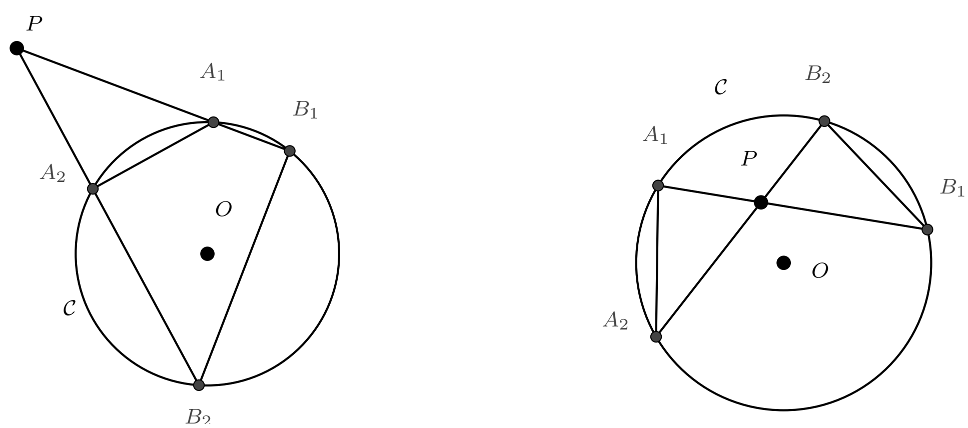
Potencia Punto y Ejes Radicales

Santiago Chaves Aguilar

Mayo 2020

1 Potencia Punto

Sea $\mathcal{C}$ un círculo de centro O, y sea P un punto cualquiera en el plano. Sean l_1 y l_2 dos rectas cualesquiera que pasan través de P, e intersecan a $\mathcal{C}$ en puntos A_1, B_1, A_2 y B_2 respectivamente. En la figura se muestran los casos donde P está fuera y dentro del círculo $\mathcal{C}$.



En la primera figura, se puede observar que $\angle PB_2B_1 = 180 - \angle A_2A_1B_1 = \angle A_2A_1P$. Similarmente $\angle PB_1B_2 = \angle PA_2A_1$. En la segunda imagen, se tiene la igualdad de ángulos $\angle A_1A_2P = \angle A_1A_2B_2 = \angle A_1B_1B_2 = \angle PB_1B_2$ y de manera análoga $\angle A_2A_1P = \angle B_1B_2P$. En ambos casos, se obtiene la semejanza de triángulos $\triangle PA_1A_2 \sim \triangle PB_2B_1$. Tenemos por tanto la igualdad $\frac{PA_1}{PB_2} = \frac{PA_2}{PB_1}$. Equivalentemente:

$$PA_1 \cdot PB_1 = PA_2 \cdot PB_2.$$

Lo anterior se puede interpretar del siguiente modo

Teorema/ Definición 1.1. *Sea $\mathcal{C}$ un círculo y P un punto cualquiera en el plano. Sea l una recta cualquiera que pasa por P e interseca a $\mathcal{C}$ en dos puntos A y B. Entonces el producto $PA \cdot PB$ no depende de la recta l. A ese producto le llamamos la potencia punto de P con respecto a $\mathcal{C}$.*

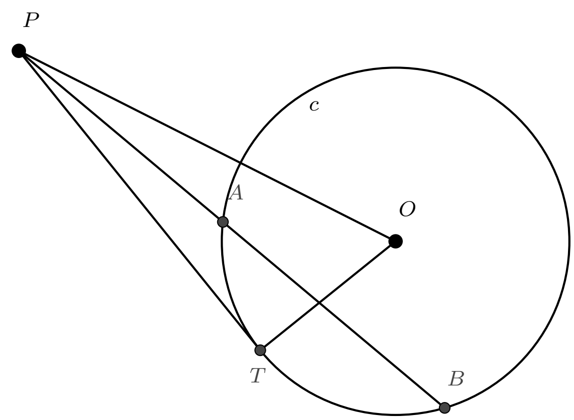
A pesar de que en la discusión anterior no consideramos el caso en el que P estuviera *sobre* el círculo $\mathcal{C}$, es claro que la potencia punto en tal situación debe ser igual a cero. En efecto, no importa cuál recta a través de P se considere, P coincide con alguna de las intersecciones de dicha recta con $\mathcal{C}$.

Por definición, la potencia punto es una invariante asociada a un punto cualquiera y un círculo dado. Encontrar invariantes es una de las técnicas más utilizadas en problemas de olimpiadas, de modo que cada vez que se note una, es importante prestarle atención.

