Clase virtual 9 de mayo

Nicole Lipschitz Kesselman | Eduardo Salas Jiménez

Problema 1. Pruebe que si a, b, c son números reales positivos, entonces:

$$\frac{a}{bc} + \frac{b}{ac} + \frac{c}{ab} \geq \frac{2}{a} + \frac{2}{b} - \frac{2}{c}$$

Solución:

$$\frac{a}{bc} + \frac{b}{ac} + \frac{c}{ab} \geq \frac{2}{a} + \frac{2}{b} - \frac{2}{c}$$

$$\iff \frac{a^2}{abc} + \frac{b^2}{abc} + \frac{c^2}{abc} \geq \frac{2bc}{abc} + \frac{2ac}{abc} - \frac{2ab}{abc}$$

$$\iff \frac{a^2 + b^2 + c^2 - 2bc - 2ac + 2ab}{abc} \geq 0$$

Y como a, b, c son reales positivos:

$$\iff a^2 + b^2 + c^2 - 2bc - 2ac + 2ab \geq 0$$

$$\iff a^2 + 2ab + b^2 + c^2 - 2c\,(a + b) \geq 0$$

$$\iff (a + b)^2 - 2c\,(a + b) + c^2 \geq 0 \quad (i)$$

$$\iff (a + b - c)^2 \geq 0$$

Así llegamos a una desigualdad válida, pues todo número real al cuadrado es mayor o igual a 0.

Otra forma de demostrar esto, es utilizando la desigualdad de medias (MA-MG) en (i), para probar que:

$$(a + b)^2 + c^2 \geq 2c\,(a + b)$$

$$\iff \frac{(a + b)^2 + c^2}{2} \geq \sqrt{c^2\,(a + b)^2} = c\,(a + b)$$

Lo que es conocido.

Por esto podemos concluir que pára cualesquiera a, b, c reales positivos se cumple lo que queríamos probar. ■

Problema 2. Sea N un entero positivo. *Anonymous* y *Olcomae* juegan con un montón de $N \geq 2$ piedras, alternándose los turnos, comenzando por *Anonymous*. Si al comienzo de un turno, el montón tiene k piedras, una jugada válida consiste en escoger un entero positivo m primo relativo con k, y retirar m piedras del montón. El jugador que al retirar cierta cantidad de piedras, deje el montón con una única piedra, pierde el juego. Determine cuál jugador tiene una estrategia ganadora.

Solución:

Demostraremos mediante inducción fuerte que al inicio de un turno, si existe una cantidad par de piedras, pierde el jugador que tenga el turno, y si existe una cantidad impar de piedras, gana el jugador que tenga el turno.

Casos base:

Sea $n = 2$, entonces en el primer turno *Anonymous* solo puede retirar 1 piedra del montón, dejando en el montón una única piedra, por lo que el ganador sería *Olcomae*. Por lo tanto, **2 es posición perdedora**.

Sea $n = 3$, entonces en el primer turno *Anonymous* puede eliminar 1 piedra, y dejando el montón con 2 piedras. Seguidamente juega *Olcomae*, y como vimos anteriormente, 2 es posición perdedora por lo que ganará *Anonymous*. Por esto, **3 es posición ganadora**.

Hipótesis inductiva:

Asumamos que para todos los enteros entre $i \in \{2, 3, \ldots, k\}$ se cumple que cuando $N = i$ es par, entonces pierde *Anonymous*, y en caso contrario gana *Anonymous*. Es decir, que los números pares son posiciones perdedoras y los impares son posiciones ganadoras, para la persona que juega en ese turno.

Paso inductivo:

Ahora distinguiremos dos casos basados en la paridad de $k + 1$.

- $k + 1 \equiv 0 \pmod{2}$

  Si $k+1$ es par, el jugador que tenga el turno (digamos jugador X) no puede retirar una cantidad par de piedras del montón porque 2 y $k + 1$ no son primos relativos (porque 2 divide a $k + 1$), por tanto X debe retirar una cantidad impar de piedras, dejando el montón con una cantidad m impar de piedras menor que $k + 1$; en ese momento, es el turno del oponente de X, que al momento de su turno va a encontrar en el montón $k+1-m \in \{2, 3, ..., k\}$ piedras, y por hipótesis de inducción este jugador gana el juego, o sea X pierde. Por lo anterior, $k + 1$ sería posición perdedora cuando es par.

