Polinomios

Entrenamiento intermedio y avanzado para olimpiadas internacionales

Marianne Peña Wüst y Daniel Campos Salas

1. Introducción

Un **polinomio** se define como una función $P : \mathbb{R} \longmapsto \mathbb{R}$ de la forma

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0, \text{ donde } n \in \mathbb{N}, a_n \neq 0 \text{ y } a_k \in \mathbb{C}, \ \forall k \in \mathbb{N}_{\leq n}$$

A través de este documento se definirán los polinomios de esta forma. A los a_k se les denomina **coeficientes**, y en las diferentes secciones de este trabajo se aclarará, haciendo el uso de la notación $P(x) \in \mathbb{Z}[x]$, $\mathbb{Q}[x]$, $\mathbb{R}[x]$ o $\mathbb{C}[x]$, cuando estos sean enteros, racionales, reales o complejos, respectivamente. Se dice que este polinomio es de **grado** n, o $\deg(P) = n$, ya que $\max\{k\} = n$.

Ahora, si se define otro polinomio:

$$Q(x) = b_m x^m + b_{m-1}x^{m-1} + \cdots + b_1 x + b_0, \text{ donde } m \in \mathbb{N}, b_m \neq 0 \text{ y } b_k \in \mathbb{C}, \ \forall k \in \mathbb{N}_{\leq m}$$

Se dice que $P(x) = Q(x)$ si y solo si

- $n = m$
- $a_k = b_k \ \forall k \in \mathbb{N}_{\leq m}$

En general, la notación en este texto se mantendrá constante desde la definición de un concepto.

Ejemplo. $P(x) \cdot P(-x)$ resulta en un polinomio $Q(x)$ tal que $b_i = 0$ para todo i impar.

Solución:

$$\begin{aligned}
P(x) \cdot P(-x) = & \ (a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0) \cdot [(-1)^n a_n + (-1)^{n-1} a_{n-1} x^{n-1} + \cdots - a_1 x + a_0] \\
= & \ (-1)^n a_n x^n (P(x)) + (-1)^{n-1} a_{n-1} x^{n-1} (P(x)) + \cdots - a_1 x (P(x)) + a_0 (P(x)) \\
= & \ (-1)^n [(a_n x^n)^2 + a_n a_{n-1} x^{2n-1} + \cdots + a_n a_1 x^{n-1} + a_0 a_{n-1} x^n] \\
& + (-1)^{n-1} [a_n a_{n-1} x^{2n-1} + (a_{n-1} x^{n-1})^2 + \cdots + a_{n-1} a_1 x^n + a_0 a_{n-1} x^{n-1}] \\
& + \cdots \ - [a_1 a_n x^{n+1} + a_1 a_{n-1} x^n + \cdots + (a_1 x)^2 + a_0 a_1 x] \\
& + [a_0 a_n x^n + a_0 a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_0 a_1 x + (a_0)^2] \\
= & \ (-1)^n (a_n x^n)^2 + (-1)^{n-2} (a_{n-2} x^{n-2})^2 + \cdots \\
& + (-1)^n a_n a_{n-1} x^{2n-1} + (-1)^{n-1} a_n a_{n-1} x^{2n-1} + \\
& + (-1)^{n-1} a_{n-1} a_{n-2} x^{2n-3} + (-1)^{n-2} a_{n-1} a_{n-2} x^{2n-3} + \cdots \\
& + (-1)^{n-1} (a_{n-1} x^{n-1})^2 + (-1)^{n-3} (a_{n-3} x^{n-3})^2 + \cdots \\
= & \ (\text{suma de términos con exponente par})^2 - (\text{suma de términos con exponente par})^2 \\
= & \ (\text{suma de términos con exponente par})^2 - (x)^2 (\text{ahora los exponentes son pares})^2 \ \blacksquare
\end{aligned}$$

2. División y factorización de polinomios

2.1. Algoritmo de la división

Se tiene que $\forall P(x), Q(x)\ \exists C(x), R(x)$ tales que $P(x) = C(x) \cdot Q(x) + R(x)$ y $\deg(R)$ es menor que $\deg(Q)$. $C(x)$ es el **cociente** y $R(x)$ es el **residuo**. Si $R(x) = 0$ se dice que $Q(x) \mid P(x)$, es decir, que $Q(x)$ divide a $P(x)$.

Para encontrar el cociente y el residuo, se puede implementar la **división larga** o el algoritmo de Horner, popularmente conocido como **división sintética**.

2.2. Teorema del residuo y del factor

Existen varios teoremas y resultados que se pueden utilizar para hallar la factorización de un polinomio. Estos, utilizados en conjunto con la división sintética, son muy útiles para trabajar con polinomios.

Teorema del residuo. Sean $a, b \in \mathbb{R}, a \neq 0$. El residuo al dividir $P(x)$ entre $(ax - b)$ es $P(\frac{b}{a})$.

Demostración: Por el algoritmo de la división, se tiene que $P(x) = (ax - b) \cdot C(x) + r$, donde r es una constante porque $Q(x) = ax - b$ es lineal. Sustituyendo con $\frac{b}{a}$, $P(\frac{b}{a}) = [(a)(\frac{b}{a}) - b] \cdot C(x) + r = (b - b) \cdot C(x) + r \implies P(\frac{b}{a}) = r$. ■

Teorema del factor. Sean $a, b \in \mathbb{R}, a \neq 0$. $(ax - b)$ es factor de $P(x) \iff P(\frac{b}{a}) = 0$.

Demostración: "$\implies$" Se tiene que $P(x) = (x - a) \cdot C(x)$, es decir, r es cero, entonces por el Teorema del residuo $P(a) = 0$.

"$\impliedby$" Si $P(a) = 0$, $P(x)$ puede ser escrito como $P(x) = (x - a) \cdot C(x)$ porque por el Teorema del residuo $r = P(a) = 0$. ■

Corolario. Para todo $P(x)$ con coeficientes enteros se cumple que

$$(x - y) \mid P(x) - P(y), \text{ con } x, y \in \mathbb{C}$$

. Es decir, existe un polinomio $Q(x)$ con coeficientes enteros tal que

$$P(x) - P(y) = Q(x)(x - y)$$

Note que si $P(x)$ tiene coeficientes enteros entonces $Q(x)$ también.

En estos dos teoremas, es muy útil considerar el caso en el que $a = 1$, ya que se estaría trabajando con raíces enteras.

Ejemplo 3.3.1. Sea $P(x)$ un polinomio mónico con coeficientes enteros. Suponga que existen cuatro enteros distintos a, b, c, d tales que $P(a) = P(b) = P(c) = P(d) = 5$. Demostrar que no existe un entero e tal que $P(e) = 8$.

Solución: Se define el polinomio $Q(x) = P(x) - 5$. Entonces,

$$Q(a) = P(a) - 5 = 0 = P(b) = P(c) = P(d)$$

Por el Teorema del factor,

$$Q(x) = (x - a)(x - b)(x - c)(x - d)A(x)$$

Asuma que $\exists e \in \mathbb{Z}$ tal que $P(e) = 8$. Entonces, $P(e) - 5 = 8 - 5 = 3 = Q(e)$, es decir,

$$Q(e) = (e - a)(e - b)(e - c)(e - d)A(e) = 3$$

Esto indica que hay al menos cuatro enteros diferentes cuyo producto es 3. Este número tiene exactamente cuatro divisores ($\pm 1, \pm 3$), entonces obligatoriamente deben ser los que se están multiplicando, así que se tiene que:

$$3 = -1 \cdot 1 \cdot -3 \cdot 3 \cdot A(e) = 9 \cdot A(e) \ \Rightarrow\Leftarrow \ \blacksquare$$

Ejemplo 3.3.2. Sea $P(x)$ un polinomio de coeficientes enteros. Si $P(a) = P(b) = P(c) = -1$ para $a, b, c \in \mathbb{Z}$, entonces $P(x)$ no tiene raíces enteras.
Solución: Note que $P(x) = (x - a)(x - b)(x - c)Q(x) - 1$ por el Teorema del factor. Entonces, si $\exists d \in \mathbb{Z}$, por el mismo teorema, se tiene que:

$$\begin{aligned} &P(d) = (d - a)(d - b)(d - c)Q(x) - 1 = 0 \\ &\Longrightarrow (d - a)(d - b)(d - c)Q(x) = 1 \end{aligned}$$

No obstante, estos deben ser tres factores enteros diferentes de 1, pero 1 solo tiene (± 1), por lo que, por el Principio del palomar, es una contradicción. $\blacksquare$

Ejemplo. Factorice $a^2b + b^2c + c^2a - ab^2 - bc^2 - a^2c$, entonces al menos dos de a, b y c son iguales.
Solución: Se visualiza la expresión como un polinomio con variable a

$$P(a) = a^2b + b^2c + c^2a - ab^2 - bc^2 - a^2c$$

Por el corolario del Teorema del factor, se tiene que $a - b \mid P(a) - P(b)$. Entonces, podría ser interesante ver qué pasaría al evaluar $P(b)$

$$\begin{aligned} P(b) &= a^3 + a^2c + c^2a - a^3 - ac^2 - a^2c \\ &= 0. \end{aligned}$$

Entonces, $a - b \mid P(a) - P(b)$, por lo que $P(a) = (a - b)Q(a)$. Usando división sintética, se obtiene que

$$P(a) = (a - b)(a^2 - a(b + c) + bc)$$

Además, se tiene que $a - c \mid P(a) - P(c)$, entonces sería interesante encontrar $P(c)$.

$$\begin{aligned} Q(c) &= a^2 - a(a + b) + ab \\ &= a^2 - a^2 - ab + ab \\ S &= 0. \end{aligned}$$

Y utilizando la división sintética nuevamente se obtiene que

$$P(a) = (a - b)(a - c)(b - c). \ \blacksquare$$

2.3. Algoritmo euclideano de la división

El concepto de **máximo común divisor** también se puede aplicar con polinomios en $\mathbb{Q}[x], \mathbb{R}[x] y \mathbb{C}[x]$. Se tiene que $(P(x), Q(x)) = H(x)$ es el máximo común divisor de $P(x)$ y $Q(x)$ si y solo si:

- $H(x) \mid P(x), Q(x)$
- $\forall K(x)$ tal que $K(x) \mid P(x), Q(x)$ se cumple que $K(x) \mid H(x)$

Teorema 3.1.1. $(P(x), Q(x)) = (Q(x), R(x))$.
Demostración: Se tiene que

$$P(x) = C(x) \cdot Q(x) + R(x) \qquad (3.1.1)$$

$$\Longrightarrow P(x) - C(x) \cdot Q(x) = R(x) \qquad (3.1.2)$$

Ahora, (3.1.1) indica que cualquier divisor común de $Q(x)$ y $R(x)$ debe también dividir a $P(x)$, ya que debe dividir ambos "lados" de la ecuación. Análogamente, por (3.1.2) se sabe que cualquier divisor común de $P(x)$ y $Q(x)$ también divide a $R(x)$. Por lo tanto, debe ser también un divisor común entre $Q(x)$ y $R(x)$, y se tiene que $(P(x), Q(x)) = (Q(x), R(x))$. ■

Nótese que, igual que con los números enteros, también se puede utilizar el **algoritmo euclideano de la división** con los polinomios.

Ejemplo 3.1.1. Determine $(x^3 + x^2 + 1,\ x^2 + 1)$.
Solución: Se aplica el algoritmo euclideano de la división:

$$x^3 + x^2 + 1 = (x + 1)(x^2 + 1) - x$$

$$x^2 + 1 = (-x)(-x) + 1$$

$$x = (1)(x)$$

$\therefore (x^3 + x^2 + 1,\ x^2 + 1) = 1$.

