Geometría Analítica

Eduardo Salas Jiménez

Material en construcción

1. El Plano Cartesiano

A la hora de trabajar en problemas de geometría olímpica, es lo más común trabajar sobre el plano en el cual se encuentran objetos elementales llamados puntos, y con base a estos se forman figuras como líneas, segmentos, circunferencias, entre otros. Allí resultan de gran utilidad herramientas de geometría euclidiana convencional, aunque en algunas ocasiones esto es complicado. Por esto, es conveniente en algunos casos introducir un sistema de coordenadas al plano para lograr una interpretación más algebráica de los problemas y con esto llegar a conclusiones rápidas y seguras.

Cuando se introduce un sistema de coordenadas, este consta de dos Ejes perpendiculares entre sí, llamados X y Y. Cada uno es una recta numérica y se intersecan en el punto en que ambas toman el valor de 0. Con esto puede resultar fácil "nombrar.ª los puntos, es decir, darles una posicoón en el plano, lo cuál ayuda para obtener información precisa y matar el problema. Este espacio se conoce como $\mathbb{R}^2$, pues este posee dos dimensiones.

1.1. Eje X y Eje Y

Como se mencionó anteriormente, el sistema de coordenadas en el plano cartesiano está basado en dos ejes, llamados Eje X y Eje Y. Con esto se da la posición precisa de los puntos en el plano, donde las coordenadas de los puntos en el Eje X son nombradas abcisas, coordenada en X o componente en X, mientras que a las coordenadas de los puntos en el Eje Y se les conoce como ordenadas, coordenada en Y o componente en Y.

1.2. Puntos y vectores

El plano, como ya vimos, está compuesto por puntos. Al tener un sistema de coordenadas integrado en el plano, asignamos coordenadas a los puntos. Si al trazar una línea perpendicular al Eje X y al Eje Y desde el punto A, estas cortan a las rectas en los valores a y b respectivamente, al punto A le asignamos el par ordenado (a, b). Se suele utilizar la notación $A(a, b)$ para indicar que el punto A tiene coordenadas (a, b). Al punto $(0, 0)$ se le llama origen.

Un vector es muy similar a un punto, la diferencia es que el vector $\overrightarrow{A}(a, b)$ es la flecha que sale del origen con dirección hacia el punto $A(a, b)$. Así que, básicamente la diferencia es que el punto solamente representa a un elemento del espacio en el cual trabajamos (el plano), mientras que el vector es, como ya se dijo, una flecha que posee una dirección y magnitud dada. Generalmente se nombran a los puntos y vectores con letras mayúsculas, aunque vamos a encontrar en algunos casos vectores con letras minúsculas, como por ejemplo $\overrightarrow{v}$.

1.3. Vector vs. Escalar

Diferenciar entre vectores y escalares es importante para interpretar resultados y poder diferenciar los objetos que estamos utilizando. Un escalar es un elemento real, es decir, $\lambda \in \mathbb{R}$, mientras que los vectores y puntos son elementos del plano, es decir, $\mathrm{P} \in \mathbb{R}^2$.

1.4. Magnitud o norma de un vector

Al tener un vector en el plano $A(a, b)$ se define la magnitud o norma de dicho vector, como la longitud de la flecha que parte del origen y llega al punto A, es decir, la longitud de este vector. Esto se denota como $||A||$ y es fácil ver, por el Teorema de Pitágoras, lo siguiente:

$$||A|| = \sqrt{a^2 + b^2}$$

Cuando la norma de un vector es 1, es decir, $||A|| = 1$, se dice que el vector es un vector unitario. En algunos casos conviene tener un vector unitario, así que si tenemos un vector $\overrightarrow{v}$, y consideramos el nuevo vector $\frac{\overrightarrow{v}}{||\overrightarrow{v}||}$, este tendrá magnitud 1, pues al calcular la norma de un vector, si hay un escalar multiplicando (o dividiendo), este puede salir de la norma, entonces la norma de este nuevo vector es $\frac{||\overrightarrow{v}||}{||\overrightarrow{v}||} = 1$,y se puede notar que la dirección es la misma. En la siguiente se detallará cómo funciona el producto de vectores por escalares.

2. Operaciones con vectores

Al igual que con los números reales, existen algunas operaciones que podemos realizar con los vectores, las cuales son primordiales para poder trabajar en geometría analítica y en los siguientes puntos de este documento.

2.1. Suma y resta de vectores

Sean $A(x_1, y_1)$ y $B(x_2, y_2)$ dos vectores en el plano. Entonces, se define la suma y resta de vectores de la siguiente manera:

(i) Suma de vectores: $A(x_1, y_1) + B(x_2, y_2) = X(x_1 + x_2, y_1 + y_2)$

(ii) Diferencia de vectores: $A(x_1, y_1) - B(x_2, y_2) = Y(x_1 - x_2, y_1 - y_2)$

Si tenemos un vector A y le sumamos el vector B, lo podemos interpretar como trasladar el punto A en la dirección dada por el vector B. Por otra parte, si tomamos la diferencia entre el vector A y B, esto es un nuevo vector que tiene la dirección de B a A.

2.2. Producto vector-escalar

Sea $\lambda \in \mathbb{R}$ y $A(x_1, y_1)$ un punto en el plano. Al tener el producto de λ con el vector A, esto tiene como resultado un vector, y lo que hace es aumentar o disminuir la magnitud del vector, pero este conserva la misma dirección. Este producto se realiza de la siguiente manera:

$$\lambda \cdot A(x_1, y_1) = A'(\lambda x_1, \lambda y_1)$$

Si tenemos dos vectores A y B de manera que que existe un $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que $A = \lambda \cdot B$, se dice que A es múltiplo de B (o que B es múltiplo de A), y a esta pareja de vectores A y B se les conoce como linealmente dependientes. En caso de que no exista dicho λ, se les conoce como linealmente independientes.

