Combinatoria.

Elaborado por Jeremías Ramírez Jiménez.

1. Conteo

Algunos problemas, consisten en determinar la cantidad de formas para realizar un cierto procedimiento o arreglo, en los cuales, lo que se requiere es conocer algunas fórmulas de conteo.

Teorema 1.1 (Principio del Producto)**.** Si se realiza un experimento en dos etapas, E_1 y E_2, y si existen n formas de hacer E_1 y m formas de hacer E_2, entonces existen $n \cdot m$ formas de hacer el experimento.

Por ejemplo, si tengo 3 pantalones y 2 camisas, entonces tengo $3 \cdot 2 = 6$ formas de escoger un pantalón y una camisa.

Definición 1.1. Se define el **coeficiente binomial** y se lee *"n escoge k"*, como $\displaystyle\binom{n}{k} := \frac{n!}{(n-k)!k!}$.

Teorema 1.2. La cantidad de formas de escoger k objetos de n sin que importe el orden es $\displaystyle\binom{n}{k}$.

Por ejemplo, la forma de escoger 3 bolas de 5 iguales es $\displaystyle\binom{5}{3} = \frac{5!}{(5-3)!3!} = \frac{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{2 \cdot 1 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = 10$.

Teorema 1.3. La cantidad de formas de escoger k objetos de n sin repetición, si importa el orden es $n \cdot (n-1) \cdots (n-k)$.

Teorema 1.4. La cantidad de formas de escoger k objetos de n con repetición, si importa el orden es n^k.

Por ejemplo, la cantidad de *palabras* que se puede formar con las letras A, B, C, D, E, F, G, de cuatro letras es $7^4 =$. Por otro lado, la cantidad de palabras de cuatro letras distintas es $7 \times 6 \times 5 \times 4$.

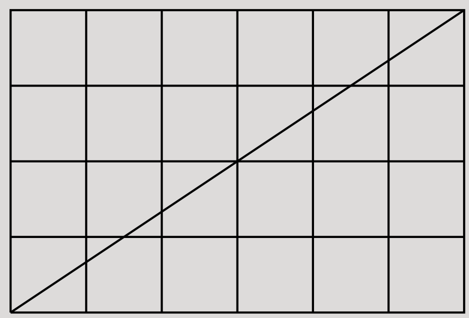
Ejemplo 1.1. Se escoge 15 puntos sobre $\triangle ABC$. Los tres vértices A, B, C. Tres puntos diferentes en $\overline{AB}$. Cuatro puntos en $\overline{BC}$, y cinco puntos en $\overline{CA}$. Determinar el número de triángulos de área positiva cuyos vértices son de los puntos seleccionados.

Solución: Existen $\binom{15}{3} = 455$ formas de escoger los 3 puntos de los 15 dados. Todas estas escogencias dan triángulos de área positiva excepto en el caso de que los tres puntos sean colineales. Existen $\binom{5}{3} = 10$ formas de escoger los tres puntos en $\overline{AB}$, $\binom{6}{3} = 20$ formas de escoger los tres puntos en $\overline{BC}$, y $\binom{7}{3} = 35$ formas de escoger los tres puntos en $\overline{CA}$. Entonces, existen $455 - 10 - 20 - 35 = 390$ triángulos con área positiva. $\square$

Ejemplo 1.2. Determine la cantidad de divisores positivos del número $N = 680400$.

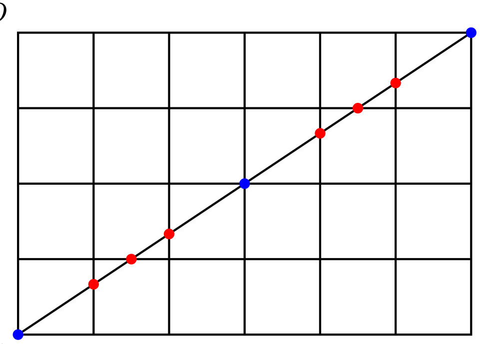
Solución: Observe que $N = 2^4 \cdot 3^5 \cdot 5^2 \cdot 7$. Cada divisor está determinado por una escogencia de los posibles divisores. Hay $4+1$ formas de escoger una potencia de dos, $5+1$ formas de escoger una potencia de 3, $2+1$ formas de escoger una potencia de 5, y $1+1$ formas de escoger una potencia de 7. De modo que en total hay $5 \cdot 6 \cdot 3 \cdot 2 = 180$ divisores. $\square$