Teorema de Bézout. $(P(x), Q(x))$ puede representarse como una combinación lineal de $P(x)$ y $Q(x)$.
Demostración: Por el Teorema 3.1.1., se puede escribir la expresión

$$Q(x) = C_1(x) \cdot R(x) + R_1(x)$$

y se mantiene que $(P(x), Q(x)) = (Q(x), R(x)) = (R(x), R_1(x))$. Tomando esto en cuenta y también que cada vez que se realice este paso los grados de los polinomios decrecerán, se puede afirmar que se llegará a una expresión de polinomios de la siguiente manera:

$$R_n(x) = R_{n+1}(x) \cdot C_{n+2}(x)$$

y claramente $R_{n+1}(x)$ es divisor de $R_n(x)$, entonces $(R_n(x), R_{n+1}(x)) = R_{n+1}(x)$. Por el Teorema 3.1.1., se puede trabajar "de atrás para adelante" y así se concluye que $(P(x), Q(x)) = R_{n+1}(x)$.

Trabajando de manera análoga a cuando se aplica el algoritmo euclideano de la división con números enteros, se trabaja "de atrás para adelante" y así se llega a una expresión en la que se representa $(P(x), Q(x))$ como una combinación lineal de $P(x)$ y $Q(x)$. ■

Ejemplo 3.1.2. Halle un polinomio $P(x)$ que sea divisible entre x^2+1 y que $P(x)+1$

es divisible entre $x^3 + x^2 + 1$.

Solución: Se pide que se hallen polinomios $S(x)$ y $T(x)$ tales que

$$P(x) = (x^2 + 1) \cdot S(x)$$

$$P(x) + 1 = (x^3 + x^2 + 1) \cdot T(x)$$

Entonces,

$$(x^2 + 1) \cdot S(x) = (x^3 + x^2 + 1) \cdot T(x) - 1$$
$$\Longrightarrow (x^3 + x^2 + 1) \cdot T(x) - (x^2 + 1) \cdot S(x) = 1$$

Por el Ejemplo 3.1.1., se sabe que $(x^3 + x^2 + 1,\ x^2 + 1) = 1$, entonces se puede usar el algoritmo euclideano para encontrar $S(x)$ y $T(x)$, retomando el trabajo del Ejemplo 3.1.1. "de atrás para adelante":

$$\begin{aligned} 1 &= (x^2 + 1) + x(-x) \\ &= (x^2 + 1) + x[(x^3 + x^2 + 1) - (x + 1)(x^2 + 1)] \\ &= (x^2 + 1)[1 - x(x + 1)] + x(x^3 + x^2 + 1) \\ &= (x^3 + x^2 + 1)x - (x^2 + 1)(x^2 + x - 1) \end{aligned}$$

Entonces, se puede tomar $S(x) = x^2 + x - 1$ y $T(x) = x$, y

$$\begin{aligned} P(x) &= (x^2 + 1)(x^2 + x - 1) \\ &= x^4 + x^3 + x - 1 \end{aligned}$$

2.4. Algoritmo de descarte de las raíces racionales de un polinomio

Para evaluar más eficazmente las raíces enteras de un polinomio de coeficientes enteros, se considera el teorema del cero racional en el que $a = \pm 1$ para obtener lo siguiente:

Teorema 3.4.1. Si m es una raíz entera de $P(x), m \notin \{-1, 0, 1\}$, entonces $m - 1$ y $m + 1$ son divisores de $P(1)$ y $P(-1)$, respectivamente.

Demostración: Se considera que

$$P(m) = 0 \Longrightarrow a_0 = -a_n m^n - a_{n-1}m^{n-1} - a_1 m^2 - a_1 m$$

y además que

$$\frac{P(1)}{m-1} = \frac{a_n + a_{n-1} + ... + a_1 + a_0}{m-1}$$

para obtener que

$$\begin{aligned} \frac{p(1)}{m-1} &= \frac{a_n + a_{n-1} + \cdots + a_1 - a_n m^n - a_{n-1}m^{n-1} - \cdots - a_1 m^2 - -a_1}{m-1} \\ &= -\frac{a_n(m^n - 1) + a_{n-1}(m^{n-1} - 1) + \cdots + a_2(m^2 - 1) + a_1(m - 1)}{m-1} \end{aligned}$$

Note que $m - 1 \mid m^k - 1\ \forall k \in \mathbb{Z}^+$, entonces $m - 1 \mid p(1)$. $m + 1 \mid p(-1)$ se prueba análogamente. ■

Si un entero es raíz de un polinomio, su inverso aditivo también lo es. Combinando esto con el Teorema 3.4.1., se obtienen los siguientes resultados:

- $m - 1 \mid P(1) \Longrightarrow -(m-1) = 1 - m \mid P(1)$.
- $m + 1 \mid P(-1) \Longrightarrow -(m+1) = -m - 1 \mid P(-1)$.

A su vez, de estos resultados se puede deducir que:

- $m \mp 1 \nmid P(\pm 1) \Longrightarrow P(m) \neq 0$.
- $m \pm 1 \nmid P(\pm 1) \Longrightarrow P(-m) \neq 0$.

Tomando en cuenta lo anterior, se diseña el siguiente **algoritmo de descarte de las raíces enteras de un polinomio**:

1. Factorizar para que $a_n = 1$ y se descarten o no las raíces -1, 0, 1, resultando así un polinomio $Q(x)$ que es la parte del polinomio que aun falta por factorizar.

2. Encontrar todos los divisores positivos del término de $Q(x)$.

3. Encontrar $\mid Q(1) \mid$ y $\mid Q(-1) \mid$.

4. Organizar los números en una cuadrícula de la siguiente forma:

$\mid Q(1) \mid$								$\mid Q(1) \mid$
	d_1	d_2	d_3	...	d_{r-2}	d_{r-1}	d_r	
$\mid Q(-1) \mid$								$\mid Q(-1) \mid$

donde d_i con $0 \leq i \leq r$ es un divisor del término constante de $Q(x)$.

5. Se descartan los divisores. Para esto se utiliza la siguiente simbología: si hay una diagonal $\searrow$ sobre la casilla de d_i, d_i se descarta, y si la diagonal es $\nearrow$, se descarta $-d_i$. Las diagonales se trazan según estos criterios:

- $d_i + 1 \nmid \mid P(-1) \mid \vee d_i - 1 \nmid \mid P(1) \mid \Longrightarrow$ se traza $\searrow$ sobre la casilla que contiene a d_i.
- $d_i - 1 \nmid \mid P(-1) \mid \vee d_i + 1 \nmid \mid P(1) \mid \Longrightarrow$ se traza $\nearrow$ sobre la casilla que contiene a d_i.

Ejemplo 3.4.1. Factorice $p(x) = 2x^8 + 50x^7 + 48x^6 - 2x^5 - 52x^4 - 96x^3 + 2x^2 + 48x$ usando el algoritmo de descarte.
Solución: Primero, es importante sacar el factor común:

$$P(x) = 2x(x^7 + 25x^6 + 24x^5 - x^4 - 26x^3 - 48x^2 + x + 24)$$

$$\Longrightarrow P_1(x) = x^7 + 25x^6 + 24x^5 - x^4 - 26x^3 - 48x^2 + x + 24$$

Ahora, se deben valorar:

$$\begin{aligned} P_1(1) &= 1 + 25 + 24 - 1 - 26 - 48 + 1 + 24 \\ &= 0 \\ P_1(-1) &= -1 + 25 - 24 - 1 + 26 - 48 - 1 + 24 \\ &= 0 \end{aligned}$$

Entonces, 1 y -1 son raíces de $P_1(x)$, y realizando la división sintética se encuentra que

$$P_1(x) = (x+1)(x-1)(x^5 + 25x^4 + 25x^3 + 24x^2 - x - 24)$$
$$\Longrightarrow P_2(x) = x^5 + 25x^4 + 25x^3 + 24x^2 - x - 24$$

Nuevamente, se evalúan

$$\begin{aligned} P_2(1) &= 1 + 25 + 25 + 24 - 1 - 24 \\ &= 50 \\ P_2(-1) &= -1 + 25 - 25 + 24 + 1 - 24 \\ &= 0 \end{aligned}$$

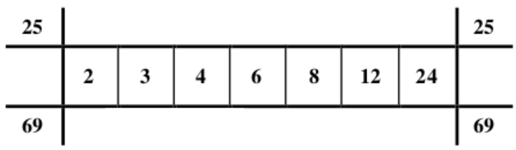
Lo cual indica que -1 es una raíz de $P_2(x)$, y así

$$P_2(x) = (x-1)(x+1)^2(x^4 + 24x^3 + x^2 + 23x - 24)$$
$$\Longrightarrow P_3(x) = x^4 + 24x^3 + x^2 + 23x - 24$$

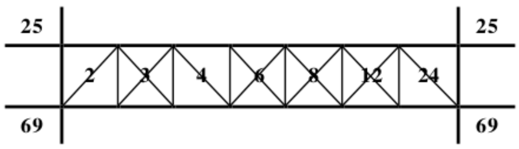
Se procede análogamente:

$$\begin{aligned} P_3(1) &= 1 + 24 + 1 + 23 - 24 \\ &= 25 \\ P_3(-1) &= 1 - 24 + 1 - 23 - 24 \\ &= -69 \end{aligned}$$

Entonces se puede proceder a aplicarle la segunda parte del algoritmo a $P_3(x)$. Los divisores positivos de -24 se muestran a continuación



Aplicando el paso 5, se obtiene lo siguiente:



Entonces, nada más se evalúan los siguientes valores de x:

$$\begin{aligned} P_3(2) &= (2)^4 + 24(2)^3 + (2)^2 + 23(2) - 24 \\ &= 234 \\ P_3(-4) &= (-4)^4 + 24(-4)^3 + (-4)^2 + 23(-4) - 24 \\ &= -1380 \\ P_3(-24) &= (-24)^4 + 24(-24)^3 + (-24)^2 + 23(-24) - 24 \\ &= 0 \end{aligned}$$

Esto quiere decir que la única raíz entera de $P_3(x)$ es -24, por lo que se obtendría que

$$P_3 = (x+24)(x^3+x^2-1)$$

Y entonces,

$$\begin{aligned} P(x) &= 2xP_1(x) \\ &= 2x(x-1)(x+1)P_2(x) \\ &= 2x(x-1)(x+1)^2P_3(x) \\ &= 2x(x-1)(x+1)^2(x+24)(x^3+x^2-1). \blacksquare \end{aligned}$$

3. Fórmulas de Viète

Si se tiene un polinomio cuadrático x^2+ax+c, con raíces α_1 y α_2, este se puede expresar y expandir de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} x^2+ax+c &= (x-\alpha_1)(x-\alpha_2) \\ &= x^2-(\alpha_1+\alpha_2)x+\alpha_1\alpha_2 \end{aligned}$$

Comparando coeficientes se obtiene que

$$a = -(\alpha_1+\alpha_2),\ b = \alpha_1\alpha_2$$

Esto se puede aplicar análogamente a un polinomio cúbico:

$$\begin{aligned} x^3+ax^2+bx+c &= (x-\alpha_1)(x-\alpha_2)(x-\alpha_3) \\ &= x^3-(\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3)x^2+(\alpha_1\alpha_2+\alpha_1\alpha_3+\alpha_2\alpha_3)x-\alpha_1\alpha_2\alpha_3 \end{aligned}$$

De lo que se obtiene

$$a = -(\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3),\ b = (\alpha_1\alpha_2+\alpha_1\alpha_3+\alpha_2\alpha_3),\ c = -\alpha_1\alpha_2\alpha_3$$

Ahora bien, existen relaciones similares con polinomios de grados mayores, que se resumen en las siguientes **fórmulas de Viète**:

Sean $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_{n-1}, \alpha_n$ los ceros de $P(x)$. En general, se cumple que:

$$\begin{cases} \alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_{n-1}+\alpha_n = -(\frac{a_{n-1}}{a_n}) \\ \alpha_1\alpha_2+\alpha_1\alpha_3+\cdots+\alpha_1\alpha_n+\alpha_2\alpha_3+\alpha_2\alpha_4+\cdots+\alpha_2\alpha_n+\cdots+\alpha_{n-1}\alpha_n = \frac{a_{n-2}}{a_n} \\ \qquad\qquad\qquad\qquad . \\ \qquad\qquad\qquad\qquad . \\ \qquad\qquad\qquad\qquad . \\ \alpha_1\cdot\alpha_2\cdot\ldots\cdot\alpha_{n-1}\cdot\alpha_n = (-1)^n(\frac{a_0}{a_n}) \end{cases}$$

Más formalmente, se dice que:

$$\sum_{1\le i_1<i_2<\ldots<i_k\le n} (\alpha_{i_1}\cdot\alpha_{i_2}\cdot\ldots\cdot\alpha_{i_{k-1}}\cdot\alpha_{i_k}) = (-1)^k(\frac{a_{n-k}}{a_n}),\ 1\le k\le n$$

Ejemplo 4.1. (3 OMCC 2016) El polinomio $Q(x) = x^3-21x+35$ tiene tres raíces reales diferentes, r, s y t. Encuentre $a, b \in \mathbb{R}$ tal que el polinomio $P(x) = x^2+ax+b$

cumple en algún orden que $P(r)=s, P(s)=t$ y $P(t)=r$.

