Olimpiadas Costarricenses de Matemáticas
OLCOMA – 2020

Vademecum de Geometría

elaborado por

Joseph C. Várilly

Preparación para las Olimpiadas de Matemática, 2020

1 Introducción

Estos apuntes pretenden ser un resumen de lo que un candidato olímpico debería saber de geometría.

1.1 Glosario de notaciones

Lo que sigue es una breve lista de notaciones usuales.

- ⋆ AB denota el **segmento** con extremos A y B, o bien la **recta** que pasa por A y B.
- ⋆ $|AB|$ denota la **longitud** del segmento AB.
- ⋆ $\angle ABC$ denota el **ángulo** con lados BA y BC.
- ⋆ $\triangle ABC$ denota el **triángulo** con vértices A, B, C.
- ⋆ Los **círculos** se escribirán con letras negras: **K**, **L**, etcétera.
- ⋆ (ABC) denota el **área** del triángulo $\triangle ABC$; también, $(PQRS)$ denota el área del cuadrilátero $PQRS$, etcétera.
- ⋆ $AB : BC$ es la **razón** en la cual el punto B divide el segmento AC.
- ⋆ $AB \parallel CD$ significa que AB es **paralela** a CD.
- ⋆ $AB \perp CD$ significa que AB es **perpendicular** a CD.
- ⋆ $\triangle ABC \cong \triangle PQR$ indica que los triángulos $\triangle ABC$ y $\triangle PQR$ son **congruentes**.
- ⋆ $\triangle ABC \sim \triangle PQR$ indica que los triángulos $\triangle ABC$ y $\triangle PQR$ son **semejantes**.
- ⋆ $P = AB \cap CD$ significa que P es el **punto de intersección** de las rectas AB y CD.
- ⋆ $d(P, \ell)$ denota la **distancia perpendicular** desde el punto P a la recta ℓ.

Observación 1.1. No hay acuerdo universal para estas notaciones. Otras personas usan $[ABC]$ para denotar un área, emplean $A\widehat{B}C$ para señalar un ángulo, denotan segmentos con una barra simple: $\overline{AB}$, y rectas con una barra flechada: $\overleftrightarrow{AB}$, mientras escriben AB sin barras para denotar la longitud de $\overline{AB}$. Usted puede usar las notaciones que le sean más cómodas o familiares, lo que importa es el significado y no el formato.

► En el tratamiento del triángulo típico $\triangle ABC$, se acostumbra usar ciertas letras de manera estándar: he aquí una lista.

- ⋆ A, B, C son los vértices del triángulo $\triangle ABC$.
- ⋆ Los lados de este triángulo son BC, CA, AB;
  sus longitudes se denotarán por a, b, c, esto es, $a = |BC|$, $b = |CA|$, $c = |AB|$.
- ⋆ En funciones trigonométricas, los ángulos se denotarán simplemente por las letras A, B, C; así, $\operatorname{sen} A = \operatorname{sen}(\angle CAB)$, etc.
- ⋆ D, E, F denotarán los pies de las **alturas** AD, BE, CF:
  es decir, D es el punto de la recta BC tal que AD sea perpendicular a BC.
- ⋆ K, L, M serán los **puntos medios de los lados** BC, CA, AB:
  los segmentos AK, BL y CM (que unen un vértice con el punto medio del lado opuesto) se llaman las **medianas** del triángulo.
- ⋆ P, Q, R denotarán tres puntos de los lados respectivos BC, CA, AB.
  Cuando las rectas AP, BQ y CR pasan por un punto común J,
  las rectas AP, BQ y CR se llaman **cevianas** de $\triangle ABC$.
- ⋆ X, Y, Z serán los puntos donde el círculo inscrito toca los lados respectivos BC, CA, AB.
- ⋆ G denotará el **centroide** o **baricentro** del triángulo.
- ⋆ H denotará el **ortocentro** del triángulo.
- ⋆ I denotará el **incentro** del triángulo.
- ⋆ N denotará el centro del llamado **círculo de nueve puntos**.
- ⋆ O denotará el **circuncentro** del triángulo.
- ⋆ r denotará el radio del **círculo inscrito**: $|IX| = |IY| = |IZ| = r$.
- ⋆ R denotará el radio del **círculo circunscrito**: $|OA| = |OB| = |OC| = R$.
- ⋆ s denotará el **semiperímetro** del triángulo: es decir, $s = \frac{1}{2}(a + b + c)$.

Observación 1.2. De nuevo, hay otras preferencias en cuanto a las letras empleadas. Las variantes más comunes son: (i) A', B', C' (en vez de K, L, M) para denotar los puntos medios de los lados; (ii) AD, BE y CF (en vez de AP, BQ y CR) para denotar cevianas; y (iii) p (en vez de s) para denotar el semiperímetro. Es cuestión de gustos. Aquí se sigue la nomenclatura del libro *Elementos de Geometría Plana* (segunda edición) de Joseph Várilly, publicado por la Editorial de la UCR, San José, 2014.

1.2 Glosario de términos

Esta es una lista parcial de los términos que suelen emplearse cuando se describen las propiedades de triángulos y círculos.

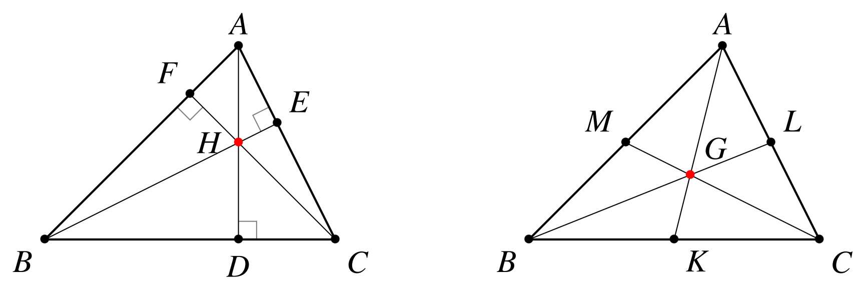

Figura 1: Alturas y medianas de un triángulo

Altura Es la recta perpendicular desde el vértice de un triángulo al lado opuesto; las alturas de $\triangle ABC$ se denotan AD, BE, CF (Figura 1).

Baricentro Es el punto de intersección de las medianas: $G = AK \cap BL \cap CM$ (Figura 1).

Bisectriz Recta que divide un ángulo dado en dos ángulos iguales.

Centroide Sinónimo de *baricentro*.

Ceviana Si tres rectas AP, BQ y CR pasan por los tres vértices de $\triangle ABC$ y son concurrentes, se llaman "cevianas": el teorema de Ceva establece una relación entre ellas.

Círculo de 9 puntos En $\triangle ABC$, este es el círculo que pasa por los pies de alturas D, E, F, los puntos medios de lados K, L, M y los puntos medios de los segmentos AH, BH, CH.

Circuncentro Es el centro O del **circuncírculo**, o *círculo circunscrito*, que pasa por los tres vértices A, B, C de $\triangle ABC$. El *radio* de este círculo es $R = |OA| = |OB| = |OC|$.

Circunferencia Borde de una figura redonda; en español peninsular, borde de un disco circular. (En estas notas, se emplea la palabra **círculo** en el sentido español de la palabra "circunferencia"; para denotar su interior, se usará el vocablo *disco*.)

Colineal Tres o más puntos en una misma recta se llaman *colineales* (o *alineados*).

Concurrente Tres o más rectas que pasan por un mismo punto se llaman *concurrentes*.

Cuadrángulo Sinónimo de *cuadrilátero*.

Cuadrilátero concíclico Cuadrilátero que tiene sus cuatro vértices en un mismo círculo.*

Cuerda Segmento que une dos puntos de alguna circunferencia (círculo o elipse).

Gran círculo Círculo de radio máximo en la superficie de una esfera: es la intersección de la esfera misma con un plano que pasa por el centro de la esfera.