El siguiente ejercicio nos será útil más adelante.

Ejercicio 1.2. En el contexto anterior, sea r el radio del círculo $\mathcal{C}$ y sea d la medida de PO. Demuestre que le potencia punto de P con respecto a $\mathcal{C}$ es igual a $|d^2 - r^2|$.

El problema anterior puede ser resuelto usando técnicas elementales, pero aquí presentamos una forma alterna de pensarlo. Recomendamos al lector tratar de resolver el problema de forma euclidiana antes de leer lo siguiente. Asumamos que P está fuera de $\mathcal{C}$. Sea T un punto sobre $\mathcal{C}$ tal que la recta PT es tangente a $\mathcal{C}$. Se puede pensar que la recta PT interseca a $\mathcal{C}$ en el punto T *dos veces*. En efecto, todas las rectas a través de P que intersecan a $\mathcal{C}$ de forma transversal lo hacen en dos puntos diferentes. La recta PT es un caso límite, y por tanto el punto T debería pensarse como una intersección *doble*. Para formalizar esto, se necesita cálculo y un poco de geometría diferencial, pero la idea es clara. La conclusión es que la potencia punto de P debería coincidir con $PT \cdot PT = PT^2$. Como el triángulo POT es rectángulo, por Pitágoras concluimos que $PT^2 = OP^2 - PT^2 = d^2 - r^2$.

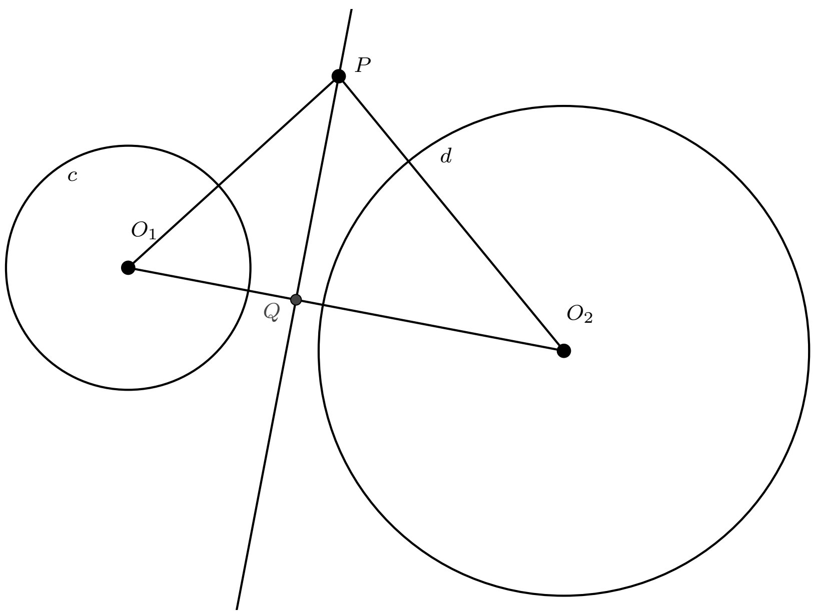


Pregunta 1.3. *Dado un círculo $\mathcal{C}$ y un número real k, cuál es el lugar geométrico de los puntos que tienen potencia punto con respecto a $\mathcal{C}$ igual a k?*

2 Ejes Radicales

Dados dos círculos en el plano, es natural preguntarse como la potencia punto con respecto a un círculo se relaciona a la del otro. Por ejemplo, para cuáles puntos en el plano la potencia punto con respecto a uno de los cículos es mayor que con respecto al otro. Para analizar este tipo de preguntas, es claro que queremos tratar de entender cuáles puntos en el plano tienen *la misma* potencia punto con respecto a ambos círculos.

Teorema/ Definición 2.1. *Sean $\mathcal{C}_1$ y $\mathcal{C}_2$ dos círculos no concéntricos en el plano. El lugar geométrico de puntos P que tienen la misma potencia punto con respecto a ambos círculos es una recta. A esta recta se le llama el eje radical de $\mathcal{C}_1$ y $\mathcal{C}_2$.*



Prueba. Sean O_1 y O_2, los centros y r_1, r_2 los radios de $\mathcal{C}_1$ y $\mathcal{C}_2$ respectivamente. Sea Q el único punto sobre la recta O_1O_2 tal que

$$O_1Q^2 - O_2Q^2 = r_1^2 - r_2^2.$$

(Ejercicio: justifique por qué tal punto es único). Sea l le recta que pasa a través de Q y es perpendicular a O_1O_2. Vamos a probar que l es el eje radical de $\mathcal{C}_1$ y $\mathcal{C}_2$.