2.3. Producto punto

En el plano cartesiano, para multiplicar dos elementos (puntos), existe una operación llamada producto punto, que se denota por un punto $(\cdot)$. De esta manera, si $\overrightarrow{v}(x_1, y_1)$ y $\overrightarrow{w}(x_2, y_2)$ son dos puntos en el plano, entonces:

$$\overrightarrow{v}(x_1, y_1) \cdot \overrightarrow{w}(x_2, y_2) = x_1 \cdot x_2 + y_1 \cdot y_2$$

Como se puede notar, en este caso, el producto punto da como resultado un escalar, ya que las coordenadas de los puntos son números reales y el resultado es una suma de productos convencionales de números reales. Otro dato importante es la relación entre el producto punto y la norma de un vector, pues como se logró ver en 1.4. y en esta sección, se cumple que para cualquier vector A:

$$||A||^2 = A \cdot A$$

3. Puntos medios

Un elemento importante y que usualmente encontramos en problemas de geometría es el de los puntos medios. Si tenemos una recta numérica y dos números reales, el valor que se encuentra en medio de ellos es el promedio de ambos números. Al tener un sistema de coordenadas, con dos puntos $A(x_1, y_1)$ y $B(x_2, y_2)$, el punto medio de ambos, que llamaremos M, debe tener coordenadas que correspondan al promedio de las coordenadas de A y B en cada uno de los ejes, respectivamente. Por esto, vemos la ecuación del punto medio:

$$\frac{A(x_1, y_1) + B(x_2, y_2)}{2} = M\left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}\right)$$

Cuando existen tres puntos A, B y M, donde M es el punto medio de los otros dos, pero solamente conocemos las coordenadas de A y M, para encontrar las coordenadas de B se despeja como si fuera una ecuación lineal en los reales, tal y como se muestra a continuación:

$$\frac{A + B}{2} = M$$

$$A + B = 2M$$

$$B = 2M - A$$

4. Ecuación de la recta

En la geometría es sumamente usual que aparezcan rectas y segmentos de recta. Por esto es muy importante cómo modelar las rectas en geometría analítica, para esto mostraremos a continuación dos formas en las que se puede representar una recta en el plano cartesiano, así como la forma de encontrar las ecuaciones de algunas rectas que son muy relevantes en geometría.

4.1. Ecuación de la recta: $y = mx + b$

Sean $A(x_1, y_1)$ y $B(x_2, y_2)$ dos puntos en el plano (con $x_1 \neq x_2$ y $y_1 \neq y_2$). La recta que pasa por los puntos A y B, es decir, la recta AB debe cumplir que el cambio de los puntos en el Eje X y en el Eje Y es proporcional. Los pares ordenados que componen a la recta son puntos de la forma $X(x, y)$ que cumplen la ecuación $y = mx + b$. El valor de m es conocido como la pendiente de la recta y corresponde a la inclinación o dirección que toma. El valor de b es el corte de la recta con el Eje Y.

Para calcular la ecuación de la recta que pasa por A y B resolvemos un sistema de ecuaciones con variables m y b, con las siguientes dos ecuaciones:

$$(i) \qquad y_1 = mx_1 + b$$

$$(ii) \qquad y_2 = mx_2 + b$$

Restando (ii) y (i) obtenemos que $y_2 - y_1 = m(x_2 - x_1)$, y despejando obtenemos que:

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

Una vez que conocemos el valor de la pendiente, lo único que hace falta es sustituir las variables x y y en la ecuación por las coordenadas de A o de B, para despejar b, que es:

$$b = y_1 - mx_1 = y_2 - mx_2$$

4.1.1. Rectas perpendiculares a los ejes

Anteriormente vimos la ecuación de rectas con los valores en cada entrada distintos. Sin embargo, existen las rectas entre puntos $A(x_1, y_1)$ y $B(x_1, y_2)$ con $y_1 \neq y_2$ (perpendicular al Eje X) y puntos de la forma $C(x_1, y_1)$ y $D(x_2, y_1)$ donde $x_1 \neq x_2$ (perpendicular al Eje Y). El el caso donde la recta $\overleftrightarrow{AB}$ es perpendicular al Eje X, la ecuación de esta recta viene dada por $x = x_1$, ya que todos los puntos en la recta son aquellos que tengan a x_1 como su componente en X. Similarmente, para la recta $\overleftrightarrow{CD}$ perpendicular al Eje Y, sucede que todos los puntos en la recta tienen componente en

Y constante, así que la recta se modela con la ecuación $y = y_1$.

4.2. Ecuación de la recta: $X = P + \lambda \cdot \overrightarrow{v}$

Existe otra forma de ver los puntos de una recta, la cual es menos usual de encontrar aunque en algunos casos es útil. Cuando tenemos una línea l que pasa por el punto $P(x_1, y_1)$ en una dirección dada, es equivalente a sumar múltiplos de un vector, de manera que si $\overrightarrow{v}(v_1, v_2)$ es el es el vector director de la línea, esta se modela bajo la ecuación:

$$l : \{X = P + \lambda \cdot \overrightarrow{v} : \lambda \in \mathbb{R}\}$$

Si conocemos dos puntos por los que pasa la línea, pero no su vector director, se puede ver que el vector que dirige a esta línea, o uno de estos, es $Q - P$. Por esto, la recta la podríamos tomar como:

$$l : \{X = P + \lambda \cdot (Q - P) = (1 - \lambda)P + \lambda Q : \lambda \in \mathbb{R}\}$$

4.3. Cambio de forma de la ecuación de la recta

En ocaciones podríamos tener alguna de las formas de la ecuación vistas en 4.1. y en 4.2. así que es importante saber como cambiar de una de estas formas a la otra, que modele la misma recta. Estos cambios, en las dos direcciones posibles, se explican a continuación.

4.3.1. $y = mx + b$ a $X = P + \lambda \cdot \overrightarrow{v}$

Si tenemos una recta l de la forma $y = mx + b$, nótese que el vector $\overrightarrow{v}(1, m)$ tiene pendiente m. Por esto, un vector paralelo a l va a ser $\overrightarrow{v}$, entonces este podemos tomarlo como el vector director de l. Además, entre otros puntos que podríamos considerar de la recta que yá conocemos su ecuación, puede resultar conveniente su intersección con el Eje Y, la cual corresponde al punto $P(0, b)$, con lo que ya conocemos un punto en l y su vector director, y cambimos la ecuación de la recta a la forma $X = P + \lambda \cdot \overrightarrow{v}$.