Homotecia Una transformación geométrica que preserva ángulos y líneas rectas (pero no conserva longitudes); también se llama una *dilatación*.

Incentro Es el centro I del **incírculo**, o *círculo inscrito*, que toca los tres lados de $\triangle ABC$ en los puntos X, Y, Z; su radio es $r = |IX| = |IY| = |IZ|$.

Isometría Una transformación geométrica que preserva longitudes de segmentos (y ángulos también): puede ser una *traslación*, *rotación* o *reflexión*, o alguna combinación de estas.

Lugar geométrico La totalidad de puntos que satisfacen una condición geométrica determinada se llama el lugar geométrico (o *locus*) de esa condición; por ejemplo, el lugar geométrico del punto P tal que $|AP| = r$ es el círculo $\odot(A \mid r)$ con centro A y radio r.

Mediana Es la recta que une un vértice de un triángulo con el punto medio del lado opuesto; las medianas de $\triangle ABC$ son AK, BL y CM (Figura 1).

Mediatriz La mediatriz de un segmento AB, cuyo punto medio es M, es la recta que pasa por M en dirección perpendicular a AB. (No se dice "bisectriz perpendicular de segmento" para evitar confusión con bisectrices de ángulos.)

Ortocentro Es la intersección $H = AD \cap BE \cap CF$ de las tres alturas de $\triangle ABC$ (Figura 1).

Razón Si A, B, C son tres puntos colineales distintos, se escribe

$$AB : BC = \pm \frac{|AB|}{|BC|}$$

con signo $+$ si B está entre A y C pero con signo $-$ si B es externo al segmento AC. Si $AB : BC = r$ (positivo o negativo), se dice que B divide el segmento AC en la razón r.

Tangente Una **recta tangente** a un círculo (o a una elipse, parábola o hipérbola) es una recta que tiene un solo punto en común con la curva: su **punto de contacto**. Se dice que la recta **toca** la curva en ese punto.

Transversal Una transversal a dos o más rectas dadas es *otra recta que corta* a las primeras.

*Algunas personas dicen *cuadrilátero cíclico*, un término confuso; otros lo llaman *cuadrilátero cocíclico*, un término erróneo.

2 Triángulos

2.1 Congruencia de triángulos

Definición 2.1. Dos triángulos son **congruentes** ($\triangle ABC \cong \triangle PQR$) si sus lados correspondientes son iguales y sus ángulos correspondientes son también iguales. Esto representa seis condiciones en total: $|BC| = |QR|$, $|CA| = |RP|$, $|AB| = |PQ|$ y $\angle CAB = \angle RPQ$, $\angle ABC = \angle PQR$, $\angle BCA = \angle QRP$; pero tres de ellas son redundantes.

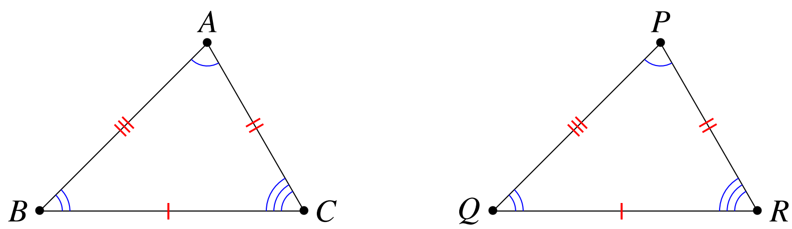

Figura 2: Dos triángulos congruentes

Resultado 2.1. *Hay cuatro* ***criterios de congruencia****, para que* $\triangle ABC \cong \triangle PQR$*:*

(L–A–L): $|AB| = |PQ|$, $|BC| = |QR|$ *y* $\angle ABC = \angle PQR$ *(dos lados y el ángulo incluido).*

(L–L–L): $|AB| = |PQ|$, $|BC| = |QR|$ *y* $|CA| = |RP|$ *(tres lados).*

(A–L–A): $\angle ABC = \angle PQR$*,* $\angle BCA = \angle QRP$ *y* $|BC| = |QR|$ *(dos ángulos y un lado cualquiera).*

(L–L–R): $|AB| = |PQ|$, $|CA| = |RP|$ *y* $\angle BCA = \angle QRP = 90^\circ$ *(dos lados y un ángulo recto).* □

Ejemplo 2.1. Propiedad del **triángulo isósceles**: si $|AB| = |AC|$ en el triángulo $\triangle ABC$, entonces $\angle ABC = \angle ACB$ y viceversa. Para verificarlo, fíjese que si $|AB| = |AC|$, entonces $\triangle ABC \cong \triangle ACB$ por el criterio L–A–L, y por ende $\angle ABC = \angle ACB$ por ser ellos ángulos correspondientes en estos dos triángulos. En cambio, si $\angle ABC = \angle ACB$ es la hipótesis, entonces $\triangle ABC \cong \triangle ACB$ por el criterio A–L–A (por ser $|BC| = |CB|$ evidentemente), y se puede concluir que $|AB| = |AC|$. ◊

Observación 2.1. Obsérvese bien la regla *de tomar los tres vértices de* $\triangle ABC$ *en orden*: A primero, luego B, después C. Con este convenio, la congruencia $\triangle ABC \cong \triangle PQR$ no es sinónimo de $\triangle ABC \cong \triangle RPQ$, sino que entraña una correspondencia $A \leftrightarrow P$, $B \leftrightarrow Q$, $C \leftrightarrow R$. En particular, $\triangle ABC$ no es congruente con $\triangle BCA$, salvo si $\triangle ABC$ sea equilátero.

Ejercicio 2.1. Si $\triangle ABC$ es equilátero y si P, Q, R son puntos de los lados respectivos BC, CA, AB tales que $|BP| = |CQ| = |AR|$, mostrar que $\triangle PQR$ es también equilátero. ◊

2.2 Paralelismo

El paralelismo de dos rectas se detecta por la igualdad de ciertos ángulos que ellas forman con una tercera recta (Figura 3).

Resultado 2.2. *Si EF es una transversal a las rectas AB y CD, con $AB \cap EF = P$ y $CD \cap EF = Q$, entonces $AB \parallel CD$ si y solo si $\angle APQ = \angle PQD$* (ángulos alternos iguales)*, si y solo si $\angle EPB = \angle PQD$* (ángulos correspondientes iguales)*, si y solo si $\angle BPQ + \angle PQD = \pi$* (ángulos internos al mismo lado suplementarios). □

Observación 2.2. Aquí $\pi = 180°$ denota un "ángulo directo" cuyos brazos son alineados en direcciones opuestas; se usa la abreviatura $\pi/2 = 90°$ para un ángulo recto. Dos ángulos rectos, pegados lado a lado, forman un ángulo directo.

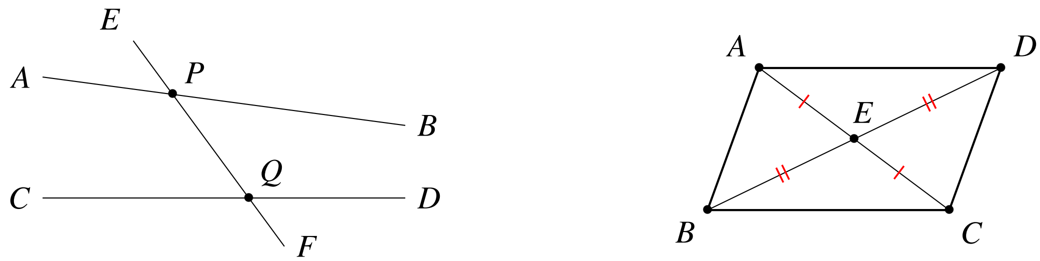

Figura 3: Transversal y paralelogramo

Resultado 2.3. (a) *Si $AD \parallel BC$ y $|AD| = |BC|$, entonces $AB \parallel DC$ y $|AB| = |DC|$.*

(b) *Si $AD \parallel BC$ y $AB \parallel DC$, entonces $|AD| = |BC|$ y $|AB| = |DC|$.*

(c) *Si $|AD| = |BC|$ y $|AB| = |DC|$, entonces $AB \parallel DC$ y $AD \parallel BC$.* □

En cualquiera de estos casos equivalentes, se dice que $ABCD$ es un **paralelogramo** (Figura 3).

