, tomando turnos iniciando por Susana.

- En el turno de preparación (turno 0), Susana elige un entero positivo $n_0$ y escribe el polinomio $P_0(x) = n_0$.
- Luego, en el turno 1, Brenda elige un entero positivo $n_1$ distinto de $n_0$ y escribe uno de los dos polinomios
$$P_1(x) = n_1 x - P_0(x) \text{ o bien } P_1(x) = n_1 x + P_0(x)$$
- En general, en el turno $k$ la jugadora correspondiente elige un entero positivo $n_k$ distinto de $n_0, n_1, \ldots, n_{k-1}$ y escribe uno de los dos polinomios
$$P_k(x) = n_k x^k - P_{k-1}(x) \text{ o bien } P_k(x) = n_k x^k + P_{k-1}(x)$$

Gana quien escriba un polinomio que tenga por lo menos una raíz entera. Determine qué jugadora tiene una estrategia ganadora y describa dicha estrategia. *(OMCC, 2017)*

56. Aura y Catalina juegan el siguiente juego. Primero, Aura escoge un real $a$ distinto de cero. Luego Catalina escoge un real $b$ distinto de cero. Luego Aura escoge un real $c$ distinto de cero. Por último, Catalina escoge un polinomio cuadrático $p(x)$ con coeficientes $a, b, c$ en algún orden.

(a) Suponga que Catalina gana si $p(x)$ tiene una raíz real y Aura gana en caso contrario. Determine cuál jugador posee una estrategia ganadora.

(b) Suponga que Aura gana si $p(x)$ posee una raíz real y Catalina gana en caso contrario. Determine cuál jugador posee una estrategia ganadora. *(Clasificatorio IMC, 2019)*

57. Se tiene un chocolate cuadriculado de $n \times m$ y la esquina inferior derecha está envenenada. Leo y Ernesto juegan a elegir una casilla y comérsela, así como todas las que están arriba y a su izquierda. Esto se repite alternadamente, iniciando por Leo, hasta que el chocolate se acaba. ¿Quién puede asegurarse no comer la casilla envenenada? *(Problema Clásico)*

58. Los enteros positivos del 1 al 2020 están escritos en una pizarra. Patrick y Teresa juegan alternadamente, empezando por Patrick, con la siguiente regla: en cada turno, el jugador correspondiente elige un número $n$ escrito en la pizarra, borra a $n$ y a todos los divisores de $n$ que aún estén escritos en la pizarra. Gana el jugador que borra el último número de la pizarra. ¿Quién tiene estrategia ganadora? *(Problema Clásico)*

59. En un lugar lejano del Universo, un villano tiene una medalla con poderes especiales y quiere esconderla para que nadie más la pueda usar. Para esto, el villano la esconde en un vértice de un polígono regular de 2019 lados. Olcomae, el salvador del pueblo Olcomita, quiere conseguir la medalla para restablecer la paz en el Universo, para lo cual tiene que pagar 1000 olcolones por cada vez que realiza la siguiente jugada: en cada turno elige un vértice del polígono, el cual se torna verde si la medalla está en él o en alguno de los cuatro vértices más cercanos a él, o rojo en caso contrario. Encuentre la menor cantidad de olcolones que Olcomae necesita pedirle a Olcomaricela, para determinar con certeza la posición de la medalla y salvar al pueblo Olcomita. *(Final OLCOMA Nivel III, 2019)*