En efecto, sea P un punto cualquiera sobre l. Como los triángulos $\triangle O_1QP$ y O_2QP son rectángulos, tenemos que

$$O_1P^2 - O_2P^2 = O_1Q^2 + QP^2 - O_2Q^2 - QP^2 = O_1Q^2 - O_2Q^2 = r_1^2 - r_2^2$$
$$\Rightarrow O_1P^2 - r_1^2 = O_2P^2 - r_2^2.$$

El ejercicio 1.2. implica que P tiene la misma potencia punto con respecto a $\mathcal{C}_1$ y $\mathcal{C}_2$.

Recíprocamente, sea P un punto cualquiera tal que la potencia P con respecto a $\mathcal{C}_1$ es igual a la potencia punto de P con respecto a $\mathcal{C}_2$. Trace la recta a través de P que es perpendicular a O_1O_2, y sea Q' la intersección de dichas rectas. De forma análoga al razonamiento anterior obtenemos que

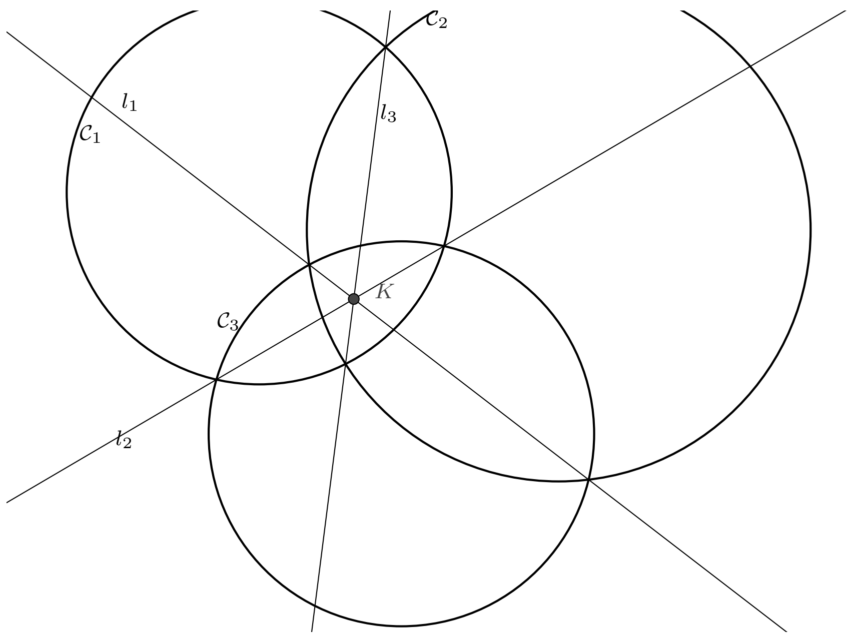
$$O_1Q^2 - O_2Q^2 = O_1P^2 - O_2P^2 = r_1^2 - r_2^2.$$

Donde en la última igualdad usamos el ejercicio 1.2 de nuevo. Se concluye que $Q' = Q$, y por tanto P pertenece a l. $\square$

Si los círculos $\mathcal{C}_1$ y $\mathcal{C}_2$ se intersecan en puntos A y B, es claro que tanto A como B tienen potencia punto con respecto a ambos círculos igual a cero. Y por tanto el eje radical es la recta que pasa a través de A y B. En la siguiente sección abordaremos el caso cuando $\mathcal{C}_1$ y $\mathcal{C}_2$ no se intersecan.

El siguiente teorema es la propiedad más importante de los ejes radicales.

Teorema 2.2. *Sean $\mathcal{C}_1$, $\mathcal{C}_2$ y $\mathcal{C}_3$ tres círculos en el plano tales que sus centros no son colineales. Sean l_1, l_2 y l_3 los ejes radicales de $\mathcal{C}_2$ y $\mathcal{C}_3$, de $\mathcal{C}_1$ y $\mathcal{C}_3$, y de $\mathcal{C}_1$ y $\mathcal{C}_2$ respectivamente. Entonces l_1, l_2 y l_3 concurren.*