Resultado 2.4. *Las diagonales de un paralelogramo $ABCD$ se bisecan una a la otra. Esto es, si $AC \cap BD = E$, entonces $|AE| = |EC|$ y $|BE| = |ED|$ (Figura 3).* □

Ejercicio 2.2. En el triángulo $\triangle ABC$, el segmento que una los puntos medios M y L de AB y AC es paralelo a la base y mide un medio de la base: es decir, $ML \parallel BC$ y $|ML| = \frac{1}{2}|BC|$.
⟦ Indicación: Usar un paralelogramo $ABCD$ cuya diagonal es AC. ⟧ ◊

En el Ejercicio anterior, el segmento ML se llama la **paralela media** al lado BC de $\triangle ABC$.

Ejercicio 2.3. Si K, L, M son los puntos medios de los lados BC, CA, AB de $\triangle ABC$, verificar que $\triangle KLM \cong \triangle AML \cong \triangle MBK \cong \triangle LKC$.
Si AD es la altura desde A a BC, mostrar también que $\triangle KLM \cong \triangle DML$. ◊

2.3 Angulos en un triángulo

Resultado 2.5. *La suma de los tres ángulos en un triángulo* $\triangle ABC$ *es un ángulo directo; es decir,* $\angle BCA + \angle CAB + \angle ABC = \pi$.

Para verificarlo, basta con trazar la recta que pasa por A paralelo a BC; por paralelismo, los tres ángulos del triángulo se identifican con los tres ángulos con vértice A (Figura 4). $\square$

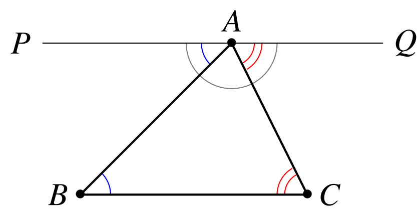

Figura 4: Los tres ángulos de $\triangle ABC$ tienen suma π

Resultado 2.6. *La suma de los ángulos internos en un polígono convexo de* $\underline{n}$ *lados es* $(n-2)\pi$.

Un polígono se llama **convexo** si cualquier cuerda queda dentro del polígono (una estrella de cinco puntas, por ejemplo, no es convexa). Si P es cualquier punto del interior, únase P a todos los vértices con segmentos: se forman así n triángulos que no traslapan, y cuyos ángulos tienen suma $n\pi$. Hay que descontar los ángulos en P, que forman un circuito completo de 2π; queda $(n-2)\pi$ para la suma de los ángulos en los vértices. $\square$

Resultado 2.7. *En un triángulo* $\triangle ABC$*, el mayor ángulo es opuesto al mayor lado: por ejemplo,* $|AC| > |AB|$ *si y solo si* $\angle ABC > \angle ACB$. $\square$

2.4 La desigualdad triangular

Resultado 2.8. *En un triángulo cualquiera* $\triangle ABC$*, resulta que* $|BA| + |AC| > |BC|$.

Para verlo, prolónguese el lado BA hasta D de modo que $|AD| = |AC|$ (Figura 5). El Resultado 2.7 muestra que $|BD| > |BC|$ y $|BD| = |BA| + |AC|$ por construcción. $\square$

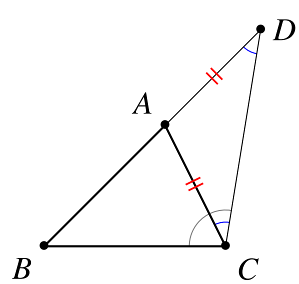

Figura 5: La desigualdad triangular

2.5 Area de un triángulo

El área de un **rectángulo** se calcula fácilmente: la fórmula es **área** = **base** × **altura**. (Esto es esencialmente la definición de la multiplicación de números reales.) Se conviene en llamar uno de los lados la **base**, y al lado adyacente se le llama la **altura**.

La fórmula "área = base × altura" es también aplicable a **paralelogramos**: porque un paralelogramo se transforma en rectángulo al cortarle una esquina triangular y al pegar esta esquina al lado opuesto (con la misma área total). Ahora la altura es la distancia entre la base y su lado opuesto.

Una diagonal de un paralelogramo lo divide en dos triángulos congruentes. La fórmula para el *área de un triángulo* es entonces:

$$\textbf{área} = \tfrac{1}{2}\,\textbf{base} \times \textbf{altura}.$$

Lo que sigue es una lista de las fórmulas más conocidas para el área de un triángulo $\triangle ABC$, en donde se usa la abreviatura $\Delta = (ABC)$ para denotar el área:

(a) $\Delta = \frac{1}{2} a h_a$ (media base por altura): es decir, $(ABC) = \frac{1}{2}\,|BC| \cdot |AD|$.

(b) $\Delta = \frac{1}{2} bc \operatorname{sen} A$ (medio producto de dos lados por seno del ángulo incluido).

(c) $\Delta = rs$ (inradio por semiperímetro).

(d) $\Delta = \dfrac{abc}{4R}$ (producto de lados entre 4 veces el circunradio).

(e) $\Delta = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$ (fórmula de Herón).

(f) En coordenadas cartesianas, si $A = (x_1, y_1)$, $B = (x_2, y_2)$, $C = (x_3, y_3)$, el área es:

$$\Delta = \tfrac{1}{2}(x_1 y_2 + x_2 y_3 + x_3 y_1) - \tfrac{1}{2}(x_1 y_3 + x_2 y_1 + x_3 y_2).$$

Los resultados más importantes relacionados con áreas de triángulos son los siguientes.

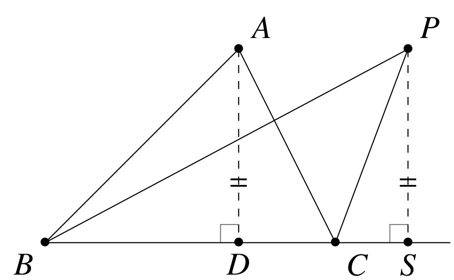

Figura 6: Dos triángulos con áreas iguales

Resultado 2.9. *Si $\triangle ABC$ y $\triangle PBC$ comparten la base BC y tienen la misma altura sobre ella (Figura 6), entonces $(ABC) = (PBC)$.* □

Resultado 2.10. *Si $\triangle ABC$ y $\triangle PQR$ tienen iguales alturas, $|AD| = |PS|$, entonces sus áreas son proporcionales a sus bases: $(ABC) : (PQR) = |BC| : |QR|$.* $\square$

Ejercicio 2.4. Si $\triangle ABC \sim \triangle PQR$, entonces $(ABC) : (PQR) = |BC|^2 : |QR|^2$. $\lozenge$

En particular, si ML es la paralela media a BC en $\triangle ABC$, entonces $(AML) = \frac{1}{4}(ABC)$.

Ejercicio 2.5. Las medianas dividen el triángulo $\triangle ABC$ en seis triángulos menores con vértice común G (Figura 1). Verificar que estos seis triángulos tienen áreas iguales. Concluir que el baricentro divide cada mediana en la razón $2 : 1$.