4.3.2. $X = P + \lambda \cdot \overrightarrow{v}$ a $y = mx + b$

Por otra parte, si conocemos la ecuación de la recta l como $X = P + \lambda \cdot \overrightarrow{v}$, es posible ver que el vector director $\overrightarrow{v}(v_1, v_2)$ tiene una pendiente $m = \frac{v_2}{v_1}$. Esto se nota pues la recta que pasa por el origen y por $\overrightarrow{v}$ es paralela a l (o es l), y la pendiente de esta es la que vimos anteriormente. Seguido de esto, ya conocemos la pendiente de la recta yun punto $P(x_1, x_2)$ por donde pasa la recta. Así vemos que $b = x_2 + \frac{v_2}{v_1} \cdot x_1$.

4.4. Rectas paralelas

Cuando dos rectas l y m son paralelas es porque poseen la misma dirección. Esto se puede interpretar como que su vector director sea el mismo, o que su pendiente sea igual. Por esto, si la pendiente de la recta l es m, y buscamos la recta paralela que pasa por un punto $P(x_1, y_1)$, entonces sabemos que se debe cumplir la ecuación $y_1 = mx_1 + b$ y de aquí se puede despejar el corte con el Eje Y de dicha recta para conseguir la ecuación completa. En el caso de la ecuación vista en 4.2. es más sencillo, pues la recta paralela va a tener el mismo vector director (llámese $\overrightarrow{v}$, que en 4.3. vimos que puede considerarse $(1, m)$), y conociendo un punto P que pertenezca a la recta buscada, la ecuación sería $X = P + \lambda \cdot \overrightarrow{v}$.

4.5. Rectas perpendiculares

Cuando tenemos dos rectas perpendiculares, se puede tener alguna relación entre las pendientes de ambas líneas. Para ver esto, lo haremos trabajando con vectores directores de las líneas l y m, los cuales serán $\overrightarrow{v}(v_1, v_2)$ y $\overrightarrow{N}(n_1, n_2)$ respectivamente. Sea O el origen, y P, Q los pies de las perpendiculares sobre el Eje X desde $\overrightarrow{v}$ y $\overrightarrow{N}$ respectivamente. Así, obtenemos dos triángulos congruentes, que son $\triangle OVP$ y $\triangle NOQ$, pues es fácil ver que comparten los mismos ángulos, además de ser de vectores de norma 1, por lo que también comparten su hipotenusa, que mide 1.

Con lo anterior, se puede ver que $\overline{OP} = \overline{NQ}$ y $\overline{VP} = \overline{OQ}$. Además, nótese que $|v_1| = \overline{OP}$, $|v_2| = \overline{VP}$, $|n_1| = \overline{OQ}$ y $|n_2| = \overline{NQ}$. Combinando los dos grupos de ecuaciones anteriores se puede ver que $|v_1| = |n_2|$ y $|v_2| = |n_1|$. Las dos posibilidades para los signos de las componentes de los vectores dados son cuando $v_1 = -n_2$ y $v_2 = n_1$, o cuando $v_1 = n_2$ y $v_2 = -n_1$. Las otras dos opciones, cuando $v_1 = n_2$ y $v_2 = n_1$ o $v_1 = -n_2$ y $v_2 = -n_1$ se descartan, pues $\overrightarrow{v}$ y $\overrightarrow{N}$ serían linealmente dependientes, así que no son perpendiculares.

Ahora sabemos que los vectores perpendiculares se generan al cambiar el orden de las entradas (coordenadas) y cambiar el signo a exactamente una de estas. Por eso, al tener $\overrightarrow{v}(v_1, v_2)$ y un vector unitario normal a este, sin perder generalidad $\overrightarrow{N}(-v_2, v_1)$, las pendientes de l y de m van a ser $m_1 = \frac{v_2}{v_1}$ y $m_2 = -\frac{v_1}{v_2}$ respectivamente, así que $m_1 \cdot m_2 = -1$. Además nótese que $\overrightarrow{v} \cdot \overrightarrow{N} = -v_1 \cdot v_2 + v_2 \cdot v$. Con base en lo anterior podemos dar el siguiente resultado:

Sean l y m dos rectas con pendientes m_1 y m_2 respectivamente, y sus vectores directores $\overrightarrow{v}$ y $\overrightarrow{N}$ respectivamente. Entonces $l \perp m$ sii $m_1 \cdot m_2 = -1$ sii $\overrightarrow{v} \cdot \overrightarrow{N} = 0$.

Al tener el resultado anterior, es fácil encontrar una recta perpendicular a otra, dado un punto de esta nueva recta. Esto se logra ya que al conocer la recta original, digamos l, podemos encontrar un vector normal o perpendicular a esta, y así también la pendiente de una recta perpendicular a esta. Conociendo esto y un punto sobre la recta perpendicular a l que buscamos, se puede conocer esta nueva ecuación con el mismo método utilizado en 4.4.

4.6. Rectas tangentes a círculos

Sabemos que una recta tangente en un punto $T(x_1, y_1)$ a un círculo de centro $O(x_2, y_2)$, es la recta que pasa por T perpendicular a $\overline{OT}$, por lo que se aplica como se vio en (4.5.).

4.7. Intersección de dos rectas

Cuando tenemos dos rectas dadas $l : y = m_1 x + b_1$ y $m : y = m_2 x + b_2$ y queremos ver su intersección, entonces se debe encontrar el par ordenado (x_1, y_1) que cumple con las dos ecuaciones, por lo que se sigue que:

$$y_1 = m_1 x_1 + b_1 = m_2 x_1 + b_2$$

Así se puede despejar, como ya se ha visto, el valor de x_1 y luego de y_1, y así encontramos el punto de intersección de las dos rectas l y m. Los detalles se dejan al lector.