Solución: Note que por Viète se tiene que

$$\begin{cases} r+s+t=0 \\ rs+st+tr=-21 \\ rst=-35 \end{cases}$$

Se necesita encontrar a,b que cumplan con las siguientes condiciones:

$$\begin{cases} r^2+ar+b=s \\ s^2+as+b=t \\ t^2+at+b=r \end{cases}$$

Sumando estas últimas tres ecuaciones, se obtiene que

$$r^2+s^2+t^2+a(r+s+t)+3b=r+s+t$$

Y sustituyendo con la primera fórmula de Viète, resulta que

$$r^2+s^2+t^2+3b=0$$

Si se toman la primera y la segunda fórmula de Viète, se puede llegar a que

$$(r+s+t)^2=0$$
$$r^2+s^2+t^2+2(rs+st+tr)=0$$
$$r^2+s^2+t^2=42$$

Esta nueva información se puede utilizar para llegar a que

$$42+3b=0$$
$$3b=-42$$
$$b=-14$$

Ahora, note que se cumple lo siguiente:

$$\begin{cases} r^3+ar^2-14r=sr \\ s^3+as^2-14s=ts \\ t^3+at^2-14t=rt \end{cases}$$

Y sumándolo todo, obtenemos que

$$r^3+ar^2-14r+s^3+as^2-14s+t^3+at^2-14t=sr+ts+rt$$
$$r^3+s^3+t^3+a(r^2+s^2+t^2)-14(s+r+t)=sr+ts+rt$$
$$r^3+s^3+t^3+42a=-21$$

Además, tenemos que

$$r^3+s^3+t^3-3rst=(r+s+t)(r^2+s^2+t^2-rs-st-tr)=0$$
$$r^3+s^3+t^3=-105$$

Sustituyendo,

$$-105+42a=-21$$
$$42a=84$$
$$a=2$$

$\therefore P(x)=x^2+2x-14.$ ∎

4. Transformaciones de polinomios

El encontrar las raíces racionales de un polinomio se puede facilitar mediante un simple cambio de variable, $y = x \cdot a_n$, que genera un nuevo polinomio $Q(y)$:

$$Q(y) = a_n^{n-1} P(\frac{y}{a_n}) = y^n + (a_{n-1})y^{n-1} + \cdots + (a_n)^{n-2} a_1 y + (a_n)^{n-1} a_0$$

Note que si este polinomio tiene raíces racionales, estas son necesariamente enteras por el Teorema del cero racional, que se expondrá en el próximo capítulo.

Ahora, si se tiene un $P(x)$ hay una manera de encontrar un polinomio $Q(x)$ tal que tiene como raíces a $\frac{1}{\alpha_1}, \frac{1}{\alpha_2}, ..., \frac{1}{\alpha_{n-1}}, \frac{1}{\alpha_n}$. Primero, se sabe que $P(\frac{1}{1/\alpha_i}) = 0$, entonces se define

$$Q(x) = P(\frac{1}{x}) = a_n(\frac{1}{x})^n + a_{n-1}(\frac{1}{x})^{n-1} + \cdots + a_1(\frac{1}{x}) + a_0$$

Multiplicando esto por x^n se obtiene

$$Q(x) = a_n + a_{n-1}x + \cdots + a_1 x^{n-1} + a_0 x^n$$

que es $P(x)$ pero con los coeficientes "al revés".

Similarmente se pueden encontrar los polinomios $Q(x)$ cuyas raíces son las de $P(x)$ pero multiplicadas por m. Se tiene que:

$$Q(x) = P(\frac{x}{m}) = a_n(\frac{x}{m})^n + a_{n-1}(\frac{x}{m})^{n-1} + \cdots + a_1(\frac{x}{m}) + a_0$$

Si se multiplica por m^n, encontramos que

$$Q(x) = a_n x^n + m a_{n-1}(x)^{n-1} + \cdots + m^{n-1} a_1 x + m^n a_0$$

Estos son algunos ejemplos de cómo se pueden transformar los polinomios para encontrar otros que tengan raíces que cumplan con cierta característica ligada a las raíces del polinomio original. Hay muchas otras formas de hacerlo que pueden ser útiles en problemas de polinomios.

Ejemplo 3.5.2. Se tienen los polinomios $P(x) = x^5 + x^2 + 1$ y $Q(x) = x^2 - 2$. Si $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5$ son las raíces de $P(x)$, determine $Q(\alpha_1) \cdot Q(\alpha_2) \cdot Q(\alpha_3) \cdot Q(\alpha_4) \cdot Q(\alpha_5)$.

Solución: Se expande el producto:

$$\begin{aligned}
Q(\alpha_1)\cdot \ldots \cdot Q(\alpha_5) &= (\alpha_1^2-2)(\alpha_2^2-2)(\alpha_3^2-2)(\alpha_4^2-2)(\alpha_5^2-2)\\
&= (\alpha_1^2\alpha_2^2-2\alpha_1^2-2\alpha_2^2+4)(\alpha_3^2\alpha_4^2-2\alpha_3^2-2\alpha_4^2+4)(\alpha_5^2-2)\\
&= [(\alpha_1^2\alpha_2^2)(\alpha_3^2\alpha_4^2-2\alpha_3^2-2\alpha_4^2+4\\
&-2\alpha_1^2(\alpha_3^2\alpha_4^2-2\alpha_3^2-2\alpha_4^2+4)\\
&-2\alpha_2^2(\alpha_3^2\alpha_4^2-2\alpha_3^2-2\alpha_4^2+4)\\
&+4(\alpha_3^2\alpha_4^2-2\alpha_3^2-2\alpha_4^2+4)](\alpha_5^2-2)\\
&= (\alpha_1^2\alpha_2^2\alpha_3^2\alpha_4^2-2\alpha_1^2\alpha_2^2\alpha_3^2-2\alpha_1^2\alpha_2^2\alpha_4^2+4\alpha_1^2\alpha_2^2\\
&-2\alpha_1^2\alpha_3^2\alpha_4^2+4\alpha_1^2\alpha_3^2+4\alpha_1^2\alpha_4^2-8\alpha_1^2\\
&-2\alpha_2^2\alpha_3^2\alpha_4^2+4\alpha_2^2\alpha_3^2+4\alpha_2^2\alpha_4^2-8\alpha_2^2\\
&+4\alpha_3^2\alpha_4^2-8\alpha_3^2-8\alpha_4^2+16)(\alpha_5^2-2)\\
&= \alpha_1^2\alpha_2^2\alpha_3^2\alpha_4^2\alpha_5^2-2\alpha_1^2\alpha_2^2\alpha_3^2\alpha_5^2-2\alpha_1^2\alpha_2^2\alpha_4^2\alpha_5^2+4\alpha_1^2\alpha_2^2\alpha_5^2\\
&-2\alpha_1^2\alpha_3^2\alpha_4^2\alpha_5^2+4\alpha_1^2\alpha_3^2\alpha_5^2+4\alpha_1^2\alpha_4^2\alpha_5^2-8\alpha_1^2\alpha_5^2\\
&-2\alpha_2^2\alpha_3^2\alpha_4^2\alpha_5^2+4\alpha_2^2\alpha_3^2\alpha_5^2+4\alpha_2^2\alpha_4^2\alpha_5^2-8\alpha_2^2\alpha_5^2\\
&+4\alpha_3^2\alpha_4^2\alpha_5^2-8\alpha_3^2\alpha_5^2-8\alpha_4^2\alpha_5^2+16\alpha_5^2\\
&-2\alpha_1^2\alpha_2^2\alpha_3^2\alpha_4^2+4\alpha_1^2\alpha_2^2\alpha_3^2+4\alpha_1^2\alpha_2^2\alpha_4^2-8\alpha_1^2\alpha_2^2\\
&+4\alpha_1^2\alpha_3^2\alpha_4^2-8\alpha_1^2\alpha_3^2-8\alpha_1^2\alpha_4^2+16\alpha_1^2\\
&+4\alpha_2^2\alpha_3^2\alpha_4^2-8\alpha_2^2\alpha_3^2-8\alpha_2^2\alpha_4^2+16\alpha_2^2\\
&-8\alpha_3^2\alpha_4^2+16\alpha_3^2+16\alpha_4^2-32\\
&= \alpha_1^2\alpha_2^2\alpha_3^2\alpha_4^2\alpha_5^2\\
&-2(\alpha_1^2\alpha_2^2\alpha_3^2\alpha_5^2+\alpha_1^2\alpha_2^2\alpha_4^2\alpha_5^2+\alpha_1^2\alpha_3^2\alpha_4^2\alpha_5^2+\alpha_2^2\alpha_3^2\alpha_4^2\alpha_5^2+\alpha_1^2\alpha_2^2\alpha_3^2\alpha_4^2)\\
&+4(\alpha_1^2\alpha_2^2\alpha_5^2+\alpha_1^2\alpha_3^2\alpha_5^2+\alpha_1^2\alpha_4^2\alpha_5^2+\alpha_2^2\alpha_3^2\alpha_5^2+\alpha_2^2\alpha_4^2\alpha_5^2\\
&+\alpha_3^2\alpha_4^2\alpha_5^2+\alpha_1^2\alpha_2^2\alpha_3^2+\alpha_1^2\alpha_2^2\alpha_4^2+\alpha_1^2\alpha_3^2\alpha_4^2+\alpha_2^2\alpha_3^2\alpha_4^2)\\
&-8(\alpha_1^2\alpha_5^2+\alpha_2^2\alpha_5^2+\alpha_3^2\alpha_5^2+\alpha_4^2\alpha_5^2+\alpha_1^2\alpha_2^2\\
&+\alpha_1^2\alpha_3^2+\alpha_1^2\alpha_4^2+\alpha_2^2\alpha_3^2+\alpha_2^2\alpha_4^2+\alpha_3^2\alpha_4^2)\\
&+16(\alpha_1^2+\alpha_2^2+\alpha_3^2+16\alpha_4^2+16\alpha_5^2)\\
&-32
\end{aligned}$$

Note que estas son las fórmulas de Viète, solo que corresponden a un polinomio cuyas raíces son el cuadrado de las raíces de $P(x)$. Entonces, mediante una transformación, se debe encontrar este polinomio para aplicarle las fórmulas de Viète.