Ejemplo 1.3. Un rectángulo $\square ABCD$ de lados de longitud m y n enteros positivos, respectivamente, se divide en $m \times n$ cuadrados 1×1, formando una malla como la siguiente:



Determine la cantidad total de intersecciones de $\overline{AC}$ con la malla.

Solución: Primero, observe que se tiene $n+1$ líneas verticales y $m+1$ horizontales (o viceversa, pero esto no afecta el conteo). La diagonal interseca todas las líneas, sin embargo, es posible que un punto de intersección coincida con una línea vertical y una horizontal. Claramente, esto ocurre cuando este punto es uno de los puntos formados por la malla. Por otro lado, observe que, los puntos de la malla que están en la diagonal, dividen esta en partes iguales, de modo que, sabiendo cuando mide cada parte, se sabe cuantos de estos puntos hay. Además, para saber cual es esta distancia, es suficiente saber cual es el primer punto de la malla que esta en la diagonal (digamos, al comenzar desde A), porque todos los demás estan a distancia múltiplo del primero. Finalmente, observe que si el primer punto es $P_1 = (m_1, n_1)$, entonces se cumple que $m = m_1 \cdot d$, y $n = n_1 \cdot d$, y como m_1 es mínimo, entonces d es máximo, es decir, d es el máximo común divisor de m y n. Se concluye entonces que hay $(m,n)+1$ puntos de la malla sobre la diagonal. Volviendo al problema en cuestión, se tiene en total $m+1+n-(m,n)$ intersecciones. En la siguiente figura se muestra el caso de $m = 6$ y $n = 4$.



$\square$

Ejercicio 1.1. Determine la cantidad de formas de colocar 3 torres en un tablero de ajedrez 5×5, de modo que ninguna torre ataque a otra.

Ejercicio 1.2. Determine la cantidad de intersecciones de dos diagonales de un polígono regular de n lados, sin contar los vértices del polígono.

Ejercicio 1.3. Se divide un rectángulo con líneas horizontales y verticales en $m \times n$ cuadrados de tamaño 1×1. Determine la cantidad de rectángulos diferentes que se forman en esta malla.

Ejercicio 1.4. Determine la cantidad de divisores positivos y pares del número $N = 10!$.

Ejercicio 1.5. Determine la máxima cantidad de intersecciones que se puede obtener al dibujar n rectas en un plano.

Ejercicio 1.6 (OMCC 2003)**.** Un tablero cuadrado de lado $8\,cm$ se divide en 64 cuadrados de lado $1\,cm$ cada uno. Cada cuadrado puede ser pintado de negro o blanco. Determine la cantidad total de formas de pintar el tablero de modo que cualquier cuadrado 2×2, es decir, formado con cuatro cuadrados 1×1 con un vértice común tiene dos cuadrados blancos y dos negros.

Ejercicio 1.7. Cinco ciudades están conectadas por un sistema de caminos. Hay exactamente un camino conectando cada par de ciudades. Determinar el número de formas que hay de hacer los caminos de un solo sentido, en tal forma que es posible ir de cualquier ciudad dada a cualquiera de las otras usando estos caminos (posiblemente pasando por otras ciudades).

2. Principio del Palomar

El **Principio del Palomar** es una idea sencilla con un gran alcance en problemas de conteo. Se presenta a continuación el mismo, con algunas variantes y varios ejemplos y ejercicios.

Teorema 2.1 (Principio del Palomar)**.** Si se colocan $n+1$ objetos en n cajas, entonces debe haber al menos dos objetos en la misma caja.

Teorema 2.2 (Versión Fuerte del Principio del Palomar)**.** Si se colocan n objetos en k cajas, entonces debe haber al menos $\left\lceil \frac{n}{k} \right\rceil$ objetos en la misma caja.