5. Distancias

Otro dato que es indispensable en la geometría es la distancia entre puntos o entre un punto con una recta. A continuación se detalla la información sobre estas distancias en el plano.

5.1. Distancia entre puntos

Si tenemos $A(x_1, y_1)$ y $B(x_2, y_2)$ puntos en el plano, la distancia de A a B, que es la misma de B a A, se denota por $d(A, B)$. A su vez, sabemos que el vector que manda el punto A a B es $B - A$, análogamente, el vector que envía el punto B a A es $A - B$. Por lo anterior, se puede ver que la norma de $B - A$ (al igual que $A - B$), representa la distancia que hay entre los puntos en cuestión. De esta manera se puede ver que la distancia entre A y B está dada por:

$$d(A, B) = d(B, A) = \|A - B\| = \|B - A\| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

5.2. Distancia entre un punto y una recta

La distancia de un punto $P(x_1, y_1)$ a una línea $l : y = mx + b$ se define como la menor distancia del punto P a un punto sobre l. Esta miníma distancia se da cuando el punto sobre la línea es el pie de la perpendicular desde P sobre l. Conociendo esta definición, es posible determinar esta distancia, a base de las contrucciones vistas en el punto 4. Esta distancia se denota por $d(P, l)$.

Para encontrar esta distancia, primeramente se debe calcular la recta perpendicular a l que pasa por P (4.4.), y posteriormente encontrar la intersección de esta recta con l, para encontrar el pie de la perpendicular desde P sobre l. Al hacer esto, encontramos un punto $F(x_2, y_2)$ que es el pie de la perpendicular y así se cumple que:

$$d(P, l) = d(P, F) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

6. Ecuación del círculo

Debemos recordar la definición de un círculo, que es el conjunto de todos los puntos que equidistan de un centro. Esto quiere decir que si tenemos un círculo con centro $C(x_1, y_1)$ y radio r, entonces se cumple que para todo punto $X(x, y)$ en la circunferencia, la distancia de X a C es r, y con la ecuación de distancia entre puntos obtebemos lo siguiente:

$$\sqrt{(x - x_1)^2 + (y - y_1)^2} = r$$

Esto es equivalente a la ecuación de la circunferencia que tradicionalmente utilizamos:

$$(x - x_1)^2 + (y - y_1)^2 = r^2$$

6.1. Intersección del círculo con rectas y círculos

Cuando se tiene la ecuación de un círculo $S : (x - x_1)^2 + (y - y_1)^2 = r^2$, y la de una recta $l : y = mx + b$, para encontrar los puntos de intersección, si es que poseen, se hace una sustitución de variables en la ecuación de S para despejar los puntos de intersección, esto al obtener una ecuación cuadrática en una sola variable. En el caso de tener un círculo $T : (x-x_2)^2+(y-y_2)^2 = s^2$, para encontrar los puntos de intersección se hace un procedimiento similar y se resuelve como un sistema de ecuaciones en dos variables, con dos ecuaciones. Los detalles de esto se dejan para el lector.

7. Rectas y puntos notables

Otros objetos que son muy comunes en geometría son las rectas y los puntos notables. Por esto es de gran importancia poder modelar analíticamente estos objetos para su utilización a la hora de resolver problemas con herramientas de geometría analítica. Las rectas notables son ya estudiadas en la geometría convencional y casi siempre aparecen en problemas de olimpiadas. Estas son las alturas, mediatrices, medianas y bisectrices.

Para efectos de esta sección, tomaremos el triángulo $\triangle ABC$ donde M es el punto medio de $\overline{BC}$ y F el pie de la perpendicular desde A sobre la línea $\overleftrightarrow{BC}$. No se demostrarán resultados como el hecho de que tres medianas concurres, pues estos se demuestran con geometría euclidiana, y en este documento se busca solo construir las ecuaciones que defines las rectas y los puntos notables para la solución de problemas con herramientas de geometría analítica.

7.1. Altura

La altura de un triángulo es la línea que pasa por uno de los vértices y corta perpendicularmente a la línea que contiene a los otros dos vértices. Vamos a considerar, sin pérdida de generalidad, la altura desde A sobre $\overleftrightarrow{BC}$, que como se definió, corta en F a esta línea. Conociendo los vértices del triángulo, la altura se determina como se hizo en 4.5. al calcular la ecuación de una recta perpendicular a $\overleftrightarrow{BC}$ que pasa por A. Para encontrar las coordenadas del punto F, se utiliza lo visto en 4.7. para calcular el punto de intersección entre $\overleftrightarrow{BC}$ y la altura por A.

7.1.1. Ortocentro

El ortocentro es el punto donde concurren las tres alturas de un triángulo, y generalmente se denota por la letra H. Para encontrar las coordenadas de H, se pueden buscar dos alturas del triángulo como lo vimos en 7.1. y calcular su punto de intersección, tal y como se hizo en 4.7.

7.2. Mediana

La mediana de un triángulo es la línea que pasa por un vértice y el punto medio correspondiente a este. En nuestro caso, $\overleftrightarrow{AM}$ es una mediana del triángulo $\triangle ABC$. Ya se vio en 3. cómo encontrar las coordenadas de M, así que la mediana $\overleftrightarrow{AM}$, así como las otras dos, se calculan como se hizo en 4.1. o en 4.2. para determinar la ecuación de la recta que pasa por dos puntos.

7.2.1. Centroide o baricentro

El centroide, baricentro, o centro de gravedad de un triángulo, es el punto de intersección de las tres medianas de un triángulo y por lo general se utiliza la letra G para nombrar a este punto. Es conveniente recordar que la distancia de G a cada vértice del triángulo corresponde al doble de la distancia de G al punto medio respectivo, por ejemplo y sin perder generalidad, se cumple que $\overline{AG} = 2\overline{GM}$.