Sea $y=\sqrt{x}$. Se define

$$\begin{aligned}
H(y) &= (y^2-\alpha_1^2)(y^2-\alpha_2^2)(y^2-\alpha_3^2)(y^2-\alpha_4^2)(y^2-\alpha_5^2)\\
&= (y+\alpha_1)(y-\alpha_1)\cdot\ldots\cdot(y+\alpha_5)(y-\alpha_5)\\
&= -[(-y)+\alpha_1](y-\alpha_1)\cdot\ldots\cdot-[(-y)+\alpha_5](y-\alpha_5)\\
&= (-1)^5\cdot P(-y)\cdot P(y)\\
&= -P(y)\cdot P(-y)
\end{aligned}$$

Es importante acotar que, como $y=\sqrt{x}$, esto significa que todos los exponentes de y en $P(y)\cdot P(-y)$ deben ser pares para que $H(x)$ sea un polinomio. Sin embargo, en el Ejemplo (*) ya se probó que $P(y)\cdot P(-y)$ solo tiene exponentes pares. Entonces, se puede proseguir.

$$\begin{aligned}H(y) &= -(y^5+y^2+1)(-y^5+y^2+1)\\ &= -(-y^{10}+y^7+y^5-y^7+y^4+y^2-y^5+y^2+1)\\ &= -(-y^{10}+y^4+2y^2+1)\\ &= y^{10}-y^4-2y^2-1\end{aligned}$$

Entonces, $H(x) = x^5 - x^2 - 2x - 1$.

Por las fórmulas de Viète se tiene que

$$\begin{cases}\sum\limits_{1\leq i_1} (\alpha_{i_1}^2 \leq n) = 0\\ \sum\limits_{1\leq i_1<i_2\leq n} (\alpha_{i_1}^2 \cdot \alpha_{i_2}^2) = 0\\ \sum\limits_{1\leq i_1<i_2<i_3\leq n} (\alpha_{i_1}^2 \cdot \alpha_{i_2}^2 \cdot \alpha_{i_3}^2) = 1\\ \sum\limits_{1\leq i_1<i_2<\ldots<i_4\leq n} (\alpha_{i_1}^2 \cdot \alpha_{i_2}^2 \cdot \ldots \cdot \alpha_{i_4}^2) = -2\\ \sum\limits_{1\leq i_1<i_2<\ldots<i_5\leq n} (\alpha_{i_1}^2 \cdot \alpha_{i_2}^2 \cdot \ldots \cdot \alpha_{i_5}^2) = 1\end{cases}$$

Por ende, se tiene que

$$\begin{aligned}Q(\alpha_1)\cdot \ldots \cdot Q(\alpha_5) &= 1-2(-2)+4(1)-8(0)+16(0)-32\\ &= -23. \blacksquare\end{aligned}$$

Ejemplo 3.5.3. Pruebe que el polinomio $P(x) = x^{2n} - 2x^{2n-1} + 3x^{2n-2} - \cdots - 2nx + 2n+1$ no tiene raíces reales.

Solución: Se considera primero $x \leq 0$. Note que, como los signos de los términos impares son negativos, al introducir un x negativo el término será positivo. Además, los x de los términos pares se elevan al cuadrado y por ende se vuelven positivos. Entonces, para $x \leq 0$, $P(x) > 0$.

Ahora, se toma en cuenta nada más $x > 0$. Para esto, se transforma P(x):

$$xP(x) = x^{2n+1} - 2x^{2n} + 3^{2n-1} + \cdots + (2n+1)x$$

Se le puede sumar esto a $P(x)$ para obtener

$$xP(x) + x = x^{2n+1} - x^{2n} + x^{2n-1} + \cdots + x + 2n + 1$$

$$\implies (1+x)P(x) = x \cdot \frac{1+x^{2n+1}}{1+x} + 2n + 1$$

Note que $1+x$ y el lado derecho de esta ecuación son siempre positivos, por lo que $P(x)$ también positivo cuando $x > 0$. Entonces, $P(x) > 0 \forall x \in \mathbb{R}$.

$\therefore P(x)$ no tiene raíces reales. $\blacksquare$

4.1. Fracciones parciales

Teorema de la descomposición en fracciones parciales. Sea $\frac{P(x)}{Q(x)}$ una fracción racional tal que $\deg(P) < \deg(Q)$. Existen fracciones algebraicas $F_1, F_2, ..., F_{r-1}, F_r$ tales que

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = F_1 + F_2 + ... + F_{r-1} + F_r$$

donde F_i puede ser de cualquiera de estas dos formas:

$$\frac{A_i}{(a_i x + b_i)^{n_i}} \lor \frac{A_k x + B_k}{(a_k x^2 + b_k x + c_k)^{m_k}}$$

donde $A_i, a_i, b_i, A_k, B_k, a_k, b_k, c_k \in \mathbb{R},\ n_i, m_k \in \mathbb{Z}^+$ y cada $a_k x^2 + b_k x + c_k$ tiene un discriminante negativo.

Demostración: La demostración de este teorema se basa en dos lemas.

Lema 3.5.1. Si $P(x) = \frac{S(x)}{T(x)\ \cdot\ U(x)}$, con $(T(x), U(x)) = 1$, entonces existen los polinomios $V(x)$ y $W(x)$ tales que

$$P(x) = \frac{V(x)}{T(x)} + \frac{W(x)}{U(x)}$$

Prueba: como $(T(x), U(x)) = 1$, entonces existen polinomios $E(x)$ y $F(x)$ tales que

$$1 = E(x) \cdot T(x) + F(x) \cdot U(x)$$

y se multiplica esta ecuación por $S(x)$, se tiene que

$$S(x) = S(x) \cdot E(x) \cdot T(x) + S(x) \cdot F(x) \cdot U(x).$$

Dividiendo ambos lados entre $T(x) \cdot U(x)$,

$$\begin{aligned} \frac{S(x)}{T(x) \cdot U(x)} &= \frac{S(x) \cdot E(x) \cdot T(x)}{T(x) \cdot U(x)} + \frac{S(x) \cdot F(x) \cdot U(x)}{T(x) \cdot U(x)} \\ \Longrightarrow P(x) = \frac{S(x)}{T(x) \cdot U(x)} &= \frac{S(x) \cdot E(x)}{U(x)} + \frac{S(x) \cdot F(x)}{T(x)} \end{aligned}$$

Basta con tomar $V(x) = S(x) \cdot E(x)$ y $W(x) = S(x) \cdot F(x)$. □

Lema 3.5.2. Si $A(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$, entonces existe un polinomio $G(x)$ y para $1 \leq i \leq m$ existen polinomios $s_i(x)$ con grados menores a $Q(x)$ tales que

$$A(x) = \frac{P(x)}{[Q(x)]^m} = G(x) + \frac{S_1(x)}{Q(x)} + \frac{S_1(x)}{[Q(x)]^2} + ... + \frac{S_{m-1}(x)}{[Q(x)]^{m-1}} + \frac{S_m(x)}{[Q(x)]^m}$$

Prueba: por el algoritmo de la división, se tiene que $P(x) = Q(x) \cdot Q_1(x) + R_1(x)$. Note que el grado de $R_1(x)$ es menor al de $Q(x)$.

Ahora, dividiedo $Q_1(x)$ entre $Q(x)$, se obtiene un segundo cociente y residuo:

$$\begin{aligned} P(x) &= Q(x) \cdot [Q(x) \cdot Q_2(x) + R_2(x)] + R_1(x) \\ &= [Q(x)]^2 \cdot Q_2(x) + Q(x) \cdot R_2(x) + R_1(x), \text{ notando que } \deg(R_2) < deg(Q). \end{aligned}$$

Dividiendo $Q_2(x)$ entre $Q(x)$:

$$\begin{aligned} P(x) &= [Q(x)]^2 \cdot [Q(x) \cdot Q_3(x) + R_3(x)] + Q(x) \cdot R_2(x) + R_1(x)] \\ &= [Q(x)]^4 \cdot [Q_4(x) + [Q(x)]^3 \cdot R_4(x) + +[Q(x)]^2 \cdot R_3(x) + Q(x) \cdot R_2(x) + R_1(x)] \\ &= [Q(x)]^m \cdot [Q_m(x) + [Q(x)]^{m-1} \cdot R_m(x) + [Q(x)]^{m-2} \cdot R_{m-1}(x) + ... + Q(x) \cdot R_2(x) + R_1(x)] \end{aligned}$$

Finalmente, al dividir entre $[Q(x)]^m$ se tiene que

$$P(x) = Q_m(x) + \frac{R_m(x)}{Q(x)} + ... + \frac{R_3(x)}{[Q(x)]^{m-2}} + \frac{R_2(x)}{[Q(x)]^{m-1}} + ... + \frac{R_1(x)}{[Q(x)]^m}$$

Ahora, basta con tomar $G(x) = Q_m(x)$ y $s_i(x) = R_{m-i+1}(x)$. □

Ya se puede proceder a la demostración propia del teorema. Por el Teorema de los factores lineales y cuadráticos irreducibles, se obtiene lo siguiente

$$Q(x) = \left[\prod_{i=1}^{j}(a_i x + b_i)^{p_i}\right] \cdot \left[\prod_{k=1}^{l}(a_k x^2 + b_k x + c_k)^{q_k}\right]$$

donde para cada i, $(a_i x + b_i)$ es un factor lineal real de $Q(x)$ con multiplicidad p_i y por cada k, $(a_k x^2 + b_k x + c_k)$ es un factor cuadrático irreducible de $Q(x)$ con multiplicidad de q_k. Los a_i, b_i son distintos de los a_k, b_k. Se sabe que los factores lineales reales y los cuadráticos irreducibles tienen como máximo común divisor a 1, entonces el Lema 3.5.1. permite decir que:

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{A(x)}{\prod\limits_{i=1}^{j}(a_i x + b_i)^{p_i}} + \frac{B(x)}{\prod\limits_{k=1}^{l}(a_k x^2 + b_k x + c_k)^{q_k}}$$

Nótese que para cada i distinto, cada $(a_i x + b_i)^{p_i}$ es diferentes, entonces se aplica el Lema 3.5.1 $j - 1$ veces para que la primera fracción de la expresión se convierta en una suma de j fracciones. Para los términos con una fracción con multiplicidad mayor o igual que 2 en el denominador, se aplica el Lema 3.5.2 $p_i - 1$ veces para obtener otras p_i fracciones. Se puede aplicar este procedimiento análogamente al segundo término de la expresión original.

Es importante aclarar que el término $G(x)$ del Lema 3.5.2 sería un polinomio 0, ya que se asume que el grado de $P(x)$ es estrictamente menor al de $Q(x)$.

$\therefore$ La fracción original se puede descomponer en una suma de fracciones puramente algebraicas. ■

Ejemplo 3.5.4. Descomponga la siguiente expresión en fracciones parciales

$$\frac{8x^3 + 13x}{x^4 + 4x^2 + 4}$$

Solución: El denominador se puede factorizar como $(x^2 + 2)^2$. Por ende, se necesita encontrar A, B, C y D tales que $\dfrac{Ax + B}{x^2 + 2} + \dfrac{Cx + D}{(x^2 + 2)^2} = \dfrac{8x^3 + 13x}{x^4 + 4x^2 + 4}$. Si se multiplican ambos lados por $(x^2 + 2)^2$, se obtiene que

$$8x^3 + 13x = (Ax + B)(x^2 + 2) + Cx + D$$

$$\Longrightarrow 8x^3 + 13x = Ax^3 + 2Ax + Bx^2 + 2B + Cx + D$$

$$\Longrightarrow 8x^3 + 13x = Ax^3 + Bx^2 + x(2A + C) + 2B + D$$

Desde aquí se puede proceder comparando coeficientes. Primero se encuentra que que $A = 8$ y $B = 0$. Entonces,

$$2A + C = 13 \Longrightarrow 16 + C = 13 \Longrightarrow C = -3$$

y

$$2B + D = 0 \Longrightarrow D = 0$$

$\therefore \dfrac{8x^3 + 13x}{x^4 + 4x^2 + 4} = \dfrac{8x}{x^2 + 2} - \dfrac{3x}{(x^2 + 2)^2}$. ■

4.2. Ecuaciones recíprocas

Se dice que $P(x)$ es **recíproco** si $a_i = a_{n-i}$ $\forall i \in \mathbb{N}_{\leq n}$. Una ecuación en la que se iguala un polinomio recíproco a cero se denomina **ecuación recíproca**. A continuación algunas de las propiedades de los polinomios recíprocos de primer tipo:

- $P(x)$ es recíproco $\iff$ $x^n P(\frac{1}{x}) = P(x)$.
- Todo $P(x)$ recíproco de grado impar es divisible entre $x+1$ y su cociente es un polinomio recíproco de grado par.
- Su m es un cero de la ecuación recíproca $P(x)=0$, entonces $\frac{1}{m}$ también lo es.