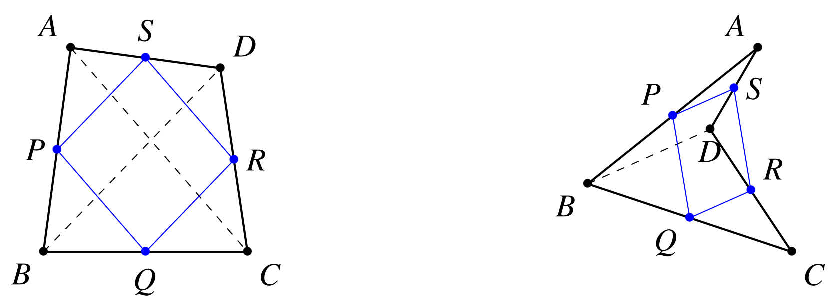

Figura 7: Un cuadrilátero y su paralelogramo medial

El área de un **cuadrilátero** $ABCD$ se calcula al subdividirlo en dos triángulos con una de los diagonales AC o BD:

$$(ABCD) = (ABC) + (CDA) = (DAB) + (BCD).$$

Ejercicio 2.6. *(Teorema de Varignon).* Si $ABCD$ es un cuadrilátero cualquiera y si P, Q, R, S son los puntos medios de los lados AB, BC, CD y DA en ese orden (Figura 7), entonces $PQRS$ es un *paralelogramo* cuya área es un medio de la del cuadrilátero: $(PQRS) = \frac{1}{2}(ABCD)$.

2.6 Trigonometría del triángulo

El Teorema de Pitágoras relaciona los cuadrados de los lados de un triángulo rectángulo.

Resultado 2.11. ***(Teorema de Pitágoras).*** *Si $\triangle ABC$ es un triángulo rectángulo con ángulo recto $\angle BCA$, entonces $|BC|^2 + |AC|^2 = |AB|^2$, es decir, $a^2 + b^2 = c^2$.* $\square$

Tres de las razones entre dos lados de este triángulo rectángulo son el **seno**, **coseno** y **tangente** del ángulo $\theta = \angle ABC$ (Figura 8):

$$\operatorname{sen}\theta = \frac{\text{cateto opuesto}}{\text{hipotenusa}} = \frac{|AC|}{|AB|} = \frac{b}{c}, \qquad \cos\theta = \frac{\text{cateto adyacente}}{\text{hipotenusa}} = \frac{|BC|}{|AB|} = \frac{a}{c},$$
$$\operatorname{tg}\theta = \frac{\text{cateto opuesto}}{\text{cateto adyacente}} = \frac{\operatorname{sen}\theta}{\cos\theta} = \frac{|AC|}{|BC|} = \frac{b}{a}.$$

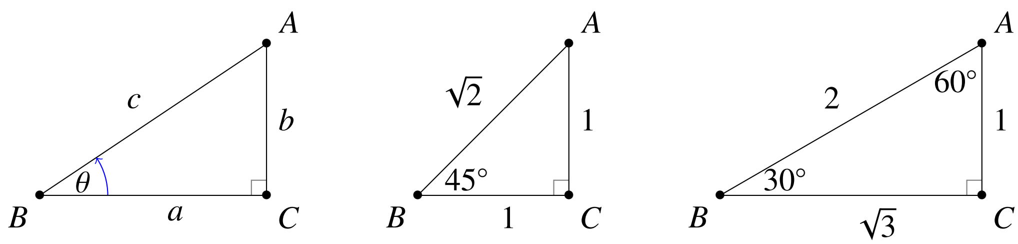

Figura 8: Razones de lados en un triángulo rectángulo

Las otras tres razones son los recíprocos de las primeras: respectivamente, el **cosecante**, **secante** y **cotangente** de $\theta = \angle ABC$:

$$\csc\theta = \frac{1}{\operatorname{sen}\theta} = \frac{|AB|}{|AC|} = \frac{c}{b}\,, \quad \sec\theta = \frac{1}{\cos\theta} = \frac{|AB|}{|BC|} = \frac{c}{a}\,, \quad \operatorname{ctg}\theta = \frac{1}{\operatorname{tg}\theta} = \frac{|BC|}{|AC|} = \frac{a}{b}\,.$$

Si $\angle ABC = \theta$, entonces $\angle CAB = 90° - \theta$ por el Resultado 2.5. Por lo tanto, $\cos\theta = \operatorname{sen}(90° - \theta)$:

$$\operatorname{sen} B = \cos A = \frac{|AC|}{|AB|}, \quad \cos B = \operatorname{sen} A = \frac{|BC|}{|AB|}, \quad \operatorname{tg} B = \frac{\operatorname{sen} B}{\cos B} = \frac{|AC|}{|BC|}.$$

Ejemplo 2.2. Para el ángulo $\pi/4 = 45°$, se usa un triángulo rectángulo isósceles con lados $1, 1, \sqrt{2}$. Para los ángulos $\pi/6 = 30°$ y $\pi/3 = 60°$, se usa un triángulo rectángulo de lados 1, $\sqrt{3}$ y 2 (se trata de partir un triángulo equilátero de lado 2 por una mediana: Figura 8). Un artificio para memorizar los senos de estos ángulos es el siguiente:

$$\operatorname{sen} 0° = \frac{\sqrt{0}}{2}, \quad \operatorname{sen} 30° = \frac{\sqrt{1}}{2}, \quad \operatorname{sen} 45° = \frac{\sqrt{2}}{2}, \quad \operatorname{sen} 60° = \frac{\sqrt{3}}{2}, \quad \operatorname{sen} 90° = \frac{\sqrt{4}}{2}. \qquad \Diamond$$

Observación 2.3. La **fórmula de Pitágoras** $a^2 + b^2 = c^2$ se convierte en $\cos^2\theta + \operatorname{sen}^2\theta = 1$ al dividir ambos lados por c^2, donde $\theta = \angle ABC$. Si se divide esta fórmula a su vez por $\cos^2\theta$ o bien por $\operatorname{sen}^2\theta$, se obtienen dos nuevas versiones de la fórmula pitagórica. Las tres versiones son:

$$\begin{aligned} \cos^2\theta + \operatorname{sen}^2\theta &= 1, \\ 1 + \operatorname{tg}^2\theta &= \sec^2\theta, \\ \operatorname{ctg}^2\theta + 1 &= \csc^2\theta. \end{aligned}$$

Ejercicio 2.7. El área de $\triangle ABC$ es $(ABC) = \frac{1}{2}|AC| \cdot |AB| \operatorname{sen}(\angle CAB)$; esto es, $\Delta = \frac{1}{2} bc \operatorname{sen} A$.
⟦ Indicación: Trazar la altura CF en el triángulo $\triangle ABC$. ⟧ ◊

Resultado 2.12. ***(Ley de cosenos.)*** *En triángulo $\triangle ABC$ cualquiera, resulta que*

$$|AB|^2 = |BC|^2 + |CA|^2 - 2|BC| \cdot |CA| \cos(\angle BCA). \qquad \square$$

Esto también se verifica fácilmente con la ayuda de la altura CF. Es preferible recordar la ley de cosenos para las longitudes a, b, c, de tres formas equivalentes:

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos C, \qquad a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A, \qquad b^2 = c^2 + a^2 - 2ca\cos B.$$

► No menos importante es la ley de senos.