Una forma de calcular las coordenadas de G sería encontrando dos de las medianas de $\triangle ABC$ como en 7.2. y posteriormente encontrar su punto de intersección como en 4.7. Sin embargo, existe una forma más sencilla y rápida, pues tras realizar este procedimiento con variables en las coordenadas de A, B y C, se llega a la conclusión de que:

$$G = \frac{A + B + C}{3}$$

7.3. Mediatriz

La mediatriz de un segmento, o de un lado de un triángulo, es el conjunto de puntos que equidistan de los extremos del segmento. Esta es la recta perpendicular al segmento que pasa por el punto medio. Si conocemos las coordenadas de B y de C, podemos encontrar el valor de las coordenadas de su punto medio M como en 3. Además, con estos datos se puede obtener el valor de la pendiente de la recta perpendicular a $\overleftrightarrow{BC}$ y luego es fácil obtener la ecuación de la mediatriz del lado $\overline{BC}$, esto como se vio en 4.5.

7.3.1. Circuncentro

El circuncentro de un triángulo es el punto de intersección de las tres mediatrices del triángulo, que además, por la definición de la mediatriz, es el punto que equidista de los tres vértices del triángulo, así que es el centro del círculo que pasa por A, B y C. Este punto se suele denotar por la letra O. Como se ha visto anteriormente, la forma de calcular las coordenadas de este punto es encontrando la ecuación de dos mediatrices como se hizo en 7.3. e intersecándolas como se vio en 4.7.

7.4. Bisectriz

La bisectriz de un ángulo es el conjunto de puntos cuya distancia a cada uno de los brazos del ángulo es la misma. En un triángulo, se suele hablar de bisectriz interna y externa, aunque la definición es la misma, solo que la bisectriz interna biseca al ángulo que comparte puntos con el interior del triángulo, mientras la externa es la que biseca al ángulo consecutivo del interno. La bisectriz interna y externa son perpendiculares.

Para encontrar la ecuación de la bisectriz de un ángulo es más difícil que encontrar las otras tres rectas notables vistas en esta sección, aunque es viable. En primer lugar, si el vértice del ángulo es el punto A, se debe considerar una circunferencia de centro en A y cuyo radio sea menor que las medidas de $\overline{AB}$ y de $\overline{AC}$.

Posteriormente, encontrar los puntos de intersección de este círculo con los segmentos $\overline{AB}$ y $\overline{AC}$, como se vio en 6.1., que llamaremos X y Y respectivamente. Luego, se deben encontrar las ecuaciones de las rectas perpendiculares a $\overleftrightarrow{AB}$ y $\overleftrightarrow{AC}$ que pasan por X y Y respectivamente, como se hizo en 4.5. e intersecar ambas rectas como en 4.7. Una vez encontrado este último punto, que llamaremos P, se debe encontrar la ecuación de la recta $\overleftrightarrow{AP}$, que corresponde a la bisectriz que buscamos.

7.4.1. Incentro

El incentro de un triángulo es el punto de intersección de las tres bisectrices. Este punto se suele llamar I, y se calculan sus coordenadas intersecando dos bisectrices como las vistas en 7.4., por medio del procedimiento utilizado en 4.7. El incentro es el centro de un círculo inscrito al triángulo, es decir, un círculo tangente a los tres lados del triángulo, y por esto se obtiene que la distancia de I a los tres lados del triángulo es la misma.

8. Transformaciones en el plano

En geometría muchas veces utilizamos transformaciones aplicadas en las figuras, que las modifican cambiando su forma, tamaño o posición. Ver cómo se pueden interpretar estas transformaciones en geometría analítica es muy importante, y esto lo podemos ver como funciones que envían puntos a puntos. A continuación detallaremos cómo se realizan en particular tres transformaciones, siendo la homotecia la menos común, mientras que las traslaciones y las reflexiones resultan muy útiles y usuales.

8.1. Traslación

Una traslación aplicada a un objeto o un punto, es mover o trasladar el punto o el objeto cierta distancia en una dirección dada. Esto puede verse como sumar un vector al punto o al conjunto de puntos que forman al objeto. Así que si tenemos un vector $\overrightarrow{v}$, y hacemos una traslación a un punto X con este vector, la imagen originada sería el punto $X' = X + \overrightarrow{v}$. Si son un conjunto de puntos, entonces se aplica lo anterior a todos los puntos de la figura trasladada.

8.2. Homotecias

Una homotecia es una transformación que modifica el tamaño de las figuras, pero no sus formas. Para realizar una homotecia es requerido de un centro de homotecia y una razón de homotecia. Lo que hace es que si el centro de homotecia es un punto O y la razón es un real k, al aplicar la homotecia a un punto X, su imagen está en la recta $\overleftrightarrow{OX}$ y la distancia de O a X' es $k \cdot X$. Si k es negativo, entonces se da el caso en el que O está entre X y X'. Si el centro de homotecia es $O(0,0)$, es fácil ver que al aplicar homotecia de razón k a un punto X, la imagen es el punto kX.

Cuando queremos hacer una homotecia de centro O distinto del origen y razón k, lo que se hace es trasladar el centro, y en general el plano, al origen, pues como se vio previamente, en el origen es más fácil realizar homotecias. Una vez aplicada la homotecia se vuelve a trasladar el origen a O y todo el resto del plano. Esto, como se vio en 8.1., nos da la siguiente fórmula para calcular la imagen al aplicar la homotecia ya mencionada a un punto X:

$$X' = k(X - O) + O$$

Esta fórmula se puede probar con la definición de la homotecia, pues el punto X' cumple con que:

$$X' - O = k(X - O)$$
$$\implies X' = k(X - O) + O$$

8.3. Reflexiones

Las reflexiones son transformaciones que requieren de una línea l. Sea X un punto en el plano y F el pie de la perpendicular desde X sobre l. Entonces la imagen de reflejar X por l es un punto X' donde F es el punto medio de X y X'. También puede considerarse como el punto en la recta perpendicular a l que pasa por X cuya distancia a l es la misma que la de X. Esto se puede visualizar como un efecto de espejo creado a partir de la recta.

