OLCOMA.
MEP-UNA-UCR-ITCR-UNED.
Entrenamientos.
Enero 2017.

Geometría.
Teorema de Ceva.

Sea $\triangle ABC$ un triángulo cualquiera. Un segmento cuyos extremos son un vértice del triángulo y un punto en el lado opuesto se llama *ceviana*. Sean X, Y, Z tres puntos cualesquiera en $\overline{BC}, \overline{CA}, \overline{AB}$ respectivamente, distintos de A, B, C. Entonces $\overline{AX}, \overline{BY}, \overline{CZ}$, son cevianas de $\triangle ABC$.

Teorema 1. *Tres cevianas $\overline{AX}, \overline{BY}, \overline{CZ}$ son concurrentes, si y solo si*

$$\frac{BX}{XC}\frac{CY}{YA}\frac{AZ}{ZB} = 1$$

alternativamente,

$$\frac{\sin(\measuredangle BAX)}{\sin(\measuredangle XAC)}\frac{\sin(\measuredangle CBY)}{\sin(\measuredangle YBA)}\frac{\sin(\measuredangle ACZ)}{\sin(\measuredangle ZCB)} = 1$$

Demostración:

Suponga que son concurrentes, y sea P el punto de intersección, luego

$$\frac{BX}{XC} = \frac{(BXA)}{XCA} = \frac{(BXP)}{(CXP)} = \frac{(BPA)}{(CPA)},$$

$$\frac{CY}{YA} = \frac{(CYB)}{YAB} = \frac{(CYP)}{(YAP)} = \frac{(CPB)}{(BPA)},$$

$$\frac{AZ}{ZB} = \frac{(AZC)}{BZC} = \frac{(AZP)}{(BZP)} = \frac{(APC)}{(BPC)},$$

luego,

$$\frac{BX}{XC}\frac{CY}{YA}\frac{AZ}{ZB} = \frac{(BPA)}{(CPA)}\frac{(CPB)}{(BPA)}\frac{(APC)}{(BPC)} = 1$$

Para la otra implicación, sea P el punto de intersección de $\overline{BY}$ y $\overline{CZ}$. Sea X' el punto de intersección de $\overline{AP}$ con $\overline{BC}$. Por la primera parte, se cumple que

$$\frac{BX'}{X'C}\frac{CY}{YA}\frac{AZ}{ZB}=1,$$

y también

$$\frac{BX}{XC}\frac{CY}{YA}\frac{AZ}{ZB}=1$$

igualando se obtiene que

$$\frac{BX'}{X'C}=\frac{BX}{XC},$$

luego, $X=X'$.

Ejercicios.

1. Demuestre que las medianas de un triángulo son concurrentes.
2. Demuestre que las bisectrices de un triángulo son concurrentes.
3. Demuestre que si las respectivas cevianas son perpendiculares al lado opuesto, entonces son concurrentes.
4. Un círculo inscrito en $\triangle ABC$ es tangente a BC en X, a AC en Y, y a AB en Z. Demuestre que AX, BY y CZ son concurrentes.
5. Demuestre la versión trigonométrica del teorema de Ceva.
6. Se traza tres cuadrados sobre los lados de $\triangle ABC$ exteriormente. Muestre que las rectas determinadas por A, B, C y los respectivos centros de los cuadrados opuestos son concurrentes.
7. Sea Ł una recta. Se dibuja una semicircunferencia Γ a un lado de la recta. Sea O el centro de Γ. Sean C y D dos puntos en Γ. Las tangentes a Γ por C y D intersecan L en B y A respectivamente, de modo que $B-O-A$. El punto de intersección de las tangentes es P. Sea E el punto de intersección de CA y BD. Sea F el punto de L tal que $EF \perp L$. Sea Q un punto en L tal que $PQ \perp L$. Demuestre que AC, BD y PQ son concurrentes.
8. (IMO-SL2003) Sean A, B, C tres puntos en la recta L en ese orden. Sea Γ una circunferencia que contiene a A y C de modo que el centro de Γ no esta en L. Sea P el punto de intersección de las tangentes a Γ a través de A y C. Sea Q el punto de intersección de Γ con PB. Pruebe que la intersección del bisector de $\angle AQC$ y L no depende de Γ.