$\lceil x \rceil$ representa el entero más pequeño que es mayor o igual que x.

Ejemplo 2.1. Sea S un conjunto con $n+1$ números enteros. Demostrar que existen $a, b \in S$ tales que $a - b$ es múltiplo de n.

Solución: Considere los residuos de la división por n de los elementos de S. Se tiene n posibles residuos, como S tiene $n+1$ elementos existen $a, b \in S$ tales que $a \equiv b \pmod{n}$, es decir, $a - b$ es divisible por n. $\square$

Ejemplo 2.2. Pruebe que dados 13 puntos con coordenadas enteras, siempre es posible escoger 4 puntos de modo que el centro de gravedad tiene coordenadas enteras.

Solución: Considere las coordenadas de los puntos módulo 2. Se tiene únicamente cuatro posibilidades, estas son $(0,0),(0,1),(1,0),(1,1)$. Por el Principio del Palomar, de cada 5 se puede escoger dos que tienen las mismas coordenadas módulo 2. Tómese estos dos y se separan de los demás, y continúe haciendo esto hasta que queden 3 puntos. En este punto, se tiene 5 pares de puntos cuyas coordenadas suman 0 módulo 2, en ambas entradas. Cada suma módulo 4 puede ser 0 o 2, lo cuál da cuatro posibilidades para la suma módulo 4. Como se tiene 5 pares, entonces existen 2 pares que tienen la misma suma módulo 4 en cada entrada. Escogiendo estos 4 puntos se obtiene el resultado. $\square$

Ejemplo 2.3. Se escoge aleatoriamente 6 números enteros entre 1 y 2006, incluidos. Determine la probabilidad de que la diferencia de dos de ellos sea múltiplo de 5.

Solución: Para que la diferencia sea múltiplo de 5, los dos números deben tener el mismo residuo al ser divididos por 5. Existen 5 posibles resultados $(0,1,2,3,4)$. Por el Principio del Palomar al menos dos deben ser iguales. Entonces la respuesta es 1. $\square$

Ejemplo 2.4. Sea $A=\{x_1,x_2,\ldots,x_{n+1}\}$, donde x_i es un número entero, para todo $i=1,2,\ldots,n$. Muestre que existen dos elementos, tales que la resta es divisible por n.

Solución: Observe que existen n posibles residuos al dividir cada número entero entre n, estos son $0,1,2,\ldots,n-1$. Como A tiene $n+1$ elementos, por el principio del palomar existen dos elementos que tienen el mismo residuo. Sean x_i,x_j tales elementos. Es decir, $x_i=kn+r$ y $x_j=ln+r$, entonces $x_i-x_j=kn+r-(ln+r)=(k-l)n$. $\square$

Ejercicio 2.1. Muestre que en una fiesta donde hay n personas, al menos dos han saludado a la misma cantidad de personas.

Ejercicio 2.2. Muestre que, dados cinco puntos cualesquiera en el interior de un triángulo equilátero de lado cuya medida es 1, existen dos cuya distancia entre ellos es menor que $\frac{1}{2}$.

Ejercicio 2.3. Muestre que, dado un subconjunto de $n+1$ elementos de $\{1,2,3,\ldots,2n\}$, existen dos elementos del subconjunto, tales que uno es divisible por el otro.

Ejercicio 2.4. Mostrar que dados 13 puntos en el plano con coordenadas enteras, existen tres de ellos de modo que su centro de gravedad tiene coordenadas enteras.

Ejercicio 2.5. [Manhattan Mathematical Olympiad 2003] Probar que, si se tiene 100 números enteros, se puede escoger 15 de ellos, de modo que la diferencia de cualesquiera dos es divisible por 7.

Ejercicio 2.6. [Japón 1997] Se tiene 10 puntos ubicados sobre una circunferencia de diámetro 5. Demostrar que existen al menos dos puntos a una distancia menor o igual que 2, uno del otro.