Resultado 2.13. ***(Ley de senos.)*** *En un triángulo $\triangle ABC$ con circunradio R, resulta que*

$$\frac{a}{\operatorname{sen} A} = \frac{b}{\operatorname{sen} B} = \frac{c}{\operatorname{sen} C} = 2R. \qquad \square$$

Ejercicio 2.8. Comprobar la fórmula de área $\Delta = \dfrac{abc}{4R}$. ◊

Resultado 2.14. ***(Fórmula de Herón).*** *El área del triángulo $\triangle ABC$ satisface*

$$(ABC) = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}.$$

Para mostrar que $(ABC)^2 = s(s-a)(s-b)(s-c)$, se usa la fórmula $\Delta = \frac{1}{2}bc\operatorname{sen} A$ y la ley de cosenos. Con estos ingredientes, la fórmula de Herón un cálculo sencillo:

$$\begin{aligned}(ABC)^2 &= (\tfrac{1}{2}bc\operatorname{sen} A)^2 = \tfrac{1}{4}b^2c^2(1-\cos^2 A) = \tfrac{1}{4}b^2c^2 - \tfrac{1}{4}(bc\cos A)^2 \\ &= \frac{4b^2c^2 - (b^2+c^2-a^2)^2}{16} = \frac{(2bc+b^2+c^2-a^2)(2bc-b^2-c^2+a^2)}{16} \\ &= \frac{(b+c+a)(b+c-a)(a-b+c)(a+b-c)}{16} \\ &= \frac{2s(2s-2a)(2s-2b)(2s-2c)}{2\cdot 2\cdot 2\cdot 2} = s(s-a)(s-b)(s-c). \qquad \square\end{aligned}$$

2.7 Proporción y semejanza

2.7.1 La razón de división de un segmento

Cuando a y b son números no ceros, se escribe $a : b$ como sinónimo de la fracción a/b. Las expresiones tales como $|AB| : |PQ|$ o $(ABC) : (PQR)$, empleados anteriormente, son simples cocientes numéricos.

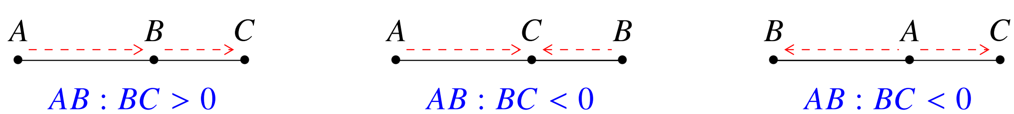

Figura 9: Razones de división de segmentos

Dados tres puntos alineados A, B, C, el cociente $|AB| : |BC|$ es la proporción entre las dos partes del segmento AC determinados por el punto B – si B está entre A y C. Para anticipar los casos en donde C queda entre A y B, o bien A queda entre B y C, se asigna un *signo negativo* a los casos en donde B es externo al segmento AC (Figura 9).

Definición 2.2. Si A, B y C son tres puntos colineales distintos, la **razón** $AB : BC$ se define por

$$AB : BC = \pm \frac{|AB|}{|AC|},$$

con signo + si B está entre A y C, pero con signo − si no (Figura 9).

Ejemplo 2.3. Del Ejercicio 2.5, se ve que $AG : GK = BG : GL = CG : GM = 2 : 1$, donde G es el baricentro del triángulo $\triangle ABC$. ◊

► Propiedades de las razones de división de segmentos:

(a) $AC : BC = -AC : CB$ y también $AB : AC = -BA : AC$.

(b) $BA : CB = -AB : CB = +AB : BC$.

(c) $AC : BC = \dfrac{1}{BC : AC}$.

(d) $AC : BC = 1 + (AB : BC)$.

(e) Si D es colineal con A, B y C, entonces $AB : BD = (AB : BC)(BC : BD)$.

(f) Si $AB : BC = PQ : QR$, entonces $AC : BC = PR : QR$ y $AB : AC = PQ : PR$.

(g) Si B y D son puntos de la recta AC con $AB : BC = AD : DC$, entonces $B = D$.

2.7.2 Los teoremas de Thales

El nombre "teorema de Thales" se aplica, en la habladuría popular, a cualquiera de los cuatro resultados siguientes.

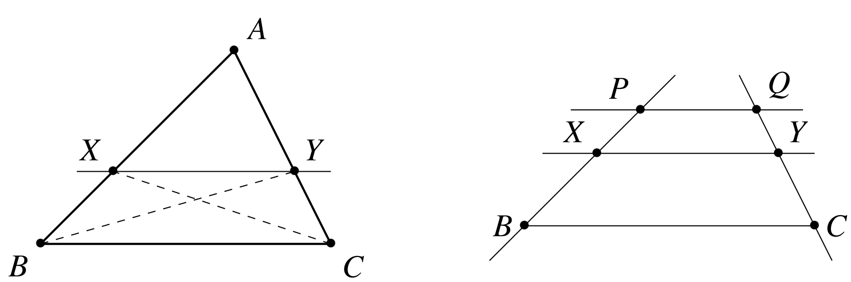

Figura 10: Paralelismo y proporcionalidad

Resultado 2.15. ***(Teorema de Thales 1)*** *Si una recta XY es paralela al lado BC del triángulo $\triangle ABC$ con X en la recta AB y Y en la recta AC, entonces $AX : XB = AY : YC$.*

Inversamente, si XY es una transversal a las rectas AB y AC (con X en AB y Y en AC), y si $AX : XB = AY : YC$, entonces $XY \parallel BC$.

Por ejemplo, si X está entre A y B y si Y está entre A y C (Figura 10), el Resultado 2.10 dice que $AX : XB = (AXY) : (YXB)$, pues los triángulos $\triangle AXY$ y $\triangle YXB$ tienen la misma altura (la distancia perpendicular de Y a la recta AB). De igual manera, vale $AY : YC = (AXY) : (YXC)$. Entonces $AX : XB = AY : YC$ si y solo si $(YXB) = (YXC)$, si y solo si B y C guardan la misma distancia de la recta XY, si y solo si $XY \parallel BC$. □

Resultado 2.16. ***(Teorema de Thales 2)*** *Si PQ, XY y BC son tres rectas paralelas, con P, X y B colineales y Q, Y y C colineales (de modo que PB y QC son dos transversales a las rectas paralelas PQ, XY y BC), entonces $PX : XB = QY : YC$ (Figura 10).*

Si las rectas PB y QC se cortan en el punto A, entonces $AX : XB = AY : YC$ y también $AX : XP = AY : YQ$, al aplicar el Resultado 2.15 al triángulo $\triangle APQ$. Entonces, por la propiedad (a) de razones, $AX : PX = AY : QY$. Al tomar recíprocos – propiedad (c), se ve que $PX : AX = QY : AY$. Entonces, por la propiedad (e):

$$PX : XB = (PX : AX)(AX : XB) = (QY : AY)(AY : YC) = QY : YC. \qquad \square$$

Definición 2.3. Dos triángulos son **semejantes**, escrito $\triangle ABC \sim \triangle PQR$, si sus ángulos correspondientes son iguales: $\angle CAB = \angle RPQ$, $\angle ABC = \angle PQR$, $\angle BCA = \angle QRP$.

Como los ángulos en un triángulo tienen suma π, basta con que dos de los tres pares de ángulos correspondientes sean iguales. Dos triángulos congruentes son automáticamente semejantes, pero la semejanza $\triangle ABC \sim \triangle PQR$ no implica la *igualdad* de lados correspondientes, sino solamente su *proporcionalidad*.

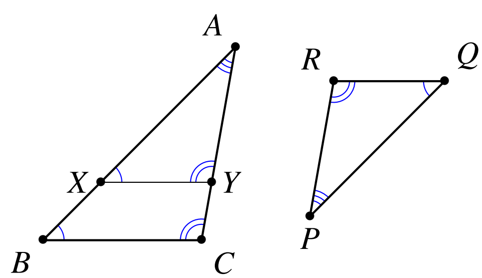

Figura 11: Dos triángulos semejantes

Resultado 2.17. ***(Teorema de Thales 3)*** *Resulta que*

$$\triangle ABC \sim \triangle PQR \quad \textit{si y solo si} \quad |BC| : |QR| = |CA| : |RP| = |AB| : |PQ|.$$

Si $\triangle ABC \sim \triangle PQR$, la igualdad de ángulos $\angle CAB = \angle QPR$ permite hacer una copia congruente $\triangle AXY \cong \triangle PQR$ (por el criterio L–A–L), con X en la recta AB tal que $|AX| = |PQ|$ y $AX : AB > 0$; Y en la recta AC tal que $|AY| = |PR|$ y $AY : AC > 0$ (Figura 11).