- $k + 1 \equiv 1 \pmod{2}$

  Si $k + 1$ es impar, el jugador X retira una pierda del montón, dejando una cantidad par de piedras a su oponente, específicamente k piedras, y por hipótesis de inducción, el rival de X perderá, es decir X gana. Por lo tanto, $k + 1$ es posición ganadora cuando es impar.

Por lo tanto, se concluye que los números pares son posiciónes perdedoras, mientras que los números impares son posiciones ganadoras. Así vemos que para N par, *Olcomae* tiene la estrategia ganadora, mientras que si N es impar, *Anonymous* es el que tiene la estrategia para hacerse con la victoria. En ambos casos, con la estrategia antes descrita de dejar en el montón de piedras (cuando sea posible) una cantidad que sea posición perdedora para el rival. $\blacksquare$

Problema 3. Pruebe que para todo entero positivo n, se puede encontrar una permutación del conjunto $\{1, 2, ..., n\}$ de manera que el promedio de cualesquiera dos enteros distintos no aparece en medio de ellos.

Por ejemplo, si se tiene $n = 4$, la permutación $\{1, 3, 2, 4\}$ sirve, mientras que $\{1, 4, 2, 3\}$ no, ya que el 2 está entre el 1 y el 3, y $2 = \dfrac{1+3}{2}$.

Solución:

Llamaremos a una permutación *tuanis* a aquella que satisface las condiciones del problema. Para $n \in \{1, 2, 3, 4\}$ podemos encontrar las siguientes permutaciones *tuanis*:

- $\{1\}$
- $\{1, 2\}$
- $\{1, 3, 2\}$
- $\{1, 3, 2, 4\}$

Vamos a demostrar por inducción fuerte que si para algún n es posible encontrar una permutación *tuanis*, entonces para todos los números entre n y $2n$ también es posible, para lo cuál ya tenemos los casos base.

Hipótesis inductiva:

Suponga que para n existe una permutación *tuanis* de $\{1, 2, \ldots, n\}$, y sea esta permutación $\{b_1, b_2, \ldots, b_n\}$. Se sabe que para todos los enteros $1 \leq i < j < k \leq n$ se cumple que $b_j \neq \frac{b_i+b_k}{2}$.

Paso inductivo:

Ahora considere el conjunto $B_1 = \{2b_1 - 1, 2b_2 - 1, \ldots, 2b_n - 1\}$, en donde para todo $1 \leq i < j < k \leq n$ se satisface que $2b_j \neq \frac{2b_i+2b_k}{2}$, así que $2b_j - 1 \neq \frac{(2b_i)+(2b_k)}{2} - 1 = \frac{(b_i-1)+(b_k-1)}{2}$, por lo que B_1 también cumple que el promedio de dos enteros distintos no está en medio de ellos. Así tenemos una permutación de los enteros impares entre 1 y $2n$ que cumple con las características de ser *tuanis*.

De forma similar, consideremos el conjunto $B_2 = \{2b_1, 2b_2, \ldots, 2b_n\}$. Para cada $1 \leq i < j < k \leq n$ se cumple que por hipótesis que $b_j \neq \frac{b_i+b_k}{2}$, lo que implica que $2b_j \neq 2\frac{b_i+b_k}{2}$, así que $2b_j \neq \frac{2b_i+2b_k}{2}$, por lo que en B_2 el promedio de dos enteros diferentes no está en medio de ellos. Ahora tenemos una permutación *tuanis* de los números pares entre 1 y $2n$.

Ahora, sea $B = \{B_1, B_2\}$, es decir, $B = \{2b_1 - 1, 2b_2 - 1, \ldots, 2b_{n-1} - 1, 2b_n - 1, 2b_1, 2b_2, \ldots, 2b_{n-1}, 2b_n\}$ y renombremos a los elementos de esta permutación como $B = \{a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}, a_n, a_{n+1}, a_{n+2}, \ldots, a_{2n}\}$. Vamos a demostrar que esta es una permutación *tuanis*.