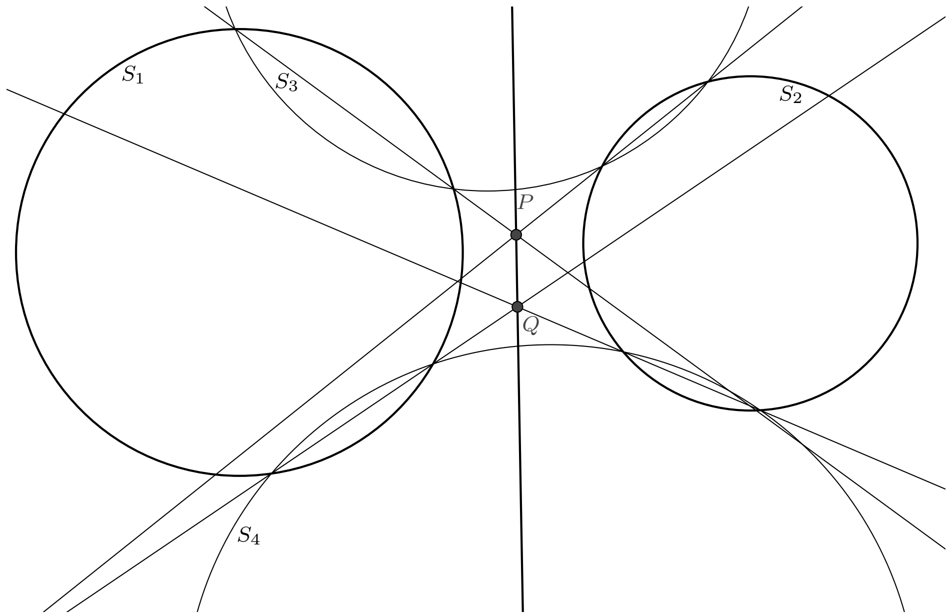


Prueba. Como los centros de las circunferencias no son colineales, entonces l_1 y l_2 concurren en un punto K. Como K pertenece a l_1, por definición tiene la misma potencia punto con respecto a $\mathcal{C}_2$ y $\mathcal{C}_3$. Como K pertenece a l_2, tiene la misma potencia punto con respecto a $\mathcal{C}_1$ y $\mathcal{C}_3$. Se concluye que K tiene la misma potencia punto con respecto a $\mathcal{C}_1$ y $\mathcal{C}_2$, entonces K pertenece a l_3. Por lo tanto K es el punto donde l_1, l_2 y l_3 concurren. $\square$

3 Ejemplos

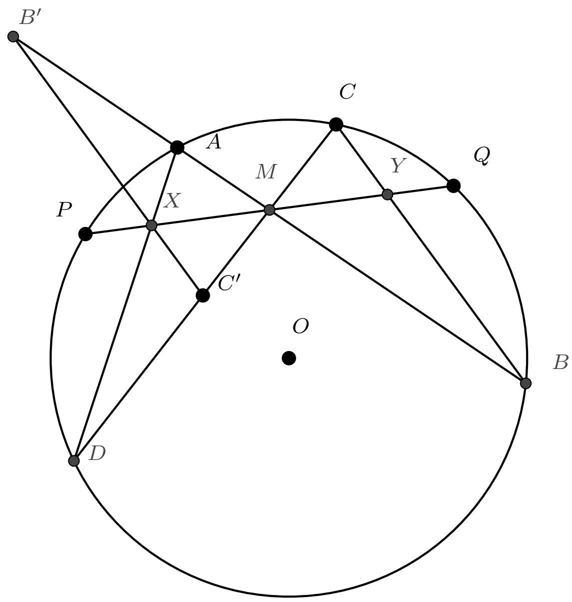
En esta sección resolvemos algunos ejercicios usando las técnicas que desarrollamos hasta ahora.

Ejemplo 3.1. Construya usando regla y compás el eje radical de dos círculos S_1 y S_2.



Solución. Trácese dos círculos cualesquiera S_3 y S_4 de forma que ambos intersequen a S_1 y S_2. Sea P la intersección de los ejes radicales de S_1 y S_3, y de S_3 y S_2. Note que estos ejes radicales pueden ser trazados porque cuando dos círculos se intersecan, el eje radical es simplemente la línea que une las intersecciones. El punto P tiene que estar en el eje radical de S_1 y S_2. Se hace lo mismo con S_4, para producir un segundo punto Q, distinto de P, que pertenece al eje radical de S_1 y S_2. La recta PQ debe ser el eje radical de S_1 y S_2. $\square$

Ejemplo 3.2. (Teorema de la mariposa). Sea M el punto medio de una cuerda PQ contenida en un círculo $\mathcal{C}$. Sean AB y CD otras cuerdas que pasan por M. Sea X la intersección de AD y PQ, y Y la intersección de CB y PQ. Entonces M es el punto medio de XY.