La forma convencional de calcular el punto reflejo de un punto dado X sobre una línea conocida l, es utilizando los conocimientos ya mencionados en 4. En primer lugar, se calcula la ecuación de la recta perpendicular a l que pasa por X como se hizo en 4.5. Luego, como en 4.7., se encuentra el pie de la perpendicular desde X sobre l intersecando estas dos rectas, como lo vimos en 7.1. y a este punto lo llamamos F. Ahora sabemos que F es el punto medio de X con su reflejo por l, así que podemos encontrar las coordenadas de X' (la imagen de de reflejar X por l) despejando la ecuación vista en 3. que nos dice que $X' = 2F - X$.

8.3.1. Fórmula de reflexiones

El procedimiento anterior puede resultar tedioso y algo extenso en algunos casos; sin embargo, existe una fórmula que nos da la imagen de reflejar un punto X por una línea $l : \{P + \lambda \cdot v : \lambda \in \mathbb{R}\}$. Y donde $\overrightarrow{N}$ sea un vector normal unitario de l. Como $\overrightarrow{v}$ es el vector director de l, ya vimos en 4.5. cómo encontrar un vector normal a este, digamos que será $\overrightarrow{v'}$. Así, si consideramos $\overrightarrow{N} = \frac{\overrightarrow{v'}}{\|\overrightarrow{v'}\|}$, como vimos en 1.5., la magnitud del vector $\overrightarrow{N}$ será 1 y encontramos un vector normal unitario a la recta l. Con esto, podemos aplicar la mencionada fórmula para reflejar cualquier punto X por l, aunque la demostración no se verá en este documento pues utiliza materia no abarcada, ni necesaria, para efectos de problemas olímpicos. La fórmula es la siguiente:

$$X' = X - 2(X - P) \cdot \overrightarrow{N}\overrightarrow{N}$$

En este caso, estamos trasladando el punto X con el vector $-2(X - P) \cdot \overrightarrow{N}\overrightarrow{N}$, pero como el punto F es el punto medio de X y X', si trasladamos a X con el vector $-(X - P) \cdot \overrightarrow{N}\overrightarrow{N}$ obtenemos que:

$$F = X - (X - P) \cdot \overrightarrow{N}\overrightarrow{N}$$

9. ¿Cuándo es posible usar Geometría Analítica?

Es sumamente importante es manejar correctamente todas las herramientas y métodos que ya se han explorado. Sin embargo, en problemas de olimpiadas no se necesita solo conocer cantidades inmensas de teoría, y es primordial saber cómo se utiliza la teoría, junto a trucos y mañas que favorecen la solución de los problemas. Por eso es tan importante como la teoría estudiada, el saber cuándo es posible usar geometría analítica y cómo saber cuál método es el más conveniente para resolver problemas de geometría.

Este conocimiento se adquiere mayoritariamente con práctica, y llegando a conclusiones por experiencia propia. Si se intenta resolver problemas con geometría analítica y en cierto momento los cálculos se hacen imposibles, es posible ir conociendo qué condiciones no son funcionales en este tipo de problemas. Igualmente si se logra resolver problemas adecuadamente, el procedimiento va desarrollando una intuición de cuándo y cómo utilizar geometría analítica.

Nuevamente se invita al lector a descubrir estas técnicas e ideas por medio de la propia práctica, aunque a continuación enunciaremos algunas de las ideas comunes que pueden ser de gran ayuda para resolver problemas sin tener que lidiar con una gran confusión, ni perder tiempo intentando resolver un problema por caminos que no llevan a la solución.

9.1. Todos los puntos se pueden nombrar

Es fundamental que todos los puntos involucrados en el problema puedan ser definidos con coordenadas específicas. Esto debido a que, si algún punto requiere de mucho cálculo para ser nombrado, o incluso si es imposible hacerlo, esto será un impedimento al trabajar con puntos desconocidos.

Si por el contrario, todos los puntos se pueden nombrar, preferiblemente con procedimientos sencillos y rápidos, esto es una ventaja, ya que es fácil trabajar con puntos conocidos y obtener información de ellos.

9.2. Hay pocos círculos relevantes en el problema

Los círculos son figuras importantes. Sin embargo, cuando en el problema hay muchos círculos involucrados, esto puede ser una piedra en el camino, ya que definir los círculos requiere de un radio y un centro, y conocer puntos en una circunferencia, a su vez, puede llegar a tener cierto nivel de complejidad y requerir de procedimientos engorrosos.

9.3. Puntos y rectas fáciles de nombrar

Ya dijimos que es importante poder nombrar todos los puntos, y esto puede guiarnos por cuál camino utilizar. Una mejor forma de saber cuándo los métodos analíticos son útiles, es cuando los puntos se pueden calcular o encontrar fácilmente.

Algunos ejemplos de esto, es cuando se encuentran puntos medios, reflexiones de puntos, intersecciones de rectas fáciles de nombrar, entre otros. Además, los puntos en los ejes poseen formas simples por poseer una entrada nula.

En este punto, hemos descrito a grandes rasgos, cómo lograr encontrar las coordenadas de un punto o vector. Por esto, cada persona por medio de la práctica, debería ir creando un sentido de intuición sobre cuáles puntos se pueden conocer de una manera sencilla y cuales definitivamente no.

9.4. Pocas variables en los puntos

Manejar variables en este tipo de problemas es casi un hecho. Sin embargo, si se maneja una cantidad inmensa de variables, los cálculos pueden llegar a ser confusos y no llegar a ningún lado, pues necesitamos una relación entre los puntos.

Por esto, es importante idear una buena colocación del eje de coordenadas, así como la elección de cuáles puntos van a tener las variables que describirán al resto de puntos. Entre menos variables, esta herramienta es más poderosa, pero se pueden utilizar la cantidad de variables que sean necesarias.

10. ¿Dónde colocar el Sistema de Coordenadas?

Es importante poder intuir o saber cuándo es posible utilizar métodos o estrategias de geometría analítica para resolver problemas de geometría en olimpiadas. Sin embargo, hay que conocer ideas comunes y trucos que pueden ser vitales en la solución de problemas, y para esto el primer paso es una buena posición del dibujo en el plano de coordenadas, o es lo mismo que colocar adecuadamente el sistema de coordenadas de acuerdo al dibujo.