Ejercicio 2.7. [OIM 1998] En una reunión hay representantes de n países ($n \geq 2$) sentados alrededor de una mesa redonda. Se sabe que dados cualesquiera dos representantes del mismo país, sus vecinos a la derecha no pueden ser del mismo país. Hallar el número más grande posible de representantes en la reunión.

Ejercicio 2.8. [OMM 2003] En una fiesta hay n hombres y n mujeres. A cada hombre le gustan a mujeres, y a cada mujer le gustan b hombres. Hallar todas las parejas (a, b) tales que siempre existe un hombre y una mujer que cada uno gusto le gusta al otro.

3. Grafos

3.1. Conceptos Básicos

Definición 3.1. Un **grafo** G es un par (V, E), donde V es un conjunto no vacío y E es un multiconjunto de pares no ordenados de elementos de V. Los elementos de V se llaman **vértices** y los elementos de E se llaman **aristas**.

Definición 3.2. Un **subgrafo** G' de G es un par (V', E') donde $V' \subseteq V$ y $E \subseteq E$, de modo que G' es también un grafo.

Un grafo tiene una representación geométrica. Los vértices son puntos en el plano, y las aristas son segmentos uniendo cada par de vértices. El grafo se llama **simple** si no hay aristas de un solo vértice ni aristas múltiples. Dos vértices v_1, v_2 se llaman **adyacentes** si forman una arista. En este caso la arista se dice **incidente** en v_1 y v_2. El grado de un vértice v_0 es $d(v_0)$, si v_0 es adyacente a exactamente $d(v_0)$ vértices.

Definición 3.3. Un **paseo** es una sucesión $\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ de vértices adyacentes. Un **camino** es una sucesión de vértices adyacentes distintos dos a dos. Un **ciclo** es un camino $\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ cerrado tal que los únicos vértices que son iguales son v_1 y v_n. La **longitud** de un camino es la cantidad de aristas que tiene.

Ejemplo 3.1. Considere el grafo G cuyos vértices son $V := \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\}$ y cuyas aristas son $E := \{(v_1, v_2), (v_1, v_3), (v_1, v_4), (v_2, v_3), (v_2, v_4), (v_2, v_5), (v_3, v_5), (v_4, v_5)\}$. Entonces un camino es $\{v_1, v_2, v_3\}$ y un paseo es $\{v_1, v_2, v_3, v_5, v_4, v_2\}$.

Teorema 3.1. Sea G un grafo con $V = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$. Entonces

$$\sum_{k=1}^{n} d(v_k) = 2|E|.$$

Demostración. Considere los pares (v, e) de un vértice y una arista incidente en el vértice. Cada vértice v_k está en $d(v_k)$ pares, luego, la cantidad total es $\sum_{k=1}^{n} d(v_k)$. Por otro lado, cada arista está en dos pares, luego, la cantidad total es $2|E|$. □

Ejercicio 3.1. Sea G un grafo con un número impar de vértices. Demuestre que existe al menos un vértice que tiene grado par.

Ejercicio 3.2. Sea G un grafo y sean u, v dos vértices tales que existe un paseo de u a v. Demostrar que existe un camino de u a v.

Ejercicio 3.3. Sea G un grafo tal que todos los vértices tienen grado 2. Demuestre que G es una unión disjunta de ciclos.

Ejercicio 3.4. Sea G un grafo, y sean v_1 y v_2 dos vértices, tales que existen dos paseos de v_1 a v_2, uno es de longitud par, y el otro es de longitud impar. Demostrar que G tiene al menos un ciclo de longitud impar.

3.2. Conexidad y árboles

Definición 3.4. Se dice que un grafo es **conexo** si dados vértices cualesquiera v_1, v_n existe un camino $\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$. Un grafo conexo que no contiene ciclos se llama un **árbol**.

Teorema 3.2. Todo grafo conexo G contiene un árbol T que contiene todos los vértices de G.