Tomamos $1 \leq i < j < k \leq n$, entonces $a_i, a_j, a_k \in B_1$, así que $a_j \neq \frac{a_i+a_k}{2}$. Igualmente, para $n+1 \leq i < j < k \leq 2n$, entonces $a_i, a_j, a_k \in B_2$, por lo que $a_j \neq \frac{a_i+a_k}{2}$. Ahora solo nos falta considerar el caso en el que $1 \leq i \leq n < k \leq 2n$ y $i < j < k$. En este caso, $a_i \in B_1$ y $a_k \in B_2$, así que a_i es impar y a_k es par, entonces $\frac{a_i+a_k}{2} \notin \mathbb{Z}$, así que $a_j \neq \frac{a_i+a_k}{2}$. Por lo tanto, hemos demostrado que B es una permutación *tuanis* de $\{1, 2, \ldots, 2n\}$.

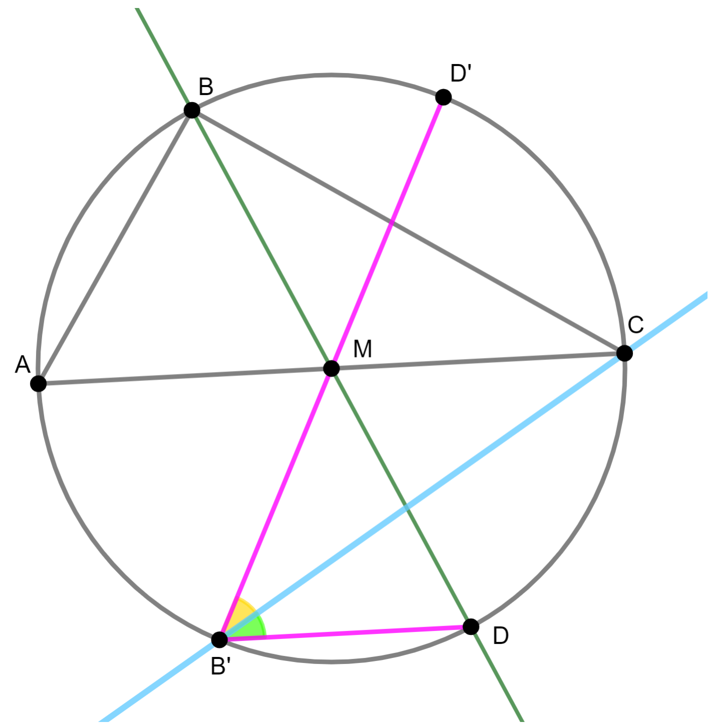
Solo nos falta probar que para los números entre n y $2n$ se cumple, para esto consideremos una permutación tuanis de los números de 1 a m que es $\{c_1, c_2, \ldots, c_m\}$. Entonces, si eliminamos un elemento c_i, se sigue cumpliendo que si el promedio de dos números distintos no estaba entre ellos, sigue sin estarlo, por lo que sigue siendo una permutación *tuanis*. En particular, para el conjunto B, si eliminamos los elementos $a_{k_1}, a_{k_2}, \ldots, a_{k_r} \in \{2n, 2n-1, ..., 2n-r+1\}$ para $1 \leq r \leq n$ tenemos una permutación *tuanis* de los números $\{1, 2, \ldots, n+r\}$ para todo $1 \leq r \leq n$.

Con esto concluimos la inducción fuerte. Por lo tanto, para todo entero positivo n existe una permutación *tuanis* de los números $\{1, 2, \ldots, n\}$. ■

Problema 4. Sea ABC un triángulo rectángulo, con $\measuredangle ABC = 90°$. B' es la reflexión de B por $\overleftrightarrow{AC}$. M es el punto medio de $\overline{AC}$. Sea D un punto en $\overrightarrow{BM}$, tal que $BD = AC$. Pruebe que $\overleftrightarrow{B'C}$ es la bisectriz de $\angle MB'D$.

Nota: Una condición importante no mencionada en el problema original es que $AB < BC$. En otro caso, $\angle MB'D$ no está definida o $\overleftrightarrow{B'C}$ es la bisectriz externa.