Prueba. Sea B' la reflexión de B con respecto a M y C' la reflexión de C con respecto a M. Como M es el punto medio de CC' y de BB', entonces $BCB'C'$ es un paralelogramo, y por tanto $\angle BB'C' = \angle B'BC$. Como también es cierto que $\angle B'BC = \angle ADC$, concluimos que $\angle AB'C' = \angle ADC'$, y por tanto el cuadrilátero $AB'DC'$ es concíclico. Llamemos $\mathcal{C}_1$ a la circunferencia que lo circunscribe.

Por otro lado, M es el punto medio de PQ y de CC', por tanto $PC'QC$ es un paralelogramo. De aquí concluimos que $\angle PQC' = \angle QPC$. De los paralelogramos que mencionamos antes, se tiene que $B'C'//BC$, pero además como M es el punto medio de $B'B$ y de PQ, entonces $B'PBQ$ es un paralelogramo y $B'P//BQ$. Concluimos que $\angle C'B'P = \angle CBQ$. Pero también es cierto que $\angle CBQ = \angle CPQ$, por tanto $\angle C'B'P = \angle PQC'$. Esto implica que el cuadrilátero $B'PC'Q$ es concíclico. Sea $\mathcal{C}_2$ la circunferencia que lo circunscribe.

Los círculos $\mathcal{C}$ y $\mathcal{C}_1$ se intersecan en A y D, por tanto AD es el eje radical. A su vez $\mathcal{C}$ y $\mathcal{C}_2$ se intersecan en P y Q, por lo que este es el respectivo eje radical. Por su parte $\mathcal{C}_1$ y $\mathcal{C}_2$ se intersecan en B' y C'. Por el teorema 2.2. concluimos que AD, PQ y $B'C'$ concurren. Es decir, que X pertenece a la recta $B'C'$.

Finalmente, $XC'//YC$ y $MC = MC'$. Por tanto $\triangle XMC' \cong \triangle YMC$, de donde $XM = YM$, como se quería. $\square$

4 Ejercicios

Todos los ejercicios a continuación, menos el último, fueron tomados de "Un recorrido por la geometría", de Germán Rincón. Le agradezco a German Mora por ponerlos todos juntos.

1. Sean A, B, C y D cuatro puntos tales que $AB \cap CD = P$ y $PA \cdot PB = PC \cdot PD$. Demuestre que $ABCD$ es un cuadrilátero concíclico.

2. Sean S_1 y S_2 dos círculos y sea O la intersección de las tangentes externas comunes a S_1 y S_2. Demostrar que la potencia punto de O con respecto a cualquier círculo tangente externamente a S_1 y S_2 es constante.

3. Sea S un círculo y sean A y B dos puntos. Una recta variable a través de A corta a S en M y N. Demostrar que los circuncírculos de los triángulos $\triangle MNB$ pasan por otro punto fijo distinto de B.

4. En un triángulo $\triangle ABC$, sea I el incentro y sean X, Y y Z los puntos de tangencia del incírculo con BC, AC y AB respectivamente. La recta AX corta al incírculo nuevamente en P, y la recta AI corta a YZ en Q. Demostrar que X, I, Q y P están sobre una misma circunferencia.

5. Dos círculos son tangentes internamente en un punto P. Una cuerda AB del círculo mayor es tangente al círculo menor en Q. Demostrar que PQ es la bisectriz de $\angle APB$. (Nota: Este problema se puede hacer "cazando angulitos", pero trate de resolverlo usando potencia punto. Recuerde el enunciado del teorema de la bisectriz interna).

6. Desde un punto del eje radical de dos círculos se trazan secantes a los dos círculos. Demostrar que los cuatro puntos de corte estám sobre una misma circunferencia.

7. Dados dos círculos, los puntos P son tales que la suma de las potencias de P con respecto a los dos círculos es una constante. Demostrar que dichos puntos P se encuentran sobre un círculo.

8. Sea $ABCD$ un cuadrilátero concíclico cuyas diagonales AC y BD son perpendiculares. Sea O el circuncentro de $ABCD$, K la intersección de las diagonales y $L \neq O$ la intersección de las circunferencias circunscritas a $\triangle OAC$ y $\triangle OBD$, y G la intersección de las diagonales del cuadrilátero cuyos vértices son los puntos medios de los lados de $ABCD$. Probar que O, K, L y G son colineales. (OIM 2010, problema 5).