Demostración. Si G no contiene ciclos entonces G es un árbol. Suponga que G contiene un ciclo, sin pérdida de generalidad, este puede ser $\{v_1, v_2, \ldots, v_n, v_1\}$. Entonces, se puede remover la arista $\{v_n, v_1\}$, para eliminar el ciclo, el grafo resultante sigue siendo conexo. Para esto basta ver que si hay un camino de r_1 a r_2 que contiene $\{v_n, v_1\}$, entonces hay un camino que contiene $\{v_1, v_2, \ldots, v_n, v_1\}$ en lugar de $\{v_n, v_1\}$. Luego, se continua con este proceso hasta eliminar todos los ciclos. □

Teorema 3.3. Todo árbol con n vértices contiene $n-1$ aristas.

Demostración. Ejercicio. □

Sea G un grafo y v un vértice. Sea N_v el conjunto de todos los vértices u en V tales que existe un camino que comienza en v y termina en u. Claramente, dados dos vértices en N_v existe un camino que los une, es decir, N_v es conexo. El conjunto N_v se llama la componente conexa de v.

Ejercicio 3.5. Pruebe que todo grafo conexo con n vértices tiene al menos $n-1$ aristas.

Ejercicio 3.6. Pruebe que si G es un grafo en n vértices, $n-1$ aristas y que no tiene ciclos, entonces es conexo.

Ejercicio 3.7. Pruebe que todo árbol con al menos dos vértices tiene al menos dos vértices de grado 1.

3.3. Grafos Bipartitos

Definición 3.5. Sea G un grafo, un conjunto $V' \subseteq V$ se llama independiente si para cualesquiera dos elementos en V', no existen aristas en E que contengan estos dos elementos. Un grafo se llama bipartito si V se puede separar en dos conjuntos independientes.

Teorema 3.4. Un grafo G es bipartito si y sólo si todos sus ciclos tienen longitud par.

Demostración. Ejercicio. □

Ejercicio 3.8. Determine la máxima cantidad de aristas en un grafo bipartito con n vértices.

Ejercicio 3.9 (Balkan Mathematical Olympiad 2002)**.** Suponga que G es un grafo tal que todos sus vértices tienen grado mayor o igual que 3. Muestre que G tiene al menos un ciclo par.

Ejercicio 3.10 (USAMO 1989)**.** 20 jugadores de tennis juegan 14 partidas, de modo que cada uno de ellos juega al menos una vez. Muestre que existen 6 juegos en los cuales juegan 12 jugadores diferentes.

Ejercicio 3.11 (Perú 2009)**.** En una mesa redonda se sientan $2n$ peruanos, $2n$ bolivianos y $2n$ ecuatorianos. A las personas cuyos vecinos son de la misma nacionalidad se les pide que se pongan de pie. ¿Cuál es el número más grande posible de personas que están de pie? Nota: Por ejemplo, para que un peruano se ponga de pie sus dos vecinos deben ser de la misma nacionalidad, pero no tienen que ser necesariamente peruanos.

Ejercicio 3.12 (OMM 2009)**.** En una fiesta con n personas se sabe que de cada 4 personas, siempre hay 3 de ellas tales que dos cualesquiera se conocen, o hay 3 de ellas, tales que no hay dos de ellas que se conozcan. Muestre que es posible dividir a las personas de la fiesta en dos grupos, tales que, en el primer grupo, dos personas cualesquiera se conocen, y en el segundo grupo, dos personas cualesquiera no se conocen. Nota: conocer a una persona es una relación simétrica.

Ejercicio 3.13 (Russia 2011)**.** En un grupo de personas algunas parejas son amigos. Un grupo es llamado k-indivisible si, para cualquier descomposición en k subgrupos, al menos un subgrupo contiene un par de amigos. Suponga que A es un grupo finito 3-indivisible de personas, tal que A no tiene un subgrupo de 4 personas tal que dos de ellas cualesquiera son amigos. Pruebe que es posible descomponer A en dos subgrupos B y C tales que B es 2-indivisible y C es 1-indivisible.

4. Soluciones a los ejercicios

Solución del Ejercicio 1.1.

Note que, para que las torres no se ataquen una a otra, es necesario que esten en diferentes filas y diferentes columnas. Existen $\binom{5}{3}$ formas de escogerlas. Luego, se asigna una torre a cada posición seleccionada. Existen $3!$ formas de hacerlo. Finalmente, se tiene $3! \cdot \binom{5}{3} = 600$ formas.