Teorema 6.1. Un $P(x)$ recíproco de grado $2n$ puede ser escrito de la forma $P(x) = x^n Q(y)$, donde $y = x + \frac{1}{x}$ y $Q(y)$ tiene grado n.
Demostración:

$$\begin{aligned}
P(x) &= a_0x^{2n} + a_1x^{2n-1} + ... + a_1x + a_0 \\
&= x^n(a_0x^n + a_1x^{n-1} + ... + \frac{a_1}{x^{n-1}} + \frac{a_0}{x^n}) \\
&= x^n[a_0(x^n + \frac{1}{x^n}) + a_1(x^{n-1} + \frac{1}{x^{n-1}}) + ... + a_{n-1}(x + \frac{1}{x}) + a_n] \\
&= x^n[a_0(y)^n + a_1(y)^{n-1} + ... + a_{n-1}y + a_n] \\
&= x^nQ(y)
\end{aligned}$$

Ahora bien, si tenemos un polinomio $\widetilde{P}(x)$ tal que $a_i = -a_{n-i}$ $\forall i \in \mathbb{N}_{\leq n}$, podemos convertirlo en un recíproco haciendo lo siguiente:

- Si $\widetilde{P}(x)$ es de grado impar, entonces $x=1$ es una raíz. Al quitar el factor $(x-1)$, el polinomio restante es recíproco de grado par.
- Si $\widetilde{P}(x)$ es de grado par, entonces $x=1$ y $x=-1$ son raíces de este. Al quitar el factor (x^2-1), el polinomio restante es recíproco de grado par.

Ejemplo 6.3. Resuelva la ecuación $x^5 - 5x^4 + 9x^3 - 9x^2 + 5x - 1 = 0$.
Solución: Se toma $\widetilde{P}(x) = x^5 - 5x^4 + 9x^3 - 9x^2 + 5x - 1$. Como este es de la forma $\widetilde{P}$ y de grado impar. entonces se sabe que $x=1$ es una raíz, y se encuentra por división sintética que $\widetilde{P} = (x-1)(x^4 - 4x^3 + 5x^2 - 4x + 1)$.
Se define

$$\begin{aligned}
A(x) &= x^4 - 4x^3 + 5x^2 - 4x + 1 \\
&= x^2[x^2 - 4x + 5 - 4(\frac{1}{x}) + \frac{1}{x^2}] \\
&= x^2[x^2 + \frac{1}{x^2} - 4(x + \frac{1}{x}) + 5]
\end{aligned}$$

Se procede con un cambio de variable

$$y = x + \frac{1}{x}$$

$$\implies y^2 = x^2 + 2 + \frac{1}{x^2}$$

$$\Longrightarrow y^2 - 2 = x^2 + \frac{1}{x^2}$$

Entonces

$$\begin{aligned} A(x) &= x^2(y^2 - 2 - 4y + 5) \\ &= x^2(y^2 - 4y + 3) \\ &= x^2(y-1)(y-3) \\ &= (x^2 - x + 1)(x^2 - 3x + 1) \end{aligned}$$

Por ende, se tiene que $\widetilde{P}(x) = (x-1)(x^2 - x + 1)(x^2 - 3x + 1)$. Mediante el uso de la fórmula general se encuentra que $x \in \{1, \frac{1 \pm i\sqrt{3}}{2}, \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}\}$. ■

5. Polinomios con coeficientes enteros o racionales

5.1. Teorema del cero racional

Teorema del cero racional. Sea $\frac{b}{a}$ un número racional en su forma más simplificada.

$$P(\tfrac{b}{a}) = 0 \iff b \mid a_0 \ \wedge \ a \mid a_n$$

. *Demostración*: Se tiene que

$$P(\tfrac{b}{a}) = a_n(\tfrac{b}{a})^n + a_{n-1}(\tfrac{b}{a})^{n-1} + ... + a_1(\tfrac{b}{a}) + a_0$$

Si se multiplica esto por a^b, resulta que:

$$a_n b^n + a_{n-1}b^{n-1}a + ... + a_1 b a^{n-1} + a_0 a^n$$

$$\Longrightarrow b(a_n b^{n-1} + a_{n-1}b^{n-2}a + ... + a_2 b a^{n-2} + a_1 a^{n-1}) = -a_0 a^n$$

Note que el lado izquiero de esta última ecuación es divisible entre b. Además, $(b, a) = 1$, entonces b debe dividir a a_0.

Reordenando (1), se tiene que

$$a_n b^n = -a(a_{n-1}b^{n-1} + a_{n-2}b^{n-2}a + ... + a_1 b a^{n-2} + a_0 a^{n-1})$$

Ahora, el lado derecho de la ecuación es divisible entre a, y $(b, a) = 1$, entonces a debe dividir a a_n. ■

Corolario. $P(\frac{b}{a}) = 0 \Longrightarrow (b - ak)$ es un factor de $P(k)$ $\forall k \in \mathbb{R}$.

El Teorema del cero racional implica que si el polinomio es **mónico**, es decir, si $a_n = 1$, entonces todas sus raíces racionales son enteras.

Ejemplo 3.3.3. Sean a, b y c números naturales tales que:

$$ab(c + ab^2) + c^2(b^2c + a^3) = b^2c(a^2c + b) + a(a^2b + c^3)$$

Demuestre que al menos uno de los números a, b o c es un cuadrado perfecto.

Solución: Este problema se puede resolver fácilmente mediante agrupación. Sin embargo, sirve para ilustrar algunos conceptos de polinomios.

Se empieza organizando la expresión de manera que se pueda visualizar como un polinomio de variable a.

$$\begin{aligned}
&abc + a^2b^3 + c^3b^2 + a^3c^2 = a^2b^2c^2 + b^3c + a^3b + ac^3 \\
&\Longrightarrow a^3c^2 - a^3b + a^2b^2 - a^2b^2c^2 + abc - ac^3 + b^2c^3 - b^3c \\
&\Longrightarrow a^3(c^2 - b) + a^2(b^3 - b^2c^2) + a(bc - c^3) + b^2c^3 - b^3c = 0
\end{aligned}$$

Por el Teorema del cero racional, es posible que $a = b^2$ sea una raíz, ya que divide al término independiente, por lo que se realiza inspección para comprobar que lo divide.

$$\begin{array}{r|cccc}
b^2 & c^2 - b & b^3 - b^2c^2 & bc - c^3 & b^2c^3 - b^3c \\
 & & b^2c^2 - b^3 & 0 & -b^2c^3 + b^3c \\
\hline
 & c^2 - b & 0 & bc - c^3 & 0
\end{array}$$

Entonces,

$$\begin{gathered}
(a - b^2)[a(c^2 - b) - c^3 + bc] = 0 \\
(a - b^2)[a(c^2 - b) - (c^2)(c^2 - b)] = 0 \\
(a - b^2)(c^2 - b)(a - c^2) = 0
\end{gathered}$$

Los tres casos serían los siguientes

$$\begin{aligned}
&a - b^2 = 0 \ \vee \ c^2 - b = 0 \ \vee \ a - c^2 = 0 \\
&\Longrightarrow a = b^2 \ \vee \ c^2 = b \ \vee \ a = c^2
\end{aligned}$$

Es decir, alguno entre a, b y c es un cuadrado perfecto. $\blacksquare$

5.2. Propiedad de Campos

Como se vio en capítulos anteriores, un corolario del Teorema del factor es que

$$x - y \mid P(x) - P(y)$$

Ya se ha visto que este corolario funciona cuando $x - y$ es un polinomio, pero también es útil saber que funciona con enteros a y b.

$$a - b \mid P(a) - P(b)$$

es decir, se puede escribir

$$P(x) = (a - b)Q(x)$$

donde $a - b$ es un entero.

Ejemplo (1 USAMO 1974). Sea $P(x)$ un polinomio con coeficientes enteros. Demostrar que no existen enteros distintos a, b, c tales que $P(a) = b, P(b) = c$ y $P(c) = a$

simultáneamente.

Solución: Por el corolario del Teorema del factor, se tiene que

$$\begin{aligned} a-b &\mid P(a)-P(b) \\ a-c &\mid P(a)-P(c) \\ b-c &\mid P(b)-P(c) \end{aligned}$$

Entonces,

$$\begin{aligned} &a-b \mid b-c \\ &a-c \mid b-a \Longrightarrow a-c \mid a-b \\ &b-c \mid c-a \Longrightarrow b-c \mid a-c \end{aligned}$$

Se tiene que

$$\begin{aligned} &a-b \leq b-c \leq a-c \leq a-b \\ &\Longrightarrow a=b=c. \blacksquare \end{aligned}$$

5.3. (C) Criterios de irreducibilidad

Lema de Gauss. Si $P(x)$ tiene coeficientes enteros y puede ser factorizado como el producto de dos polinomios de coeficientes racionales, entonces $P(x)$ puede ser factorizado como el producto de dos polinomios con coeficientes enteros.

Demostración:

6. Raíces de polinomios

6.1. Pequeña introducción a los números complejos

Es evidente que la ecuación $x^2 = c$ no tiene soluciones reales para $c \in \mathbb{R}^-$. Por ende, $\sqrt{c}$ pertenece al conjunto de los **números imaginarios** ($\mathbb{I}$).

Ahora, se tiene que

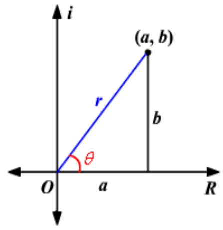
$$\begin{aligned} c &= -1 \cdot -c \\ \sqrt{c} &= \sqrt{-1 \cdot -c} \\ &= \sqrt{-1} \cdot \sqrt{-c} \end{aligned}$$

donde $\sqrt{-c}$ sí es un número real. Esto introduce el símbolo $i = \sqrt{-1}$, que se usa para representar los números imaginarios. En este caso, $c = \pm i\sqrt{-c}$.

Existe un conjunto que contiene tanto a los números reales como a los imaginarios, denominado el conjunto de los **números complejos** ($\mathbb{C}$). A estos usualmente se les representa con una z, y son de la forma $z = a + ib$, con $a, b \in \mathbb{R}$. El **conjugado** de z es $z^* = a - ib$.

$\mathrm{Re}(z) = a$ es la **parte real** y $\mathrm{Im}(z) = b$ es la **parte imaginaria** de z. Si $a = 0$, entonces z es puramente imaginario, y si $b = 0$, z es real. Además, se dice que dos números complejos z_1 y z_2 son iguales si y solo si $\mathrm{Re}(z_1) = \mathrm{Re}(z_2) \wedge \mathrm{Im}(z_1) = \mathrm{Im}(z_2)$.

Otra forma de visualizar los números complejos es la geométrica, usando el **plano de Argand**, también conocido como el **plano complejo**, en el cual el eje x representa



Re(z) y el eje y representa Im(z). z se puede visualizar como:

$r = \sqrt{a^2 + b^2}$ se conoce como la **magnitud** de z, representada como $\mid z \mid$. A su vez, z se puede escribir usando razones trigonométricas: $z = \mid z \mid (cos(\theta) + isen(\theta)) = \mid z \mid (cis(\theta))$. A esto se le conoce como **forma polar**.

El tema de los números complejos es muy amplio, pero para este documento solo se necesitan estas definiciones básicas.

6.2. Teorema fundamental del álgebra

Teorema fundamental del álgebra (TFA). $\forall P(x)\ \exists \alpha \in \mathbb{C}$ tal que $f(\alpha) = 0$, es decir, todo polinomio tiene un **cero**, o **raíz**, complejo.