Las igualdades de ángulos $\angle ABC = \angle PQR = \angle AXY$ y $\angle BCA = \angle QRP = \angle XYA$ establecen que $XY \parallel BC$. Luego, del Resultado 2.15 se obtiene $AB : AX = AC : AY$, de donde sigue $|AB| : |PQ| = |AC| : |PR|$. □

Además, hay un **criterio de semejanza** de tipo "L–A–L".

Resultado 2.18. ***(Teorema de Thales 4)*** *Si* $|AB| : |PQ| = |AC| : |PR|$ *y si* $\angle CAB = \angle RPQ$*, entonces* $\triangle ABC \sim \triangle PQR$.

Para verificarlo, se localizan puntos X sobre AB y Y sobre AC como antes (Figura 11). Si $\angle CAB = \angle RPQ$, el criterio de *congruencia* L–A–L muestra que $\triangle AXY \cong \triangle PQR$. De nuevo se verifica que $\triangle AXY \sim \triangle ABC$. □

Ejercicio 2.9. En un triángulo $\triangle ABC$, hay puntos Q en el lado CA y R en el lado AB tales que $AQ : QC = AR : RB = 1 : 2$. Sea $T = BQ \cap CR$. Verificar la relación $(TCB) : (ABC) = 1 : 2$ y mostrar que $(ARTQ) = (RBT) = (QTC)$. ◊

2.7.3 Otros teoremas de proporcionalidad

Resultado 2.19. *Si el triángulo* $\triangle ABC$ *es rectángulo, con* $\angle CAB = 90°$*, la altura* AD *cumple* $|AD|^2 = |BD| \cdot |DC|$.

Es cuestión de ver que $\triangle ABC \sim \triangle DBA \sim \triangle DAC$ (Figura 12) y usar el Resultado 2.17. □

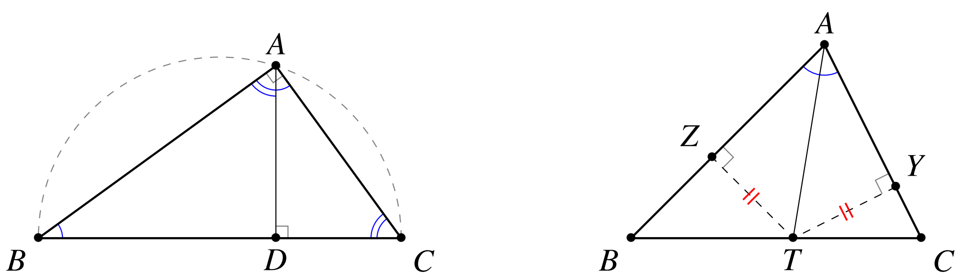

Figura 12: Media geométrica y bisectriz interna

Observación 2.4. Como $|AD| = \sqrt{|BD| \cdot |DC|}$, la longitud $|AD|$ es la llamada **media geométrica** de las longitudes $|BD|$ y $|DC|$. Esto da un procedimiento para *construir* la media geométrica de dos segmentos: (i) copiarlos en una misma recta como segmentos vecinos BD y DC; (ii) trazar un semicírculo con diámetro BC; (iii) levantar una perpendicular a este diámetro en el punto D. Si esta perpendicular corta semicírculo en A, el ángulo $\angle CAB$ es recto y entonces AD es la altura en un triángulo rectángulo. En particular, si los dos segmentos iniciales miden 1 y x, la altura AD mide $|AD| = \sqrt{x}$. De esta manera, se puede *construir raíces cuadradas con regla y compás*.

► Otro teorema de proporción muy útil es el siguiente: la bisectriz interna de un ángulo en un triángulo divide el lado opuesto en la razón de los dos lados adyacentes (Figura 12).

Resultado 2.20. *Si* AT *es la bisectriz interna de* $\angle CAB$*, con* T *en el lado* BC *de* $\triangle ABC$*, entonces* $BT : TC = |AB| : |AC|$.

Si se trazan perpendiculares TY desde T al lado CA, y TZ desde T al lado AB, entonces $\triangle ATY \cong \triangle ATZ$ por el criterio A–L–A (Figura 12). En consecuencia, $|TY| = |TZ|$. Al considerar TZ y TY como alturas de los triángulos $\triangle ABT$ y $\triangle ATC$, se ve que $(ABT) : (ATC) = |AB| : |AC|$. Estos triángulos comparten la altura AD; del Resultado 2.10 sigue $(ABT) : (ATC) = BT : TC$. □

2.8 Concurrencia de rectas especiales

Hay un fenómeno que se presenta una y otra vez en el estudio de triángulos: tres rectas de un determinado tipo se encuentran en un mismo punto, es decir, son **concurrentes**. Tal es el caso de las alturas, cuyo punto de intersección es el **ortocentro** $H = AD \cap BE \cap CF$. Ocurre lo mismo con las medianas, que se encuentran en el **baricentro** $G = AK \cap BL \cap CM$.

2.8.1 Mediatrices de lados y bisectrices de ángulos

Resultado 2.21. *Las mediatrices de los lados de un triángulo $\triangle ABC$ son concurrentes en el* ***circuncentro*** *O.*

Sea O el punto de intersección de las mediatrices de CA y AB: estas mediatrices son OL y OM. Falta ver que OK es perpendicular a BC, para que sea la tercera mediatriz (Figura 13). Por el criterio A–L–A, se verifica que $\triangle ALO \cong \triangle CLO$ y $\triangle AMO \cong \triangle BMO$; de paso, esto comprueba que $|OA| = |OB| = |OC|$, así que O es el circuncentro. Luego, se obtiene $\triangle BKO \cong \triangle CKO$ por el criterio L–L–L, y esto implica que $\angle OKC = 90°$. □

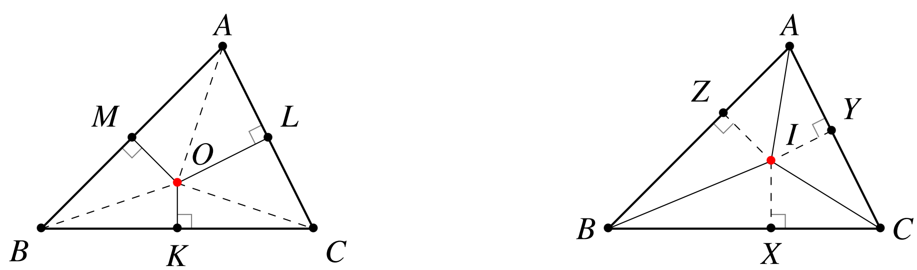

Figura 13: Circuncentro e incentro

De manera muy similar, se puede demostrar la concurrencia de las bisectrices de ángulos.

Ejercicio 2.10. Mostrar que *las bisectrices internas de los ángulos* de $\triangle ABC$ son *concurrentes* en el **incentro** I (Figura 13).

⟦ Indicación: Sea I el punto de intersección de las bisectrices internas de $\angle ABC$ y de $\angle BCA$. ⟧

Observación 2.5. Estas bisectrices se llaman *internas* porque también hay bisectrices *externas*: al cortarse dos rectas, se forman dos pares de ángulos iguales, que admiten dos bisectrices (perpendiculares entre sí). La recta que pasa por A en dirección perpendicular a AI es la **bisectriz externa** del ángulo en A. Esta recta corta el lado BC de $\triangle ABC$ externamente en un punto T'. Al igual que en el Resultado 2.20, una comparación de áreas muestra que T' divide BC en la razón $BT' : T'C = -|AB| : |AC|$ (la cual es negativa porque T' es externo al segmento BC).

Ejercicio 2.11. Comprobar la igualdad $BT' : T'C = -|AB| : |AC|$. ◊

2.8.2 El Teorema de Ceva

Todas las concurrencias ya vistas, salvo el caso de las mediatrices de lados, involucran tres rectas que pasan por los vértices respectivos de un triángulo. El teorema de Ceva establece una relación numérica que sirve como un criterio de concurrencia de tres rectas que pasan por los vértices.