Solución del Ejercicio 1.2.

Cada intersección de dos diagonales esta determinada por cuatro distintos vértices del polígono, o también, su intersección puede ser uno de los vértices. Es decir, son $\binom{n}{4}$ puntos.

Solución del Ejercicio 1.3.

Cada rectángulo esta definido por dos rectas verticales y dos rectas horizontales. Existen $m+1$ y $n+1$ de estas rectas. Como las rectas horizontales y las verticales se escogen independientemente, y el orden en el que se escoge las rectas no importa, existen

$$\binom{m+1}{2} \cdot \binom{n+1}{2}$$

rectángulos.

Solución del Ejercicio 1.4.

Observe que $10! = 3628800 = 2^8 \cdot 3^4 \cdot 5^2 \cdot 7$. Luego, la cantidad de divisores es $9 \cdot 5 \cdot 3 \cdot 2 = 270$.

Solución del Ejercicio 1.5.

Para que la cantidad sea máxima es suficiente que cada intersección este determinada por dos rectas, es decir, no exista tres rectas concurrentes. En este caso, dos rectas determinan una intersección. Por lo tanto la cantidad de intersecciones es $\binom{n}{2}$.

Solución del Ejercicio 1.6.

Primero se pinta la primera columna de cualquier forma, para esto hay 2^8 formas. Note que, si se tiene dos cuadrados consecutivos del mismo color, entonces en la columna siguiente debe cambiarse en ambos el color. Haciendo este cambio, la columna siguiente debe tener exactamente la misma configuración que la primera. Continuando de esta forma, se concluye que todo el tablero queda predeterminado por la primera coloración. Si no hay cuadrados consecutivos del mismo color, entonces los colores aparecen alternados. Solo existe dos formas de hacer esto. De ser así, la siguiente columna y consecutivas también debe ser alternadas. En este caso, solo es necesario escoger el primer color de cada columna. En el primer caso, se tiene $2^8 - 2$ coloraciones, y en el segundo hay 2^8. En total se tiene $2^8 + 2^8 - 2 = 2(2^8 - 1)$ formas.

Solución del Ejercicio 1.7.

Sean A, B, C, D, E las ciudades. Primero observe que, si una asignación de sentidos a los caminos tiene una ciudad donde todos los caminos son de entrada o todos los caminos son de salida, entonces no es posible ir de cualquier ciudad a cualquier otra. Luego, asuma que todas las ciudades tienen al menos un camino de entrada y uno de salida. Suponga que no es posible ir de A a B. Como existe un camino que sale de A, entonces podemos suponer que ese camino llega a C. Como existe un camino que sale de A, el cual no puede llegar a B ni a C. Suponga que este camino llega a D. Existe un camino que sale de D, el cual no puede llegar ni a B ni a C, luego, debe llegar a E. Entonces, ningún camino que sale A, B, D, E llega a C, contradiciendo que existe un camino que llega a C. A partir de lo anterior se concluye que si cada ciudad tiene al menos un camino que sale y otro que entra entonces es posible ir de cualquier ciudad a cualquier otra por estos caminos.

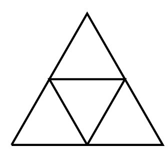
Finalmente, observe que se tiene $\binom{5}{2} = 10$ caminos, y $2^{10} = 1024$ formas de asignar la dirección a estos caminos. Por otro lado, si existe una ciudad que solo tiene caminos de salida, entonces debe ser única. En este caso, se escoge la ciudad, y de los restantes $\binom{4}{2} = 6$ caminos hay $2^6 = 64$ formas de asignar los sentidos a estos caminos, luego, existen $5 \cdot 64 = 320$ formas de hacer esta asignación. Similarmente, hay 320 formas de asignar los sentidos en el caso de que exista una ciudad en la cual todos los caminos llegan. Luego, es necesario eliminar los casos en que ocurra ambas situaciones. En este caso, se escoge una ciudad (5 formas) y se asigna todos los caminos en salida, luego, se escoge otra ciudad (4 formas) y se asigna todos los caminos de llegada, y de las restantes tres se asignan los sentidos en $2^3 = 8$ formas, es decir, se tiene $5 \cdot 4 \cdot 8 = 160$ formas. Es decir, es necesario eliminar $320 + 320 - 160 = 480$ posibilidades. Finalmente, el número de caminos es $1024 - 480 = 544$.