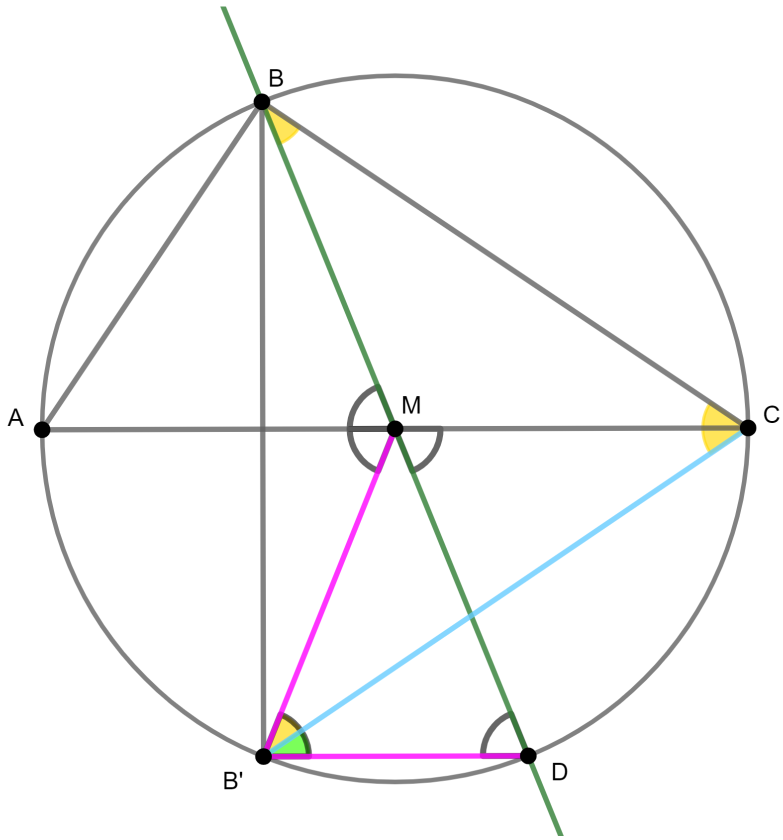
Solución 1:



Como $\triangle ABC$ es rectángulo, $\overline{AC}$ la hipotenusa, y M es el punto medio de $\overline{AC}$, entonces M es el centro del circuncírculo del $\triangle ABC$, así que $AM = BM = CM = r$. Como B' es el reflejo de B respecto de $\overleftrightarrow{AC}$, es equivalente a decir que $\overleftrightarrow{AC}$ es la mediatriz de $\overline{BB'}$, así que $BM = B'M = r$ así que B' está en $\odot ABC$, y $AB = AB'$. Como $BD = AC$, entonces $BM + MD = AM + MC$, entonces $MD = r$, por lo que $D \in \odot ABC$.

Ahora nótese que $\measuredangle AMB = \measuredangle DMC$ pues son opuestos por el vértice. Sea D' la otra intersección de $\overleftrightarrow{B'M}$ con $\odot ABC$. Entonces $\measuredangle AMB' = \measuredangle CMD'$. Además, como anteriormente vimos que $AB = AB'$, entonces los arcos $\widehat{AB} = \widehat{AB'}$. Así que $\measuredangle AMB = \measuredangle AMB'$ por ser ángulos centrales. Por consiguiente, se obtiene que $\measuredangle CMD = \measuredangle CMD'$, por lo que $\widehat{CD} = \widehat{CD'}$ al ser ángulos centrales. Así, por ángulos inscritos se llega a que $\measuredangle MB'C = \measuredangle DB'C = \dfrac{\widehat{CD}}{2}$, por lo que $\overleftrightarrow{B'C}$ es la bisectriz interna de $\angle MB'D$. ■

Solución 2:



Al igual que en la *solución 1*, M es el circuncentro de $\triangle ABC$. Se tiene que $MB = MB'$ porque B' es la reflexión de B sobre AC, $MB = MA$ y $AC = BD$, entonces $MC = MA = MB = MB' = MD$. Por consiguiente, sea $\angle MBC = \alpha = \angle MCB$, ya que $\triangle BCM$ es isósceles.