60. Jimmy y Mike juegan alternadamente, iniciando por Jimmy, a marcar puntos distintos en el plano, de modo que hay a lo sumo 2019 puntos colineales marcados. Tras cada jugada, si los puntos marcados son $P_1, P_2, \ldots, P_n$, entonces todo punto $P_k \in \{P_1, P_2, \ldots, P_n\}$ debe estar en el interior de a lo sumo dos triángulos de la forma $\triangle P_a P_b P_c$ cuyos vértices son tres puntos no colineales del conjunto $\{P_1, P_2, \ldots, P_n\}$. Pierde el jugador que no pueda marcar más puntos. Determine quién tiene la estrategia ganadora y detalle cuál es.
**Nota:** Si hay una recta que contiene a los puntos $P_a$,$P_b$ y $P_k$, pero no a $P_c$, entonces ninguno de los puntos $P_a$, $P_b$, $P_c$ y $P_k$ está en el interior del triángulo $\triangle P_a P_b P_c$. *(Clasificatorio EGMO, 2020)*

61. Dos jugadores toman turnos removiendo vértices de un grafo $G$ conexo. Excepto por el primer movimiento, un jugador solo puede remover un vértice si estaba conectado al vértice que el jugador anterior acaba de remover. Pierde el jugador que no pueda remover otro vértice. Muestre que el segundo jugador tiene estrategia ganadora si existe un conjunto $E$ de aristas tal que no hay 2 aristas en $E$ con vértices en común y cada vértice de $G$ es vértice de una arista en $E$.

62. El archipiélago *Barrantes-n* es un grupo de islas conectado por puentes de la siguiente manera: hay una isla principal (*Humberto*), en el primer paso coloco una isla debajo y una arriba de *Humberto*, y conecto estas 2 islas a *Humberto*. Pongo 2 islas a la izquierda de estas 2 nuevas islas y las conecto con un puente a la isla que tienen a su derecha. En el segundo paso tomo las 2 últimas islas y les aplico el mismo proceso que le aplique a *Humberto*. En el tercer paso le aplico el mismo proceso a las 4 nuevas islas. Repetimos este paso $n$ veces, y luego reflejamos el archipiélago que tenemos sobre una recta vertical ubicada a la derecha de *Humberto*. Conectamos a *Humberto* con su reflejo y así nos queda, por fin, el archipiélago *Barrantes-n*. Sin embargo, el archipiélago *Barrantes-n* existe en *Germarte*, un pequeño planeta cilíndrico, de manera que las islas que quedan a la izquierda del archipiélago son de hecho las islas que están conectadas a las islas de la derecha del archipiélago.

Cierto día dos piratas, *Barba Naranja* y *Chonete de Paja* llegan al archipiélago *Barrantes-n*. *Barba Naranja* le propone un juego a *Chonete de Paja*: El primer jugador conquista una isla, el siguiente jugador debe conquistar una isla conectada a la isla que fue conquistada en el turno anterior (claramente que no haya sido conquistada en un turno anterior). Pierde el que en su turno no pueda conquistar ninguna isla. *Chonete de Paja* decide cederle el primer turno a *Barba Naranja*. Pruebe que *Chonete de Paja* tiene una estrategia ganadora para todo $n$. *(Final OLCOMA Nivel C2, 2011)*

63. Ale y Caro juegan con $N \geq 2012$ monedas y 2012 cajas distribuidas alrededor de una circunferencia. Al inicio Ale distribuye las monedas en las cajas de tal forma que haya al menos 1 moneda en cada caja. Luego ellos realizan sus jugadas alternadamente iniciando por Caro, de acuerdo a las siguientes reglas:

- Caro en su jugada pasa una moneda de cada caja a una caja adyacente.
- Ale en su jugada escoge algunas monedas que no estuvieron involucradas en la jugada anterior (realizada por Caro) y que están en cajas diferentes. Luego Ale pasa cada moneda escogida a una caja adyacente.

El objetivo de Ale es asegurar que haya al menos 1 moneda en cada caja después de cualquier jugada suya, sin importar cómo juega Caro y cuántas jugadas hubo en total. Halle el menor $N$ para el cual Ale puede lograr su objetivo.