Solución del Ejercicio 2.1.

Observe que una persona puede haber saludado $0, 1, 2, \ldots, n-1$ personas. Sin embargo, si una persona ha saludado 0 personas, entonces simplemente se puede suponer que hay $n-1$ personas y aplicar el mismo argumento. Entonces se puede suponer que todas saludaron al menos una persona. Es decir, $1, 2, \ldots, n-1$ personas. Como hay n personas y $n-1$ posibilidades, por el principio del palomar debe haber dos personas que saludaron la misma cantidad de personas.

Solución del Ejercicio 2.2.

Divida el triángulo en 4 triángulos equiláteros como se muestra en la figura.



Como son cinco puntos, y cuatro triángulos, por el principio del palomar, al menos dos están en uno de los triángulos. Ahora, observe que la distancia máxima de dos puntos en el triángulo es el lado del mismo que es $\dfrac{1}{2}$.

Solución del Ejercicio 2.3.

Si se escribe los números desde 1 hasta $2n$ en la forma $2k \cdot j$, donde j es impar, entonces j debe estar entre 1 y $2n$. Existen solo n posibilidades para j. Por el principio del palomar deben existir dos elementos con el mismo j. Es claro que el mayor de estos números es divisible por el otro.

Solución del Ejercicio 2.4.

Given any 5 integers we are going to prove that there are 3 of them whose sum is divisible by 3. If there are 3 of them congruent modulo 3 to 0, 1 and 2, respectively, then their sum is divisible by 3. If at most two congruences are used, by the pigeonhole principle one was used at least 3 times. The sum of these 3 numbers is divisible by 3. Note that given 13 points with integer coordinates, the pigeonhole principle ensures that 5 of them have the same first coordinate modulo 3. Of these 5 points, the second coordinate of 3 of them must have a sum divisible by 3. These are the 3 points we were looking for. It should be noted that the number 13 is not optimal for this problem. Finding the smallest number with this property should be a good problem for the reader.

Solución del Ejercicio 2.5.

For the difference to be a multiple of 7, the integers must have equal modulo 7 residues. To avoid having 15 with the same residue, 14 numbers with different modulo 7 residues can be picked ($14 * 7 = 98$). Thus, two numbers are left over and have to share a modulo 7 residue with the other numbers under the pigeonhole principle.

Solución del Ejercicio 2.6.

Inscribe a regular 9-gon in a circle, and it will divide the circle into 9 equal arcs. The length of the side of this 9-gon is $\simeq 1.71$, and this is an upper bound on the distance of any two points on the arc. From the pigeonhole principle one of the arcs contains at least two of the points.

Solución del Ejercicio 2.7.

We are going to show that there are at most n2 representatives. Consider the set of pairs (ri, rj) such that there is a representative of the country j to the right of a representative of the country i. Note that to any two consecutive representatives we are assigning one of these pairs. If there were at least n2 + 1 representatives, two consecutive pairs of them would have been assigned the same pair, which is impossible. If n = 2 it is clear that we can arrange 4 representatives. If we can seat n2 representatives of n countries, then each pair (ri, rj) with 1 = i, j = n is being assigned exactly once. To add a country, where we assigned the pair (ri, ri) we place representatives to have (ri, rn+1, ri, ri) if i = n -1. We are also going to change (rn, rn) by (rn, rn+1, rn+1, rn, rn). Then every pair (ri, rj) with 1 = i, j = n+1 appears exactly once, so we have the seating arrangement for n + 1 countries using $(n+1)^2$ representatives.

Solución del Ejercicio 2.8.