Demostración: La demostración de este teorema es excelente, pero el margen es demasiado pequeño para escribirla[1].

Corolario. Tomando $\alpha_k \in \mathbb{C}\ \forall k \in \mathbb{N}_{\leq n}$, se tiene que cualquier polinomio puede ser factorizado como

$$P(x) = a_n(x - \alpha_1)(x - \alpha_2) \cdot ... \cdot (x - \alpha_{n-1})(x - \alpha_n)$$

Si un factor aparece más de una vez, decimos que ese factor tiene **multiplicidad**, lo cual implica que hay menos de n ceros y que la suma de las multiplicidades es igual a n. Más formalmente,

$$P(x) = a_n(x - \alpha_1)^{p_1}(x - \alpha_2)^{p_2} \cdot ... \cdot (x - \alpha_{k-1})^{p_{k-1}}(x - \alpha_k)^{p_k} \text{ con } k, p_r \in \mathbb{N}_{<n} \text{ y } \sum_{r=1}^{k} p_r = n$$

. **Teorema 3.2.1.** El número de raíces de un polinomio no constante es menor a su grado. Si no se cumple, es porque el polinomio es constante e igual a cero.

Demostración: Se procede por contradicción. Asuma que $P(x)$ tiene $n+1$ raíces. $P(x)$ se puede dividir entre $(x - a)$ y $\frac{P(x)}{x-a}$ resultará en un polinomio de grado $n - 1$. Si se continua de esta manera, se llegaría a un polinomio constante y $\frac{c}{x-\alpha_{n+1}}$ también tendría que ser un polinomio, lo cual evidentemente no es posible. $\Rightarrow\Leftarrow$ ■

Teorema de la raíz compleja conjugada. Sea $P(x) \in \mathbb{Q}[x]$, $a, b \in \mathbb{Q}$ y $\sqrt{c} \in \mathbb{I}$. Si $a + b\sqrt{c}$ es una raíz de $P(x)$, entonces $a - b\sqrt{c}$ también es una raíz.

Demostración: Asuma que $a + b\sqrt{c}$ es una raíz y que $b \neq 0$ (porque sino es trivial que se cumple el teorema). Se define

$$\begin{aligned} T(x) &= [x - (a + b\sqrt{c})][x - (a - b\sqrt{c})] \\ &= (x - a)^2 - b^2 c \end{aligned}$$

[1]Toda una comediante. La verdad es que la demostración es muy avanzada para este texto.

Utilizando el algoritmo euclideano de la división, se tiene que

$$P(x) = Q(x) \cdot T(x) + R(x)$$

y como $T(x)$ es cuadrático, el grado de $R(x)$ puede ser 1 ó 0.

Asuma que $R(x) = Cx + D$, donde C, D son racionales porque $P(x) \in \mathbb{Q}[x]$. Se tiene que:

$$P(x) = T(x) \cdot Q(x) + Cx + D$$

y si se sustituye x por $a + b\sqrt{c}$, se tiene por el Teorema del factor que

$$\begin{aligned} &0 = C(a + b\sqrt{c}) + D \\ &\implies -D = C(a + b\sqrt{c}) \\ &\implies C, D = 0. \end{aligned}$$

Entonces, $P(x) = T(x) \cdot Q(x)$. Tomando $x = a - b\sqrt{c}$,

$$\begin{aligned} P(a - b\sqrt{c}) &= T(a - b\sqrt{c}) \cdot Q(a - b\sqrt{c}) \\ &= 0 \end{aligned}$$

porque $a - b\sqrt{c}$ es una raíz de $T(x)$.

$\therefore$ por el Teorema del factor, $a - b\sqrt{c}$ es una raíz de $P(x)$. $\blacksquare$

Teorema de la raíz compleja conjugada. Si $P(x) \in \mathbb{R}[x]$, el número complejo z es un cero de $P(x)$ si y solo si z^* también lo es.

Demostración: Se tiene que $P(z) = 0$. Usando las propiedades de las operaciones con números complejos, se tiene que:

$$\begin{aligned} P(z*) &= a_n(z^*)^n + a_{n-1}(z^*)^{n-1} + ... + a_1(z^*) + a_0 \\ &= a_n(z^n)^* + a_{n-1}(z^{n-1})^* + ... + a_1(z)^* + a_0 \\ &= (a_n z^n)^* + (a_{n-1}z^{n-1})^* + ... + (a_1 z)^* + a_0 \\ &= (a_n z^n + a_{n-1}z^{n-1} + ... + a_1 z + a_0)^* \\ &= (P(z))^* = 0^* = 0. \blacksquare \end{aligned}$$

Ejemplo. (5 OMCC 2008) Halle un polinomio a $P(x)$ con coeficientes reales tal que

$$(x + 10)\, P\,(2x) = (8x - 32)\, P\,(x + 6)$$

Para todo x real y $P(1) = 210$. Verifique que el polinomio encontrado cumpla las condiciones.

Solución: Se comienza evaluando los posibles ceros de los polinomios. Para empezar, se toma $x = -10$, entonces

$$\begin{aligned} &0 = [8(-10) - 32]P(-10 + 6) \\ &\implies 0 = (-112)P(-4) \\ &\implies P(-4) = 0 \end{aligned}$$

Lo cual implica que $x + 4$ es un factor de $P(x)$. Ahora, se toma $x = 4$.

$$\begin{aligned} &(4 + 10)P(8) = 0 \\ &\implies 14P(8) = 0 \\ &\implies P(8) = 0 \end{aligned}$$

Lo cual implica que $x-8$ es un factor de $P(x)$. Entonces,

$$P(x) = (x+4)(x-8)A(x), \text{ donde } A(x) \text{ es un polinomio.}$$

Por ende, se tiene que

$$\begin{aligned} P(2x) &= (2x+4)(2x-8)A(2x) \\ \wedge\ P(x+6) &= (x+10)(x-2)A(x+6) \end{aligned}$$

Sustituyendo en la ecuación original:

$$4(x+10)(x+2)(x-4)A(2x) = 8(x-4)(x+10)(x-2)A(x+6)$$

$$\implies (x+2)A(2x) = (2x-2)A(x+6)$$

Ahora, se puede hacer lo mismo que se hizo con $P(x)$ con $A(x)$. Se toma $x=-2$.

$$\begin{aligned} 0 &= 2(-3)A(-2+6) \\ 0 &= A(4) \end{aligned}$$

Y también se puede tomar $x=2$.

$$\begin{aligned} 4A(4) &= 0 \\ A(4) &= 0 \end{aligned}$$

Entonces,

$$P(x) = (x+4)(x-8)(x-4)B(x), \text{ donde } B(x) \text{ es un polinomio.}$$

Y

$$\begin{aligned} P(2x) &= (2x+4)(2x-8)(2x-4)B(2x) \\ \wedge\ P(x+6) &= (x+10)(x-2)(x+2)B(x+6) \end{aligned}$$

Entonces, sustituyendo nuevamente, se tiene que

$$8(x+10)(x+2)(x-4)(x-2)B(2x) = 8(x-4)(x+10)(x-2)(x+2)B(x+6)$$

$$\implies B(2x) = B(x+6)$$

En este momento es importante observar los coeficientes principales de $B(2x)$ y $B(x+6)$, que serían $x^n 2^n a_n$ y $(x+6)^n a_n$, respectivamente. Note que, si $n>0$, entonces los coeficientes serían diferentes, por lo que la única opción es que $n=0$ y entonces $B(x)$ es de grado 0, es decir, constante.

Para encontrar el valor de $B(x)$, se toma $x=1$.

$$P(1) = (5)(-7)(-3)B(1)$$

$$\implies 210 = 105B(1)$$

$$\implies 2 = B(1)$$

$$\implies B(x) = 2.$$

Entonces, se tiene que

$$\begin{aligned} P(x) &= 2(x+4)(x-8)(x-4) \\ &= 2(x^2-16)(x-8) \\ &= 2(x^3-8x^2-16x+128) \\ &= 2x^3-16x^2-32x+256. \ \blacksquare \end{aligned}$$

6.3. Polinomios con coeficientes reales

Teorema de los factores lineales y cuadráticos irreducibles. Si $P(x)$ tiene coeficientes reales, entonces puede ser escrito como el producto de factores lineales y cuadráticos irreducibles, y la suma de los grados de estos factores es $\deg(P)$.

Demostración: Note que si todas las raíces $P(x)$ son reales, entonces $P(x)$ es únicamente el producto de factores lineales.

Ahora, si algún α_i es un número complejo no real, por el Teorema de la raíz conjugada se puede emparejar con un α_j que sea su conjugado. Entonces, se define $\alpha_i = a + ib$ y $\alpha_j = a - ib$.

Los factores que contienen α_i y α_j son $(x - \alpha_i)(x - \alpha_j) = x^2 - (\alpha_i + \alpha_j)x + \alpha_i\alpha_j = x^2 - (2a)x + (a^2 + b^2)$

La discriminante de esta expresión es

$$\begin{aligned}
&(2a)^2 - 4(a^2 + b^2 \\
&= 4a^2 - 4a^2 - 4b^2 \\
&= -4b^2 < 0, \text{ porque } b \neq 0.
\end{aligned}$$

Esto indica que esta expresión cuadrática es irreducible. Entonces, simplemente se toman todas las parejas de raíces conjugadas y se multiplican, resultando en un polinomio cuadrático irreducible. Además, las raíces reales se encuentran en factores que son lineales. Esto basta para probar el teorema. ■

6.4. Cotas de Cauchy

El próximo teorema es útil al buscar ceros de polinomios, ya que da el intervalo en el que pueden estar las raíces reales.

Teorema de las cotas de Cauchy. Sea $M = \text{máx}\{\mid \frac{a_0}{a_n} \mid, \mid \frac{a_1}{a_n} \mid, ..., \mid \frac{a_{n-2}}{a_n} \mid, \mid \frac{a_{n-1}}{a_n} \mid\}$ Todos los ceros posibles de $P(x)$ se encuentran en el intervalo $[-(M + 1),\ M + 1]$.

Demostración: Queda como ejercicio para la persona lectora[2].

Ejemplo. Sea $P(x) = 2x^4 + 4x^3 - x^2 - 6x - 3$. Determine el intervalo que contiene todos los ceros reales de $P(x)$.

Solución: Primero se debe encontrar M. Se tiene la siguiente lista:

$$\begin{aligned}
\mid a_4 \mid &= \mid 2 \mid = 2 \\
\mid a_3 \mid &= \mid 4 \mid = 4 \Longrightarrow \frac{\mid a_3 \mid}{\mid a_4 \mid} = \frac{4}{2} = 2 \\
\mid a_2 \mid &= \mid -1 \mid = 1 \Longrightarrow \frac{\mid a_2 \mid}{\mid a_4 \mid} = \frac{1}{2} \\
\mid a_1 \mid &= \mid -6 \mid = 6 \Longrightarrow \frac{\mid a_1 \mid}{\mid a_4 \mid} = \frac{6}{2} = 3 \\
\mid a_0 \mid &= \mid -3 \mid = 3 \Longrightarrow \frac{\mid a_0 \mid}{\mid a_4 \mid} = \frac{3}{2}
\end{aligned}$$

El mayor de estos es 3, así que $M = 3$.

$\therefore$ Todas las raíces reales yacen en el intervalo $[-4, 4]$. ■

[2]Esto es una broma. La demostración es muy avanzada para este texto.

6.5. Teorema de signos de Descartes

Hay otra regla que es útil para encontrar los ceros de un polinomio, pero primero se debe definir una cosa.

Se escribe $P(x)$ con las potencias de x en orden descendiente. Por ejemplo, $P(x) = 3x^4 - 4x^3 + 2x^2 + x + 4$, Se dice que $P(x)$ tiene k **variaciones en el signo** si el signo de los coeficientes cambia k veces. En el ejemplo anterior, se tiene que

$$3x^4 \ominus 4x^3 \oplus 2x^2 + x + 4$$

y se señalan las veces que cambia el signo de positivo a negativo o viceversa, que son las que indican la variación. Hay dos cambios de signos, entonces el polinomio tiene dos variaciones en el signo.