Por ser ángulos externos, se tiene que $\angle AMB = \angle CMD = 2\alpha$. Como $AC \perp BB'$ y el $\triangle MBB'$ es isósceles, $\angle AMB' = \angle AMB = 2\alpha$. De lo anterior se tiene que por ser ángulos en una línea, $\angle B'MD = 180° - 4\alpha$. Dado que $\triangle MB'D$ es isósceles, $\angle MB'D = \angle MDB' = 2\alpha$.

Como $\triangle MB'C$ y el $\triangle BCB'$ son triángulos isósceles, y $AC \perp BB'$, $\angle MB'C = \angle MCB' = \angle MCB = \alpha$. Por ende, $\angle DB'C = \angle MB'D - \angle MB'C = \alpha = \angle MB'C$. Por lo tanto se concluye que $\overleftrightarrow{B'C}$ es la bisectriz interna del $\angle MB'D$ ■

Problema 5. Sean a, b y c números naturales tales que:

$$ab\left(c+ab^2\right)+c^2\left(b^2c+a^3\right)=b^2c\left(a^2c+b\right)+a\left(a^2b+c^3\right)$$

Demuestre que al menos uno de los números a, b o c es un cuadrado perfecto.

Solución:
Nótese que la condición es equivalente con:

$$ab(c-a^2)-ac^2(c-a^2)-b^3(c-a^2)+b^2c^2(c-a^2)=0$$

$$\iff (c-a^2)(ab-ac^2-b^3+b^2c^2)=0$$

$$\iff (c-a^2)\left[a(b-c^2)-b^2(b-c^2)\right]=0$$

$$\iff (a-b^2)(b-c^2)(c-a^2)=0$$

Necesariamente alguno de los factores se anula, digamos sin pérdida de la generalidad $a-b^2=0$, por lo cual $a=b^2$, o sea a es un cuadrado perfecto. ■

Problema 6. Determine todas las parejas de enteros no negativos (n,k) con $n \le k$ tales que:

$$\frac{k(k+1)}{2} = 2^k - 2(n^2+1)$$

Solución:
Como $n \le k$, vamos a distinguir los casos donde $n = k$ y donde $n < k$.

Caso $n = k$
En este caso, es fácil ver que:

$$\frac{k(k+1)}{2} = 2^k - 2(k^2+1)$$
$$\Rightarrow k(k+1) + 4(k^2+1) = 2^{k+1}$$
$$\Rightarrow 5k^2 + k + 4 = 2^{k+1}$$

Inducción:

Nótese que con $k = 7$ se obtiene la igualdad en la ecuación anterior. Con $k = 8$ se tiene que $320 + 8 + 4 < 512$. Supón para algún $k \ge 8$ se cumple:

$$5k^2 + k + 4 < 2^{k+1}$$

$$\Rightarrow 5k^2 + 10k + 5 + k + 1 + 4 < 2^{k+1} + 10k + 6$$

de donde se obtiene que:

$$5(k+1)^2 + (k+1) + 4 < 2^{k+1} + 10k + 6 < 2^{k+1} + 2^{k+1} = 2^{k+2}$$

porque $10k+6 < 5k^2+k+4 \iff 0 < 5k^2-9k-2 \iff 0 < (5k+1)(k-2)$, lo que se cumple a partir de 8.

Así por inducción se concluye que para todo $k \ge 8$ se cumple que $5k^2 + k + 4 < 2^{k+1}$. Por esto, debemos revisar los casos en los que $k < 7$, ya que con $k = 7$ se da una solución, como ya se vio.

Si definimos la función $f(k) = 5k^2 + k + 4 - 2^{k+1}$ con dominio de $k \in \{0,1,2,3,4,5,6\}$ entonces el ámbito de dicha función es $f(k) \in \{2,6,18,36,56,70,62\}$ y esto demuestra que la única solución a la ecuación en este caso se da cuando $n = k = 7$.