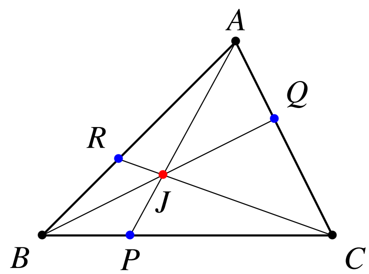

Figura 14: Concurrencia de tres cevianas

Resultado 2.22. ***(Teorema de Ceva).*** *Si P, Q, R son tres puntos de los lados respectivos BC, CA, AB de $\triangle ABC$, entonces las rectas AP, BQ y CR son* concurrentes *si y solo si*

$$(BP : PC)(CQ : QA)(AR : RB) = +1.$$

Si las rectas AP, BQ, CR son concurrentes en un punto J (Figura 14), dividen $\triangle ABC$ en seis triángulos menores. Del Resultado 2.10, se obtiene $BP : PC = (ABP) : (APC) = (JBP) : (JPC)$, de donde es fácil ver que $BP : PC = (ABJ) : (CAJ)$ también.[†] Del mismo modo, se ve que $CQ : QA = (BCJ) : (ABJ)$ y además $AR : RB = (CAJ) : (BCJ)$, y de ahí el producto de las tres razones es $+1$.

En cambio, si el producto de las tres razones es $+1$, llámese J al punto de intersección de $BQ \cap CR$. Sea $X = AJ \cap BC$. Por lo que se acaba de ver, AX, BQ y CR son cevianas y por ende $(BX : XC)(CQ : QA)(AR : RB) = 1$. Esto dice que $BX : XC = BP : PC$, lo cual implica que $X = P$, de la propiedad (g) de razones; por lo tanto AP, BQ, CR son concurrentes. □

Ejemplo 2.4. (a) Las *medianas* de $\triangle ABC$ son concurrentes:

$$(BK : KC)(CL : LA)(AM : MB) = 1 \cdot 1 \cdot 1 = 1.$$

(b) Las *bisectrices internas* de $\triangle ABC$ son concurrentes. Si las bisectrices son AT, BU, CV, entonces por el Resultado 2.20, vale

$$(BT : TC)(CU : UA)(AV : VB) = \frac{|AB|}{|AC|} \cdot \frac{|BC|}{|BA|} \cdot \frac{|CA|}{|CB|} = 1.$$

[†] Si $\dfrac{a}{b} = \dfrac{c}{d}$, entonces $\dfrac{a}{b} = \dfrac{a-c}{b-d}$ también.

(c) (Punto de Gergonne.) Si X, Y, Z son los puntos de contacto del incírculo con los lados de $\triangle ABC$ (Figura 13), entonces $|AY| = |AZ|$, $|BZ| = |BX|$, $|CX| = |CY|$; se trata de pares de tangentes desde A, B, C al incírculo; por lo tanto, $(BX : XC)(CY : YA)(AZ : ZB) = +1$. Entonces AX, BY, CZ son concurrentes.

(d) Dos bisectrices externas y la bisectriz interna del tercer vértice son concurrentes. Si la bisectriz externa de $\angle ABC$ corta la recta CA en U' y la bisectriz externa de $\angle BCA$ corta la recta AB en V', entonces $CU' : U'A = -|BC| : |BA|$ y $AV' : V'A = -|CA| : |CB|$, así que $(BT : TC)(CU' : U'A)(AV' : V'B) = +1$. ◊

Observación 2.6. El punto de concurrencia I_a de las tres bisectrices AT, BU', CV' (una interna y dos externas) tiene igual distancia perpendicular de las tres rectas BC, CA y AB, así que es el centro de un círculo que toca estas tres rectas: resulta que toca el lado BC internamente, en un punto X_a que queda entre B y C, pero toca los lados CA y AB externamente. Este círculo se llama un **exincírculo** de $\triangle ABC$; cada triángulo tiene tres exincírculos.

Ejercicio 2.12. Usar el teorema de Ceva para comprobar la concurrencia de las *alturas* de un triángulo. ⟦ Indicación: $|BD| = |AB| \cos B$. ⟧ ◊

Ejercicio 2.13. Si S es el punto medio de la mediana AK de $\triangle ABC$ y si $T = BS \cap CA$, comprobar que $CT : TA = 2 : 1$. ◊

Ejercicio 2.14. En un triángulo $\triangle ABC$ con mediana AK, sea Q un punto de la recta CA y R un punto de la recta AB. Verificar que $RQ \parallel BC$ si y solo si AK, BQ, CR son concurrentes. ◊

2.8.3 El Teorema de Menelaos

Resultado 2.23. ***(Teorema de Menelaos).*** *Tres puntos P, Q, R, en las rectas respectivas BC, CA, AB son* colineales *si y solo si*

$$(BP : PC)(CQ : QA)(AR : RB) = -1.$$

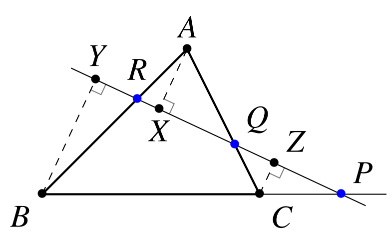

Figura 15: Colinealidad de tres puntos en los lados de $\triangle ABC$

Observación 2.7. Para que el producto sea negativo, al menos una de las tres razones debe ser negativa, así que se trata de una recta que corta uno de los tres lados de $\triangle ABC$ externamente (Figura 15); o bien las tres razones son negativas y la recta pasa lejos del interior de $\triangle ABC$. Hecho esta aclaración, es cuestión de ver si el valor absoluto del producto es $+1$. Si en efecto P, Q, R quedan en una misma recta, se pueden trazar perpendiculares desde A, B y C a esta recta y calcular ese producto por triángulos semejantes, en vista del teorema de Thales (Resultado 2.17). □

2.8.4 El Teorema de Desargues

Hay una relación recíproca entre concurrencia y colinealidad. Considérese dos triángulos, $\triangle ABC$ y $\triangle PQR$. Ellos poseen un **centro de perspectiva** O si las rectas que unen sus vértices correspondientes son concurrentes en O: esto es, si $O = AP \cap BQ \cap CR$ existe. Alternativamente, las intersecciones de lados correspondientes podrían estar alineados: si los puntos $X = BC \cap QR$, $Y = CA \cap RP$, $Z = AB \cap PQ$ son colineales, $\triangle ABC$ y $\triangle PQR$ (Figura 16). El teorema de Desargues afirma que existe un centro de perspectiva si y solo si existe un eje de perspectiva.

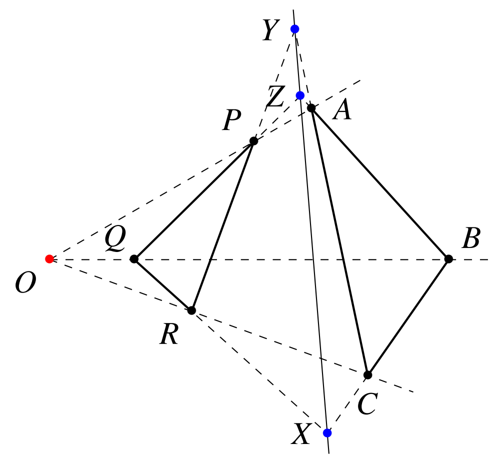

Figura 16: Centro y eje de perspectiva de dos triángulos

Resultado 2.24. ***(Teorema de Desargues).*** *Si $\triangle ABC$ y $\triangle PQR$ son dos triángulos, entonces las rectas AP, BQ y CR son concurrentes si y solo si los puntos $X = BC \cap QR$, $Y = CA \cap RP$ y $Z = AB \cap PQ$ son colineales.*

Aplíquese el teorema de Menelaos a la Figura 16. Si AP, BQ y CR son concurrentes en el punto O, se consideran las rectas PQ, QR, RP como transversales a los respectivos triángulos $\triangle OAB$, $\triangle OBC$ y $\triangle OCA$. De ahí se obtiene tres ecuaciones:

$$\begin{aligned}(AZ : ZB)(BQ : QO)(OP : PA) &= -1,\\ (BX : XC)(CR : RO)(OQ : QB) &= -1,\\ (CY : YA)(AP : PO)(OR : RC) &= -1.\end{aligned}$$

Al multiplicar los lados izquierdos, los términos con O cancelan y resulta

$$(BX : XC)(CY : YA)(AZ : ZB) = (-1)^3 = -1.$$

Del teorema de Menelaos aplicado al triángulo $\triangle ABC$, se deduce que X, Y, Z son colineales. $\square$

Ejercicio 2.15. Demostrar la implicación inversa: si X, Y, Z en la Figura 16 son colineales, comprobar que AP, BQ y CR son concurrentes.