64. Se tiene un tablero de $5 \times 5$ coloreado como ajedrez, con las esquinas negras. En cada casilla negra, hay una ficha negra y en cada blanca, una ficha blanca. Las fichas se pueden mover a casillas vecinas (si comparten lado). Alex y Yolanda van a jugar alternadamente de la siguiente manera: primero Alex escoge una ficha negra y la quita del tablero. Después, Alex mueve una ficha blanca al espacio vacío. Luego, Yolanda mueve alguna ficha negra al espacio vacío. El juego continúa de esta manera hasta que alguno no puede hacer una movida, el cual pierde en ese momento. ¿Quién tiene la estrategia ganadora y cuál es?

65. Andrés y Bambi juegan de Tres en Línea (conocido como Gato), comenzando por Andrés. Demuestre que si el segundo jugador, en este caso Bambi, tiene una estrategia ganadora, entonces el primero (Andrés) puede robarla. Concluya que el segundo jugador no puede tener estrategia ganadora. *(Problema Clásico)*

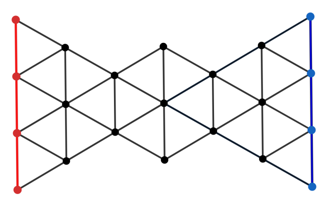
66. Un *lugar* es un punto $(x, y)$ en el plano tal que $x$, $y$ son ambos enteros positivos menores o iguales que 20. Al comienzo, cada uno de los 400 lugares está vacío. Ana y Beto colocan piedras alternadamente, comenzando con Ana.

En su turno, Ana coloca una nueva piedra roja en un lugar vacío tal que la distancia entre cualesquiera dos lugares ocupados por piedras rojas es distinto de $\sqrt{5}$. En su turno, Beto coloca una nueva piedra azul en cualquier lugar vacío. (Un lugar ocupado por una piedra azul puede estar a cualquier distancia de cualquier otro lugar ocupado). Ellos paran cuando alguno de los dos no pueda colocar una piedra. Hallar el mayor $K$ tal que Ana pueda asegurarse de colocar al menos $K$ piedras rojas, sin importar cómo Beto coloque sus piedras azules.

67. Juan y Luis juegan pintando de negro en el tablero en blanco que se muestra en la figura. Empieza Juan y luego pintan alternadamente una casilla a la vez, como se detalla a continuación.

(a) En su turno inicial, Juan pinta de negro una de las casillas del tablero.
(b) Luego, Luis pinta de negro una de las casillas en blanco.
(c) En los turnos siguientes, cada jugador pinta de negro una casilla en blanco que comparta un lado con alguna de las últimas dos casillas negras pintadas.

Pierde el primer jugador que no pueda pintar una casilla. Determine quién tiene la estrategia ganadora y describa la estrategia. *(Clasificatorio OMCC, 2020)*



68. German tiene un tablero en forma de triángulo equilátero, cuyos lados miden 2019, dividido totalmente en triangulitos unitarios. Cada triángulo unitario está encendido o apagado, e inicialmente cualesquiera dos triángulos adyacentes están en distinto estado (como un tablero de ajedrez). Se quiere llegar a tener todo el tablero encendido o apagado, para lo que se cuentan con los siguientes movimientos:

(A) En hexágonos de 6 triangulitos unitarios que comparten un vértice, puede hacer lo siguiente:
- Si hay 3 en cada estado, entonces 5 quedan en un mismo estado (cualquiera de los dos estados) y el otro en estado distinto.
- Si hay 4 en distinto estado a los otros 2, entonces todos quedan en un mismo estado.
- Si hay 5 en el mismo estado, entonces 5 quedan en un mismo estado y el otro en estado distinto.
- Si todos están en el mismo estado, entonces 4 quedan en un mismo estado y 2 en estado distinto.

(B) Puede intercambiar el estado de 2 triángulos unitarios adyacentes.

Explique cómo puede llegar German a encender o apagar todo el tablero. ¿Puede lograr esto sin utilizar movimientos del tipo (B)? *(Final OLCOMA Nivel C2, 2019)*