Caso $n < k$

Se tiene que:

$$2^k - \frac{k(k+1)}{2} = 2(n^2+1) < 2(k^2+1)$$
$$\Rightarrow 2^k < 2(k^2+1) + \frac{k(k+1)}{2}$$
$$\Rightarrow 2^{k+1} < 5k^2 + k + 4$$

Se puede ver que con $k \ge 7$ entonces $2^{k+1} \ge 5k^2 + k + 4$ porque con 7 se cumple la igualdad y la exponencial aumenta más que la cuadrática (ver la inducción). Así que tiene que cumplirse $k < 7$.

Como $n < k$ y además son enteros no negativos, se tiene que $0 < k$ con lo que se deduce que 2^{k-1} es un número entero, por lo que $\frac{k(k+1)}{4} = 2^{k-1} - (n^2 + 1)$ es un entero, así que 4 divide a $k(k+1)$, y como k y $k+1$ son consecutivos, uno de ellos es par y el otro impar, así que 4 divide a uno de ellos. De esto se obtienen los posibles valores de k que son 3 y 4.

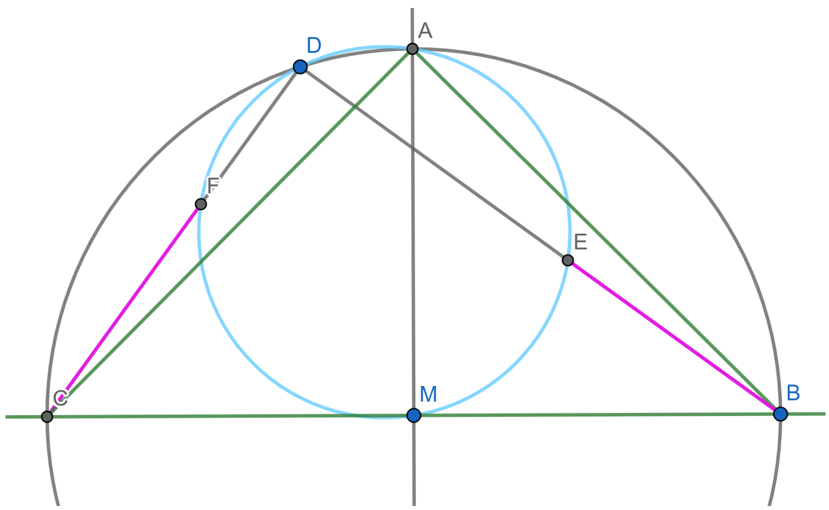
Con $k = 3$, $n^2 + 1 = 1$ entonces $n = 0$ y se obtiene la solución $(0, 3)$

Con $k = 4$, $n^2 + 1 = 3$ entonces $n = \sqrt{2}$, por lo que este caso no da soluciones enteras.

En conclusión, por los dos casos estudiados, se logra ver que las únicas soluciones al problemas son $(0, 3)$ y $(7, 7)$. ■

Problema 7. Sea $\triangle ABC$ un triángulo tal que $\measuredangle BAC = 90°$ y $AB = AC$. Sea M el punto medio del segmento $\overline{BC}$. Considere un punto D sobre la semicircunferencia de diámetro $\overline{BC}$ que contiene a A. El circuncírculo del triángulo $\triangle DAM$ interseca a los segmentos $\overline{DB}$ y $\overline{DC}$ en los puntos E y F respectivamente. Demuestre que $BE = CF$.

Solución.



Sea N el otro punto donde el circuncírculo del triángulo $\triangle ADM$ interseca al lado $\overline{BC}$. Como $AM \perp MN$ y $DE \perp DC$, se cumple que $\overline{AN}$ y $\overline{EF}$ son diámetros del circuncírculo del triángulo $\triangle ADM$. Sea O el circuncentro de este triángulo. Como $\measuredangle AMC = 90°$, sigue que $\measuredangle ADC = 135°$, pero $\measuredangle ADF = \measuredangle ADC$, por tanto $\measuredangle AOF = 90°$, así $AENF$ es un cuadrado. Como $DENM$ es un cuadrilátero cíclico, deducimos que los triángulos $\triangle EBN$ y $\triangle MBD$ son semejantes. De acuerdo a esto se obtiene que:

$$\frac{BE}{EN} = \frac{BM}{MD} = 1$$

Esta última igualdad es cierta porque $\overline{BM}$ y $\overline{MD}$ son radios en la circunferencia de diámetro $\overline{BC}$ y centro M. Entonces $BE = EN$. De manera análoga, por ser semejantes los triángulos $\triangle CFN$ y $\triangle CMD$, deducimos que:

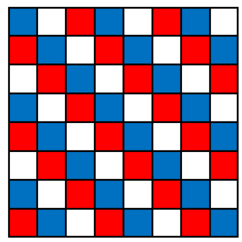
$$\frac{CF}{FN} = \frac{CM}{MD} = 1$$

o sea $CF = FN$. Pero en el cuadrado $AENF$, los lados $\overline{EN}$ y $\overline{NF}$ son iguales, por lo cual $BE = CF$.■

Problema 8. Un *triminó* es una ficha rectangular de 1×3. ¿Es posible cubrir un tablero de ajedrez de 8×8 usando 21 *triminós*, de manera que hay exactamente una casilla 1×1 sin ser cubierta? En caso de que la respuesta sea afirmativa, determine todas las posibles casillas que pueden quedar sin ser cubiertas en el tablero.

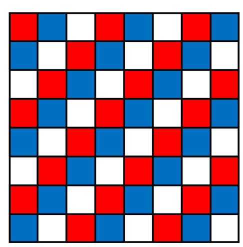
Solución:

Coloreemos el tablero 8×8 con tres colores como se muestra en la siguiente figura:

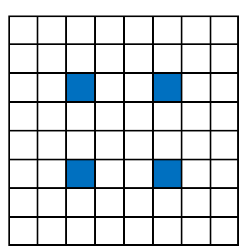


Se puede notar que en el coloreo hay 22 casillas unitarias azules, 21 rojas y 21 blancas. Además, cada *triminó* colocado en el tablero cubre una casilla de cada color, por lo que al colocar 21 *triminós*, se cubren 21 casillas de cada color, por lo que la casilla vacía debe ser azul.

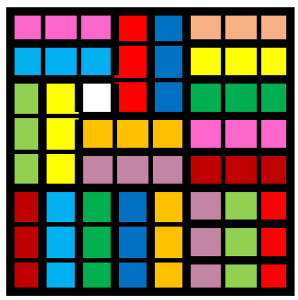
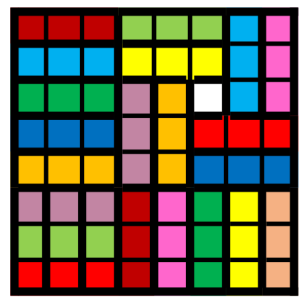
Ahora, realicemos el mismo coloreo rotando el tablero 90° en dirección de las manecillas del reloj, como en la siguiente figura:

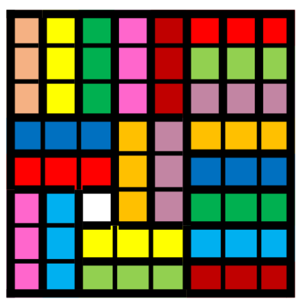
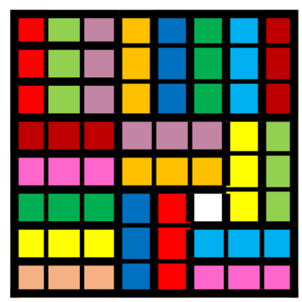


En este nuevo coloreo sucede lo mismo que en el anterior, por lo que solo las nuevas casillas azules podrían quedar vacías. Como esto debe pasar en los dos coloreos, las únicas casillas que pueden quedar vacías son las que son azules en ambos coloreos. Estas casillas son las que se marcan con azul en el siguiente dibujo:



Estas son las únicas casillas que podrían quedar sin cubrir son las que vimos anteriormente. A continuación vamos a encontrar un acomodo para que cada una de estas casillas quede vacía en su arreglo respectivo, con lo que demostraremos que estas son las únicas casillas que quedan vacías si se colocan 21 *triminós* en el tablero con las condiciones del problema. Los arrelgos son los siquientes:

Con esto hemos terminado la prueba. ■