Esto determina completamente la ubicación de los puntos y puede modificar (para bien o para mal) la información del problema traducida a ecuaciones y coordenadas. A continuación se explican algunas de estas ideas para colocar el sistema de coordenadas en problemas que se resuelven por Geometría analítica.

Antes de estudiar algunas ideas útiles, es importante invitar al lector a practicar los métodos de geometría analítica para agilizar el desarrollo de cálculos, así como refinar la intuición para saber cuándo es posible utilizar dichas herramientas, y en estos casos cómo colocar el plano y qué información es más importante, pues solamente con práctica se puede llegar a perfeccionar las habilidades e ideas, en este área y en general.

Así mismo, aunque en el presente material se busca guiar al lector a la hora de resolver problemas por medio de procedimientos de geometría analítica, no siempre estas son las únicas formas de colocar el sistema de coordenadas, y aunque estos pueden ser comunes y de gran utilidad, no siempre son los convenientes, pero para poder tener la certeza de si lo que se hace es la mejor opción, se requiere mucha práctica, hacer problemas, leer soluciones y después de eso, más práctica.

10.1. Colocar puntos importantes en los ejes

Sabemos que los puntos que se encuentran en los ejes de coordenadas son puntos de la forma $(0, y)$ o $(x, 0)$, por lo que si ubicamos algunos puntos del dibujo sobre los ejes del sistema, tener ceros en algunas de sus entradas puede favorecer el realizar cálculos de interés en el problema, como calcular ecuaciones de recta, de circunferencia, entre otros.

Sumado a esto, en particular, si los lados de una figura, como por ejemplo un triángulo, cuadrado, o rectánculo, están sobre alguno de los ejes de coordenadas, esto resulta útil pues la recta que contiene a ese lado va a ser en efecto, uno de los ejes y tiene beneficios, como calcular intersecciones de esta recta con otras rectas o círculos.

10.2. Simetría del dibujo

La simetría es una idea muy común en matemática, que puede facilitar la solución de distintos problemas, pues hace que hayan dos objetos simétricos que conservan ciertas propiedades. En algunas ocasiones, es posible que algunos elementos de un dibujo puedan verse como simétricos respecto a una recta. Así, al colocar ese eje de simetría exactamente sobre alguno de los ejes del sistema de coordenadas, se facilita el proceso de nombrar puntos y hacer algunos cálculos.

Por ejemplo, si se tienen dos puntos simétricos respecto al Eje Y, sus coordenadas serían (x, y) y $(-x, y)$, en el caso de ser simétricos respecto al Eje X es similar, con (x, y) y $(x, -y)$, y puede tener muchas ventajas, como manejar menos variables en el problema, pues si la posición de estos puntos fuera otra, podría requerirse nombrar alguno de ellos con nuevas incógnitas.

Por otra parte, al tener segmentos tales que sus extremos son simétricos respecto a algún eje, en particular este eje constituye la mediatriz de dicho segmento, pues por definición, al ser simétricos respecto al eje, este segmento es perpendicular al eje, y los extremos equidistan del eje. de esto también puede verse que el punto medio del segmento estaría sobre alguno de los ejes, por lo que una de sus entradas sería 0 y la otra sería la que los dos puntos comparten.

Esta construcción puede ser importante a la hora de resolver problemas de olimpiadas, y es posible que sea difícil saber si es la mejor, sin embargo para esto se recomienda practicar resolviendo problemas, pues es la única forma de ir desarrollando la intuición para conocer cómo colocar el plano de coordenadas y el dibujo.

10.3. Centros en el origen

En la mayoría de problemas que tienen que ver con círculos, el centro de un círculo es un punto de mucho interés en el problema. Por la ecuación de la circunferencia, si el centro del círculo es el origen del plano, esto ayuda en la solución de problemas. Esto puede ser útil si se tienen circuncírculos en los que se coloca el circuncentro en el origen, lo que se puede sumar a posicionar alguno de los vértices en los ejes.

Esto también es conveniente con el centro de un polígono regular, o también con cuadriláteros cíclicos, donde el centro considerado es el centro del círculo que pasa por el cuadrilátero cíclico.

También es fundamental en estos casos saber dar coordenadas a los puntos. Cuando el origen coincide con el centro de un círculo que contiene puntos importantes, existe una forma interesante para los puntos con grandes utilidades. Si el círculo tiene radio r, y el punto describe un ángulo de θ respecto al Eje X, entonces las coordenadas de este punto son: en el Eje X es $\pm r\cos(\theta)$ y en el Eje Y es $\pm r\operatorname{sen}(\theta)$, cuyo signo varía dependiendo del cuadrante en que se ubique el punto.

Esta construcción ayuda pues se sabe que $\cos^2(x) + \operatorname{sen}^2(x) = 1$, y también porque se utilizan pocas variables, ya que por ejemplo, para nombrar tres puntos sin relación aparente, pueden definirse en términos de r y tres ángulos, en vez de tener tres variables para las ordenadas y otras tres para las abscisas.

10.4. Alturas en el Eje Y

Esta idea está directamente relacionada con la de colocar puntos en los ejes de coordenadas. Si en un problema sobre un triángulo $\triangle ABC$, la altura desde A sobre $\overline{BC}$ es importante en el problema, y si además hay puntos de interés sobre los lados del triángulo o la altura ya mencionada, una construcción importante es la siguiente:

- $A(0, a)$
- $B(b, 0)$
- $C(c, 0)$

Donde a, b, c son números reales. El lado $\overline{BC}$ es el Eje X, por lo que la altura es paralela al Eje Y, y como pasa por A que está en el Eje Y, esta algura es el Eje Y, y el por esto el pie de la altura debe ser $D(0, 0)$.