Ahora, se puede enunciar:

Regla de signos de Descartes. Si $P(x)$ está escrito con las potencias de x descendientes, se tiene que:

- Si P es el número de variaciones del signo de $P(x)$, entonces el número de ceros reales positivos (contando multiplicidad) es algún número de entre los siguientes: $\{P, P-2, P-4, ...\}$.
- Si N es el número de variaciones del signo de $P(-x)$, entonces el número de ceros reales negativos (contando multiplicidad) es algún número de entre los siguientes: $\{N, N-2, N-4, ...\}$.

Demostración: es muy larga, por lo que no se incluirá, pero puede encontrarse en Internet.

Ejemplo. Sea $P(x) = 2x^4 + 4x^3 - x^2 - 6x - 3$. Determine el número de ceros reales de $P(x)$.

Solución: $P(x)$ tiene una variación en el signo:

$$2x^4 + 4x^3 \ominus x^2 - 6x - 3$$

Entonces, $P(x)$ tiene exactamente un cero real positivo.

$$\begin{aligned} P(-x) &= 2(-x)^4 + 4(-x)^3 - (-x)^2 - 6(-x) - 3 \\ &= 2x^4 \ominus 4x^3 - x^2 \oplus 6x \ominus 3. \end{aligned}$$

$P(-x)$ tiene 3 variaciones de signo, por lo que $P(x)$ tiene 3 ó 1 ceros reales negativos, contando las multiplicidades. ∎

6.6. Tópicos avanzados

6.6.1. Raíces de la unidad

El polinomio $x^n - 1$ tiene como raíces a $\omega, \omega^1, \omega^2, ..., \omega^n$ donde $\omega = \text{cis}(\frac{2\pi}{n})$. Además, $\omega^n = 1$. A estas se les llama **raíces n-ésimas de la unidad**. Por ende, tenemos la siguiente factorización:

$$x^n - 1 = (x-1)(x-\omega)(x-\omega^2) \cdot ... \cdot (x-\omega^{n-1})$$

En el plano de Argand, los vértices de estas raíces de la unidad forman un n-ágono regular.

Otra propiedad importante de ω es que como

$$\begin{aligned}
&\omega^n = 1\\
&\implies \omega^n - 1 = 0\\
&\implies (\omega-1)(\omega^{n-1} + \omega^{n-2} + \cdots \omega + 1). = 0
\end{aligned}$$

y como $\omega \neq 1$, entonces $\omega^{n-1} + \omega^{n-2} + \cdots \omega + 1 = 0$.

Ejemplo 5.1. Sea $P(x) = x^4 + x^3 + x^2 + x + 1 = 0$. Determine el residuo de dividir $P(x^5)$ entre $P(x)$.

Solución: Utilizando el algoritmo de división euclideana, se tiene que:

$$\begin{aligned}
&P(x^5) = P(x) \cdot Q(x) + R(x)\\
&\implies x^{20} + x^{15} + x^{10} + x^5 + 1 = (x^4 + x^3 + x^2 + x + 1) \cdot Q(x) + R(x)
\end{aligned}$$

Sea $\omega = cis(\frac{2\pi}{5})$. Si se evalúa $x = \omega$ se obtiene que

$$\begin{aligned}
&\omega^{20} + \omega^{15} + \omega^{10} + \omega^5 + 1 = (\omega^4 + \omega^3 + \omega^2 + \omega + 1) \cdot Q(x) + R(x)\\
&\implies (\omega^5)^4 + (\omega^5))^3 + (\omega^5)^2 + \omega^5 + 1 = R(x)\\
&\implies 5 = R(x)
\end{aligned}$$

Si se evalúa $x = \omega^2$, se obtiene que

$$\begin{aligned}
&(\omega^5)^8 + (\omega^5))^6 + (\omega^5)^4 + \omega^5 + 1 = (\omega^8 + \omega^6 + \omega^4 + \omega^2 + 1) \cdot Q(x) + R(x)\\
&\implies (1)^8 + (1)^6 + (1)^4 + 1 + 1 = (\omega^3 \cdot \omega^5 + \omega \cdot \omega^5 + \omega^4 + \omega^2 + 1)\\
&\implies 5 = (\omega^4 + \omega^3 + \omega^2 + \omega + 1) \cdot Q(x) + R(x)\\
&\implies 5 = R(x)
\end{aligned}$$

Se procede de igual forma evaluando $x = \omega^3$ y $x = \omega^4$, y entonces se obtiene dos veces más que $5 = R(x)$.

Ahora, se define $T(x) = R(x) - 5$. Note por el algoritmo de la división euclideana anterior que $R(x)$ es cúbico, entonces $T(x)$ también lo es. $T(x)$ tendría cuatro soluciones $(\omega, \omega^2, \omega^3, \omega^4)$, y como ya se vio, esto solo es posible si

$$\begin{aligned}
T(x) = 0\ \forall x \in \mathbb{R} &\implies R(x) - 5 = 0\\
&\implies R(x) = 5\ \forall x \in \mathbb{R}
\end{aligned}$$

$\therefore$ el residuo es 5. ■

Ejemplo 5.2. (5 USAMO 1976) Sean $P(x)$, $Q(x)$, $S(x)$ polinomios tales que

$$P(x^5) + xQ(x^5) + x^2R(x^5) = (x^4 + x^3 + x^2 + x + 1)S(x)$$

Pruebe que $x - 1$ es un factor de $P(x)$.

Solución: Sea $\omega = cis(\frac{2\pi}{5})$. Se toma la ecuación del enunciado y se procede como en el ejemplo pasado, evaluando $x = \omega, \omega^2, \omega^3, \omega^4$, y se obtiene que

$$P(1) + \omega Q(1) + \omega^2 R(1) = 0 \tag{1}$$
$$P(1) + \omega^2 Q(1) + \omega^4 R(1) = 0 \tag{2}$$
$$P(1) + \omega^3 Q(1) + \omega R(1) = 0 \tag{3}$$
$$P(1) + \omega^4 Q(1) + \omega^3 R(1) = 0 \tag{4}$$

Ahora se multiplica (1), (2), (3) y (4) por $-\omega$, $-\omega^2$, $-\omega^3$ y $-\omega^4$ y se obtiene que

$$\begin{aligned}
-\omega P(1) - \omega^2 Q(1) - \omega^3 R(1) = 0\\
-\omega^2 P(1) - \omega^4 Q(1) - \omega R(1) = 0\\
-\omega^3 P(1) - \omega Q(1) - \omega^4 R(1) = 0\\
-\omega^4 P(1) - \omega^3 Q(1) - \omega^3 R(1) = 0
\end{aligned}$$

Se suman estas ecuaciones para obtener que

$$4P(1) - P(1)(\omega+\omega^2+\omega^3+\omega^4) + Q(1)(\omega+\omega^2+\omega^3+\omega^4) - Q(1)(\omega+\omega^2+\omega^3+\omega^4)$$

$$+R(1)(\omega+\omega^2+\omega^3+\omega^4) - R(1)(\omega+\omega^2+\omega^3+\omega^4) = 0$$

$$\implies 4P(1) - P(1)(\omega+\omega^2+\omega^3+\omega^4) = 0$$

Note que

$$\begin{aligned}
&1+\omega+\omega^2+\omega^3+\omega^4 = 0\\
&\implies \omega+\omega^2+\omega^3+\omega^4 = -1
\end{aligned}$$

Entonces,

$$\begin{aligned}
&4P(1) - P(1)(-1) = 0\\
&\implies 5P(1) = 0 \qquad (5)
\end{aligned}$$

Entonces, por el Teorema del factor, 1 es raíz de $P(x)$.
$\therefore\ x-1 \mid P(x)$. ■

6.6.2. Polinomios ciclotómicos

Se dice que ζ es una de las **raíces primitivas n-ésimas de la unidad** si se cumple que

$$\zeta^n = 1 \ \wedge\ \zeta^m \neq 1\ \forall m < n$$

Teorema ω^k genera todas las raíces primitivas n-ésimas de la unidad si $(k,n)=1$, y por ende hay $\phi(n)$.
Demostración:

7. Polinomios simétricos

Un polinomio simétrico en dos variables $P(x_1,x_2)$ cumple que $P(x_1,x_2) = P(x_2,x_1)$. Los polinomios simétricos elementales en dos variables son:

- $\sigma_{2,1} = x+y$
- $\sigma_{2,2} = xy$

y además se tiene la suma:

$$s_{2,k} = x_1^k + x_2^k,\ k \in \mathbb{N}$$

Cualquier $P(x, y)$ simétrico puede representarse como un polinomio en términos de $\sigma_{2,1}$ y $\sigma_{2,2}$. De hecho,

$$s_{2,k} = x_1^k + x_2^k = (x_1 + x_2)(x_1^{k-1} + x_2^{k-1}) - (x_1x_2)(x^{k-2} + y^{k-2}) = \sigma_{2,1}s_{k-1} - \sigma_{2,2}s_{k-2}$$

Por lo tanto, existe la recurrencia:

$$s_{2,0} = 2, s_{2,1} = \sigma_{2,1}, s_{2,k} = \sigma_{2,1}s_{k-1} - \sigma_{2,2}s_{k-1},\ k \geq 2.$$

Ejemplo 7.1. Sean x_1 y x_2 las raíces de la ecuación $x^2 - 6x + 1 = 0$. Determine el valor de $x_1^5 + x_2^5$.
Solución: Básicamente se necesita encontrar $s_{2,5} = x_1^5 + x_2^5$.
Por la fórmulas de Viète se tiene que:

$$\begin{aligned} \sigma_{2,1} &= x_1 + x_2 = 6 \\ \sigma_{2,2} &= x_1x_2 = 1 \end{aligned}$$

Se procede utilizando la relación de recurrencia que se encontró previamente.

$$\begin{aligned} s_{2,2} &= 6 \cdot s_{2,1} - s_{2,0} = 6 \cdot 6 - 2 = 34 \\ s_{2,3} &= 6 \cdot s_{2,2} - s_{2,1} = 6 \cdot 34 - 6 = 198 \\ s_{2,4} &= 6 \cdot s_{2,3} - s_{2,2} = 6 \cdot 198 - 34 = 1154 \\ s_{2,5} &= 6 \cdot s_{2,4} - s_{2,3} = 6 \cdot 1154 - 198 = 6726 \end{aligned}$$

$\therefore x_1^5 + x_2^5 = 6726.$ ■

Ahora bien, también existen los polinomios simétricos en tres variables, que cumplen

$$\begin{aligned} P(x_1, x_2, x_3) &= P(x_1, x_3, x_2) \\ &= P(x_2, x_1, x_3) \\ &= P(x_2, x_3, x_1) \\ &= P(x_3, x_1, x_2) \\ &= P(x_3, x_1, x_2) \end{aligned}$$

Estos también tienen los siguientes polinomios elementales:

- $\sigma_{3,1} = x_1 + x_2 + x_3$
- $\sigma_{3,2} = x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3$
- $\sigma_{3,3} = x_1x_2x_3$

y se tiene además la suma

$$s_{3,k} = x_1^k + x_2^k + x_3^k,\ k \in \mathbb{N}$$

Cualquier polinomio simétrico en tres variables se puede escribir en términos de polinomios simétricos elementales en tres variables:

$$\begin{aligned} x_1^k + x_2^k + x_3^k &= (x_1+x_2+x_3)(x_1^{k-1}+x_2^{k-1}+x_3^{k-1}) - (x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3)(x_1^{k-2}+x_2^{k-2}+x_3^{k-2}) \\ &\quad + (x_1x_2x_3)(x_1^{k-3}+x_2^{k-3}+x_3^{k-3}) \\ &= \sigma_{3,1}(x_1^{k-1}+x_2^{k-1}+x_3^{k-1}) - \sigma_{3,2}(x_1^{k-2}+x_2^{k-2}+x_3^{k-2}) + \sigma_{3,3}(x_1^{k-3}+x_2^{k-3}+x_3^{k-3}) \\ &= \sigma_{3,1}s_{3,k-1} - \sigma_{3,2}s_{3,k-2} + \sigma_{3,3}s_{3,k-3} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{con} \ \ s_{3,0} = 3,\ s_{3,1} = \sigma_{3,1},\ s_{3,2} &= x_1^2+x_2^2+x_3^2 \\ &= (x_1+x_2+x_3)^2 - 2(x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3) \\ &= \sigma_{3,1}^2 - 2\sigma_{3,2} \end{aligned}$$