Consider the pairs (r, s) where r is a boy and s is a girl that r likes. The are at least a pairs for each boy, so there are at least a n pairs. Thus, there is a girl that is in at least a of these pairs. That is, there is a girl that at least a boys like. If that girl likes more than n - a boys, then we can find the desired pair. That is, if a +b ¿n we can find such a pair. If a +b = n we are going to show that this is not necessarily true. For this we are going to number both the girls and the boys from 1 to n. Given a pair (i, j) where i is the number of a girl and j the number of a boy, we say that i likes j if i + j is congruent modulo n to some of 1, 2, 3, . . . , b.We say that j likes i if i+j congruent modulo n to some of n, n-1, . . . , n-a +1.With this we have the condition of the problem and no pair likes each other.

Solución del Ejercicio 3.1.

Solución del Ejercicio 3.2.

Solución del Ejercicio 3.3.

Solución del Ejercicio 3.4.

Solución del Ejercicio 3.5.

Solución del Ejercicio 3.6.

Solución del Ejercicio 3.7.

Solución del Ejercicio 3.8.

Solución del Ejercicio 3.9.

Let $v_1, v_2, \ldots, v_k$ be the longest path in the graph. v_1 is adjacent to at least three vertices, so at least to two vertices different from v_2. These two vertices must be in the path, or it would contradict its maximality. Then v_1 is adjacent to v_2, v_i , v_j . By the pigeonhole principle, two of the numbers 2, i, j have the same parity. The section of the path between their corresponding vertices and v1 make the cycle we wanted.

Solución del Ejercicio 3.10.

Solución del Ejercicio 3.11.

Solución del Ejercicio 3.12.

First Solution: Consider a graph with one vertex per person, a red edge if two persons know each other, and a blue edge if they do not. Let A be the largest set of vertices with only red edges and x, y be two vertices outside A. We want to show that the edge $\{x, y\}$ is blue. First note that there must be vertices in A that are connected to x with a blue edge, or we could add x to A, contradicting its maximality. The same goes for y. Let us assume that the edge $\{x, y\}$ is red and look for a contradiction. Consider all the vertices in A that are connected either to x or y with a blue edge. If there is only one such vertex, we can remove it and add x and y to A, contradicting it maximality. Thus there are two vertices z, w in A such that the edges $\{w, x\}$ and $\{z, y\}$ are blue. This means that in the set $\{x, y, z, w\}$ we cannot find 3 vertices that satisfy the condition of the problem. This is the contradiction we wanted.

Second Solution: We solve the problem by induction on n. If $n = 4$ the assertion is true. Suppose it is true for a certain k and let us prove it for $k + 1$. For this, construct a graph as in the previous solution. Let v_0 be an arbitrary vertex. Since the other k vertices satisfy the condition of the problem, we can split them into two sets, A and B, so that in A there are only red edges and in B there are only blue edges. Choose that splitting so that the number T of blue edges from v_0 to A plus the number of red edges from v_0 to B is minimal. Suppose that we cannot add v_0 to A. This means there is a vertex a in A such that $\{v_0, a\}$ is blue. The same way there must be a vertex b in B so that $\{b, v_0\}$ is red. Suppose without loss of generality that $\{a, b\}$ is red. Let x be any other vertex of A. This means that $\{x, a\}$ is red. If $\{b, x\}$ was blue, then the vertices $\{v_0, a, b, x\}$ would not satisfy the problems condition. Thus $\{b, x\}$ is red. Since this happens for every vertex in A, we can place b in A. With this we are reducing the number of red edges from v_0 to B, contradicting the minimality of T . Thus v_0 can be added to one of the parts and we are done.

Solución del Ejercicio 3.13.

Referencias

[An] S. András. *Elementary Combinatorial Geometry.* Romania. Gil. (2007).

[Ba] R. Barbosa y S. Feitosa. *Banco de Questões 2017.* Impa: Río de Janeiro. (2017).

[Ka] J. Kane et al. *American Invitational Mathematics Examination I and II*, Mathematical Association of America. (2017).

[Ki] B. Kisačanin. *Mathematical Problems and Proofs.* Kluwer Academic. (2002).

[So] P. Soberón. *Problem-Solving Methods in Combinatorics. An Approach to Olympiad Problems.* Birkhäuser. (2013).