Con lo que ya se ha estudiado, puede verse que esto tiene grandes utilidades al tener puntos con entradas 0, y más aún pues dentro de los puntos se encuentra el origen, lo que facilita muchos cálculos. A pesar de que en el problema se tiene 3 variables (y pueden ser más depende del problema), el hecho de tener esta forma de los puntos facilita la solución, aunque parezca que tener muchas variables es complicado y confuso.

10.5. La medida perfecta...

En algunos problemas, se utilizan variables que influyen en todas las medidas del problema, como longitudes de segmentos, áreas, incluso en ecuaciones de objetos en el problema. Sin embargo, es posible que resolver el problema para un caso particular sea equivalente a hacerlo general, esto tomando la variable como una constante adecuada, y el dibujo es homotético y análogo en el caso particular y el general, es decir, para la variable y la constante.

Usualmente tener algunas medidas como constantes convenientes (por ejemplo 1, 2, 3, u otros), puede facilitar los cálculos, a diferencia de arrastrar variables innecesarias en el procedimiento. Cuando se hace esto, no basta solo con tomar el caso arbitrario para las variables que no generan cambios en el problema. También es necesario justificar que el dibujo específico es homotético a cualquier otro dibujo que se haga, y por qué esto no afecta en la solución del problema general, pues sin esto el problema general no estaría justificado.

En particular, es oportuno en algunos casos donde el origen es el circuncentro de un triángulo, considerar el circunradio como 1, pues este círculo sería el círculo unitario. Y con lo visto en la sección 10.3. se nota la ventaja de esta consideración, porque los puntos en ese círculo se definen en términos de ángulos, de la forma $(\cos(\theta), \operatorname{sen}(\theta))$.

11. Problemas

1. Sea $\square ABCD$ un cuadrado con centro en el punto O. Sea X el punto tal que $\square AOBX$ es un cuadrado, y sean M, Y los puntos medios de los segmentos $\overline{AB}$ y $\overline{OB}$ respectivamente. Sean C_1, la circunferencia que pasa por X, M y Y; C_2, la circunferencia que tiene centro C y radio igual a CM; y C_3, la circunferencia con diámetro $\overline{CX}$. Demuestre que las tres circunferencias C_1, C_2, y C_3 tienen un punto en común.

2. Sean $\square ABDE$ y $\square ACFG$ los cuadrados exteriores contruidos a partir del triángulo $\triangle ABC$. Sean M y N los puntos medios de $\overline{BC}$ y $\overline{EG}$ respectivamente.

i) Demuestre que $EG = 2AM$ y $BC = 2AN$.
ii) Demuestre que $\overleftrightarrow{AM}$ es perpendicular a $\overleftrightarrow{EG}$, y $\overleftrightarrow{AN}$ es perpendicular a $\overleftrightarrow{BC}$.

3. Sea $\triangle ABC$ un triángulo con ortocentro H, y $\square ABDE$ y $\square ACFG$ los cuadrados exteriores construidos a partir del triángulo. Sea N el punto medio de $\overline{EG}$. Supongo que P es el punto de intersección de $\overleftrightarrow{CD}$ y $\overleftrightarrow{BF}$. Demuestre que los puntos A, H, P, N son colineales.

4. Sea $\triangle ABC$ un triángulo acutángulo y D el pie de la altura desde A sobre $\overleftrightarrow{BC}$. Sea P un punto en el segmento $\overline{AD}$. Las líneas $\overleftrightarrow{BP}$ y $\overleftrightarrow{CP}$ intersecan a los lados $\overline{AC}$ y $\overline{AB}$ en E y F, respectivamente. Sean J y K el pie de las perpendiculares desde E y F sobre $\overline{AD}$, respectivamente. Pruebe que:

$$\frac{FK}{KD} = \frac{EJ}{JD}$$

5. Considere un círculo S, y un punto P fuera del círculo. Las líneas tangentes a S que pasan por P cortan al círculo en A y B respectivamente. Sea M el punto medio de $\overline{AB}$. La mediatriz de $\overline{AM}$ corta a S en un punto C que está dentro del triángulo $\triangle ABP$. $\overleftrightarrow{AC}$ interseca a $\overline{PM}$ en G, y $\overleftrightarrow{PM}$ interseca a S en un punto D que está fuera del triángulo $\triangle ABP$. Si $\overleftrightarrow{BD}$ es paralelo a $\overleftrightarrow{AC}$, pruebe que G es el centroide del triángulo $\triangle ABP$.

6. Sea $\triangle ABC$ un triángulo y D el pie de la altura desde A. Sea l la línea que pasa por los puntos medios de $\overline{BC}$ y $\overline{AC}$. E es la reflexión de D por l. Pruebe que el circuncentro de $\triangle ABC$ está sobre la línea $\overleftrightarrow{AE}$.

7. Sea $\triangle ABC$ un triángulo y Γ su circuncírculo. Sea D el pie de la altura desde A sobre $\overleftrightarrow{BC}$, M y N los puntos medios de $\overline{AB}$ y $\overline{AC}$, y Q el punto en Γ que es diametralmente opuesto a A. Sea E el punto medio de $\overline{DQ}$. Demuestre que las líneas perpendiculares a $\overleftrightarrow{EM}$ y $\overleftrightarrow{EN}$ que pasan por M y N respectivamente, se intersecan en $\overleftrightarrow{AD}$.

8. Sea $\square ABCD$ un rectángulo. Se construyen triángulos equiláteros $\triangle BCX$ y $\triangle DCY$, de manera que en el interior de ambos triángulos hay puntos que se encuentran, a su vez, en el interior del rectángulo. La línea $\overleftrightarrow{AX}$ interseca a la línea $\overleftrightarrow{CD}$ en P, y la línea $\overleftrightarrow{AY}$ interseca a la línea $\overleftrightarrow{BC}$ en Q. Pruebe que el triángulo $\triangle APQ$ es equilátero.

9. Sea $\triangle ABC$ un triángulo equilátero y Γ su incírculo. Si $D \in \overline{AB}$ y $E \in \overline{AC}$, tales que $\overline{DE}$ es tangente a Γ. Muestre que:

$$\frac{AD}{DB} + \frac{AE}{EC} = 1$$

.