Ejemplo 7.2. Factorice $(x+y+z)^3 - (x^3+y^3+z^3)$.
Solución: Se visualiza $x = x_1$, $y = x_2$ y $z = x_3$. Primero, se encuentra

$$\begin{aligned} (x^3+y^3+z^3) = s_{3,3} &= \sigma_{3,1}(\sigma_{3,1}^2 - 2\sigma_{3,2}) - \sigma_{3,1}\cdot\sigma_{3,2} + 3\sigma_{3,3} \\ &= \sigma_{3,1}^3 - 3\sigma_{3,1}\cdot\sigma_{3,2} + 3\sigma_{3,3} \end{aligned}$$

Luego,

$$\begin{aligned} (x^3+y^3+z^3) - (x^3+y^3+z^3) &= \sigma_{3,1}^3 - (\sigma_{3,1}^3 - 3\sigma_{3,1}\cdot\sigma_{3,2} + 3\sigma_{3,3}) \\ &= 3(\sigma_{3,1}\cdot\sigma_{3,2} - \sigma_{3,3}) \\ &= 3[(x+y+z)(xy+xz+yz) - xyz] \\ &= 3(x^2y + x^2z + xyz + xy^2 + xyz + y^2z + xyz + xz^2 + yz^2 - xyz) \\ &= 3[xy(x+y) + xz(x+y) + yz(y+z) + xz(y+z)] \\ &= 3[(x+y)(xy+xz) + (y+z)(yz+xz)] \\ &= 3[(x+y)\cdot x(y+z) + (y+z)\cdot z(x+y)] \\ &= 3(x+y)(y+z)(x+z) \end{aligned}$$

$\therefore (x^3+y^3+z^3) - (x^3+y^3+z^3) = 3(x+y)(y+z)(x+z)$. ■

$P(x_1, x_2, ..., x_n)$ es un **polinomio simétrico** si para toda permutación π de $\{1, 2, ..., n\}$ se tiene que $P(x_1, x_2, ..., x_n) = P(x_{\pi(1)}, x_{\pi(2)}, ..., x_{\pi(n)})$.

Es decir, si se intercambia cualquier pareja de variables, el polinomio sigue siendo igual.

Los polinomios simétricos elementales en n variables son:

- $\sigma_{n,1} = x_1 + x_2 + ... + x_n$
- $\sigma_{n,2} = x_1x_2 + x_1x_3 + ... + x_{n-1}x_n$
- $\sigma_{n,3} = x_1x_2x_3 + x_1x_2x_4 + ... + x_{n-2}x_{n-1}x_n$
  .
  .
  .
- $\sigma_{n,n} = x_1x_2x_3...x_n$

7.1. Identidades de Newton

Como se vio en el Ejemplo XX, utilizando las fórmulas de Viète y los polinomios simétricos se puede encontrar la suma de las potencias de las raíces de un polinomio cuadrático $P(x) = ax^2 + bx + c$. Ahora, sean α_1 y α_2 raíces de este polinomio, que se toman como las variables de un polinomio simétrico. Se tiene la siguiente recurrencia:

$$s_{2,k} = \alpha_1^k + \alpha_2^k = \sigma_{2,1}s_{2,k-1} - \sigma_{2,2}s_{2,k-2} = (\alpha_1 + \alpha_2)s_{2,k-1} + \alpha_1\alpha_2 s_{2,k-2}$$

y por las fórmulas de Viète:

$$s_{2,k} = \alpha_1^k + \alpha_2^k = -\frac{b}{a}s_{2,k-1} - \frac{c}{a}s_{2,k-2}.$$

Esto además se puede aplicar a un polinomio cúbico $P(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$, con raíces α_1, α_2 y α_3. Se tiene que:

$$\begin{aligned}
s_{3,k} = \alpha_1^k + \alpha_2^k + \alpha_3^k &= \sigma_{3,1}s_{3,k-1} - \sigma_{3,2}s_{3,k-2} + \sigma_{3,3}s_{3,k-3} \\
&= (\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3)s_{3,k-1} - (\alpha_1\alpha_2 + \alpha_1\alpha_3 + \alpha_2\alpha_3)s_{3,k-2} + (\alpha_1\alpha_2\alpha_3)s_{3,k-3} \\
&= -\frac{b}{a}s_{3,k-1} - \frac{c}{a}s_{3,k-2} - \frac{d}{a}s_{3,k-3}
\end{aligned}$$

Ejemplo 9.1. Si las raíces de $P(x) = x^3 + 3x^2 + 4x - 8$, entonces encuentre el valor de

$$a^2(1 + a^2) + b^2(1 + b^2) + c^2(1 + c^2)$$

Solución: Expandiendo,

$$\begin{aligned}
a^2(1 + a^2) + b^2(1 + b^2) + c^2(1 + c^2) &= a^2 + a^4 + b^2 + b^4 + c^2 + c^4 \\
&= a^2 + b^2 + c^2 + a^4 + b^4 + c^4 \\
&= s_{3,2} + s_{3,4}
\end{aligned}$$

y ahora se prosigue de la siguiente manera para encontrar los valores de

$$\begin{aligned}
s_{3,0} &= 3 \\
s_{3,1} &= -3 \\
s_{3,2} &= (\alpha_1 + \alpha_2)^2 - 2(\alpha_1\alpha_2 + \alpha_1\alpha_3 + \alpha_2\alpha_3) \\
&= (-3)^2 - 2(4) \\
&= 9 - 8 \\
&= 1 \\
s_{3,3} &= -3(1) - 4(-3) - (-8)(3) \\
&= -3 + 12 + 24 \\
&= 33 \\
s_{3,4} &= -3(33) - 4(1) - (-8)(-3) \\
&= -99 - 4 - 24 \\
&= -127
\end{aligned}$$

Entonces,

$$\begin{aligned} s_{3,2} + s_{3,4} &= 1 - 127 \\ &= -126 \end{aligned}$$

Las **identidades de Newton** sirven para generalizar estos resultados:

$$\begin{cases} s_{n,0} = k \\ s_{n,1} = \sigma_{n,1} \cdot 1 \end{cases}$$

Demostración: usa matemática universitaria, pero se puede consultar en [ ].

Ejemplo 9.2. problema con identidades de newton
Solución:

7.2. (C) Teorema fundamental de polinomios simétricos

7.3. (C) Sumas de potencias como bases

8. Herramientas de cálculo

8.1. Teorema del valor intermedio y continuidad

Los polinomios son funciones continuas, lo cual significa, informalmente, que "su gráfica se puede trazar sin levantar el lápiz". Por ende, el siguiente teorema es útil para trabajar con polinomios.

Teorema del valor intermedio. Si f es una función continua en $[a, b]$ tal que $f(a) = f(b)$, entonces para todo d entre $f(a)$ y $f(b)$ existe $c \in [a, b]$ tal que $f(c) = d$.
Demostración: La demostración de este teorema utiliza matemática universitaria, por lo que se omitirá en este texto.

Este teorema se puede utilizar para garantizar que existen soluciones para ciertas ecuaciones con polinomios. Existen técnicas y algoritmos para encontrar estas raíces, como el método de bisección, pero que en este texto no se explorarán.

Teorema 8.1. Todo $P(x)$ de grado impar con coeficientes reales tiene al menos una raíz real.
Demostración: Sin pérdida de generalidad se asume que a_n es positivo, y si no, solo se toma -1 como factor común y se trabaja con $-P(x)$.
Se toma un M lo suficientemente grande como para poder afirmar que $P(M) > 0$ y $P(-M) < 0$. Por el Teorema del valor intermedio, existe un número real m tal que $-M < m < M$ y $P(m) = 0$, es decir, m es real y es raíz de $P(x)$. ■

Ejemplo 8.1. problema con tvi
Solución:

8.2. Uso de la derivada para raíces múltiples

9. Problemas

1. Resuelva la ecuación $(x-a)^4 + (x-b)^4 = (a-b)^4$.

2. Encuentre el residuo al dividir $x^{100} - 2x^{51} + 1$ entre $x^2 - 1$.

3. El polinomio $ax^3 + bx^2 + cx + d$ tiene coeficientes entero, con ad impar y bc par. Demuestre que al menos una de las raíces del polinomio es irracional.

Sean $a, b \in \mathbb{Z}$. Pruebe que el polinomio $(x-a)^2(x-b)^2 + 1$ no es el producto de dos polinomios con coeficientes enteros.

4. (B. Kukushkin, Rusia 1991, 11 grado) Los números reales α, β satisfacen

$$\alpha^3 - 3\alpha^2 + 5\alpha = 1,\ \beta^3 - 3\beta^2 + 5\beta = 5$$

Determinar $\alpha + \beta$.

5. Hallar todos los polinomios $P(x)$ tales que $xP(x-1) = (x-26)P(x)$.

6. (D. Monk, IMO 1975) Hallar todos los polinomios $P(x, y)$ tales que satisfagan las siguientes propiedades:
a) Existe un entero positivo n y números reales t, x, y tales que $P(tx, ty) = t^n P(x, y)$.
b) Para cualesquiera reales a, b, c se satisface que $P(b+c, a)+P(c+a, b)+P(a+b, c) = 0$.
c) P (1, 0) = 1.

7. (3 ITAMO 1990) Sean a, b, c números reales distintos y sea $P(x)$ un polinomio con coeficientes reales. Suponga que los residuos al dividir $P(x)$ por $(x-a)$, $(x-b)$ y $(x-c)$ son a, b y c, respectivamente. Encuentre el residuo de dividir $P(x)$ entre $(x-a)(x-b)(x-c)$.

8. (2 OIM 2019) Determine todos los $P(x)$ con coeficientes enteros y grados mayores a cero tales que para todo x se cumple que

$$P(x) = (x - P(0))(x - P(1))(x - P(2)) \cdots (x - P(n-1))$$

9. (2 OIM 2014) Halle todos los polinomios $P(x)$ con coeficientes reales tales que $P(x) = 2014$ y, para algún entero c:

$$xP(x-c) = (x - 2014)P(x)$$

10. (A6 SL IMO 2013) Sea $m \neq 0$ entero. Encuentre todos los polinomios $P(x)$ tales que para todo x real:

$$(x^3 - mx^2 + 1)P(x+1) + (x^3 + mx^2 + 1)P(x-1) = 2(x^3 - mx + 1)P(x)$$

11. Pruebe que si $a, b, c \in \mathbb{R}$ y

$$\frac{a-b}{a+b} + \frac{b-c}{b+c} = \frac{a-c}{a+c}$$

entonces al menos dos de a, b y c son iguales.

10. Referencias

Teorema 7.1. Todo polinomio simétrico puede representarse como un polinomio en términos de los **polinomios simétricos elementales**, σ_1 y σ_2.

Demostración: Los términos de la forma ax^ky^k simplemente se representan como $a\sigma_2^k$. Para los términos bx^iy^k, con $1 < k$, $P(x)$ contiene a bx^ky^i, entonces se ponen juntos y eso resulta en:

$$bx^iy^k + bx^ky^i = bx^iy^i(x^{k-i} + y^{k-i}) = b\sigma_2^i s_{k-1}$$

y s_{k-1} se puede expresar en términos de σ_1 y σ_2 porque es parte de una recurrencia. ■