OLCOMA.
MEP-UNA-UCR-ITCR-UNED.
Entrenamiento Equipo IMO.
Mayo 2017.

Combinatoria.

Grafos.

1. Conceptos Básicos

Un **grafo** G es un par (V, E), donde V es un conjunto no vacío y E es un multiconjunto de pares no ordenados de elementos de V. Los elementos de V se llaman **vértices** y los elementos de E se llaman **aristas**.

Un **subgrafo** G' de G es un par (V', E') donde $V' \subseteq V$ y $E \subseteq E$, de modo que G' es también un grafo. Un grafo tiene una representación geométrica, los vértices son puntos en el plano, y las aristas son segmentos uniendo cada par de vértices. El grafo se llama **simple** si no hay aristas de un solo vértice ni aristas múltiples. Dos vértices v_1, v_2 se llaman **adyacentes** si forman una arista. En este caso la arista se dice **incidente** en v_1 y v_2. El grado de un vértice v_0 es $d(v_0)$, si v_0 es adyacente a exactamente $d(v_0)$ vértices.

Un **paseo** es una sucesión $\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ de vértices adyacentes. Un **camino** es una sucesión de vértices adyacentes distintos dos a dos. Un **ciclo** es un camino $\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ cerrado tal que los únicos vértices que son iguales son v_1 y v_n.

Teorema 1.1. Sea G un grafo con $V = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$. Entonces

$$\sum_{k=1}^{n} d(v_k) = 2|E|$$

Demostración. Considere los pares (v, e) de un vértice y una arista incidente en el vértice. Cada vértice v_k está en $d(v_k)$ pares, luego, la cantidad total es $\sum_{k=1}^{n} d(v_k)$. Por otro lado, cada arista está en dos pares, luego, la cantidad total es $2|E|$.

□

2. Conexidad y árboles

Decimos que un grafo es **conexo** si dados vértices cualesquiera v_1, v_n existe un camino $\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$. Un grafo conexo que no contiene ciclos se llama un **árbol**.

Teorema 2.1. Todo grafo conexo G contiene un árbol T que contiene todos los vértices de G.

Demostración. Si G no contiene ciclos entonces G es un árbol. Suponga que G contiene un ciclo $\{v_1, v_2, \ldots, v_n, v_1\}$, entonces podemos remover la arista $\{v_n, v_1\}$, para eliminar el ciclo, el grafo resultante sigue siendo conexo. Para esto basta ver que si hay un camino de r_1 a r_2 que contiene $\{v_n, v_1\}$, entonces hay un camino que contiene $\{v_1, v_2, \ldots, v_n, v_1\}$ en lugar de $\{v_n, v_1\}$. Continuamos con este proceso hasta eliminar todos los ciclos. $\square$

Teorema 2.2. Todo árbol con n vértices contiene $n-1$ aristas.

Demostración. Ejercicio. $\square$

Sea G un grafo y v un vértice. Sea N_v el conjunto de todos los vértices u en V tales que existe un camino que comienza en v y termina en u. Claramente, dados dos vértices en N_v existe un camino que los une, es decir, N_v es conexo. El conjunto N_v se llama la componente conexa de v.

3. Grafos Bipartitos

Sea G un grafo, un conjunto $V' \subseteq V$ se llama independiente si para cualesquiera dos elementos en V', no existen aristas en E que contengan estos dos elementos. Un grafo se llama bipartito si V se puede separar en dos conjuntos independientes.

Teorema 3.1. Un grafo G es bipartito si y sólo si todos sus ciclos tienen longitud par.

Demostración. Ejercicio. $\square$