⟦ Indicación: Sea $O = AP \cap BQ$. Se debe mostrar que O, C, R son colineales. ⟧ $\lozenge$

Ejercicio 2.16. Si AD, BE y CF son las alturas de $\triangle ABC$ (Figura 1), verificar que los puntos de intersección $BC \cap EF$, $CA \cap FD$ y $AB \cap DE$ son colineales. $\lozenge$

3 Círculos

En esta sección $\mathbf{K} = \odot(O \mid r)$ denotará un círculo con centro O y radio r. Dos puntos A y B de la circunferencia son los extremos de dos *arcos de círculo* (uno más corto y otro más largo, o bien dos arcos de semicírculo). La frase *el arco* AB designa cualquiera de estos dos arcos, cuya unión es toda la circunferencia.

3.1 Angulos en un círculo

El círculo tiene dos propiedades básicos: la primera, obviamente, es que todos sus radios son de igual longitud. La segunda es la igualdad de dos ángulos subtendidos por el mismo arco.

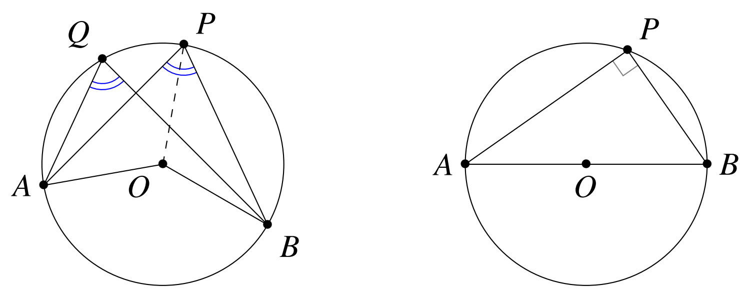

Figura 17: Angulos subtendidos por un arco AB

Resultado 3.1. *Si AB es un arco de un círculo y P es un punto de la circunferencia, entonces $\angle BOA = 2\angle BPA$. Si Q es otro punto de la circunferencia, entonces $\angle BPA = \angle BQA$.*

Los triángulos $\triangle OPA$ y $\triangle OPB$ son isósceles, así que

$$\begin{aligned} 360^\circ - \angle BOA &= \angle BOP + \angle POA \\ &= (180^\circ - 2\angle BPO) + (180^\circ - 2\angle OPA) = 360^\circ - 2\angle BPA. \end{aligned}$$

Entonces $\angle BPA = \frac{1}{2}\angle BOA$ y también $\angle BQA = \frac{1}{2}\angle BOA$ (Figura 17). □

Resultado 3.2. *El ángulo en un semicírculo es un ángulo recto.*

El ángulo en un semicírculo es subtendido por la semicircunferencia opuesta (Figura 17): si AB es un diámetro del círculo, entonces $\angle BOA = 180^\circ$, así que $\angle BPA = 90^\circ$. □

3.2 Cuadriláteros concíclicos

Si A, B, C, D son cuatro puntos distintos en un círculo, ellos forman un **cuadrilátero concíclico**.‡ Si B está en uno de los arcos AC y D está en el otro, se dice que el cuadrilátero $ABCD$ es **convexo**; pero si los dos puntos B y D están en el mismo arco AC, el cuadrilátero $ABCD$ es **cruzado** (Figura 18).

‡Algunas personas lo llaman *cuadrilátero cíclico*, un término confuso; otras personas dicen *cuadrilátero cocíclico*, un término erróneo.

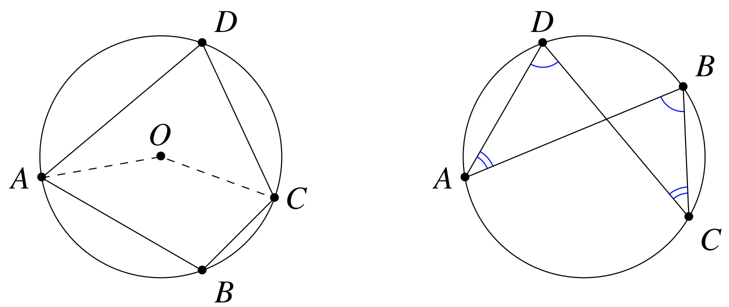

Figura 18: Cuadriláteros concíclicos: convexo y cruzado.

Resultado 3.3. *Un cuadrilátero $ABCD$ es concíclico si y solo si:*

Caso convexo: *sus ángulos opuestos son suplementarios:* $\angle ABC + \angle CDA = 180°$.

Caso cruzado: *sus ángulos opuestos son iguales:* $\angle ABC = \angle ADC$.

Si A, B, C, D son cuatro puntos de un círculo, estas relaciones entre ángulos siguen del Resultado 3.1. En el caso convexo, los ángulos $\angle AOC$ y $\angle COA$ forman un circuito completo alrededor de O: su suma es $360°$. En el caso cruzado, $\angle CBA$ y $\angle CDA$ son dos ángulos subtendidos por el mismo arco AC, por tanto son iguales. □

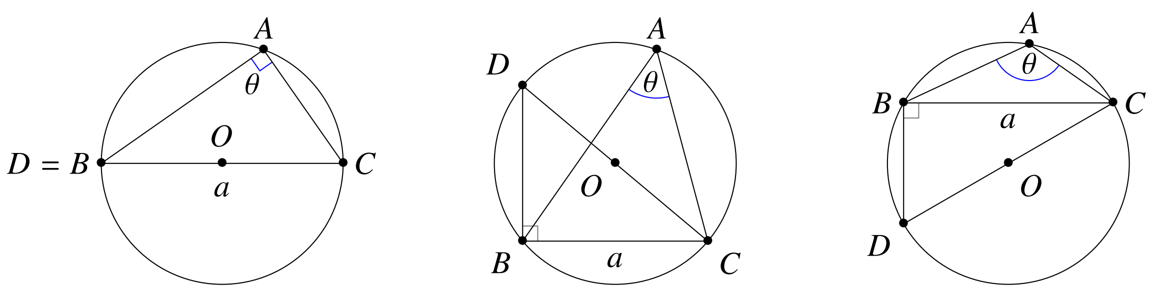

Figura 19: La ley de senos en $\triangle ABC$

Observación 3.1. Estas relaciones entre ángulos permiten verificar la *ley de senos* (Resultado 2.13). En efecto, si $\triangle ABC$ es un triángulo, sea CD el *diámetro* del circuncírculo con un extremo en C. Si $D = B$, el triángulo $\triangle ABC$ es rectángulo, $\operatorname{sen} A = \operatorname{sen} 90° = 1$ y $a = 2R$ (Figura 19). Si no, A, B, C, D son cuatro puntos del circuncírculo de $\triangle ABC$. Entonces bien $\angle CAB = \angle CDB$ si $ABCD$ es cruzado; o bien $\angle CAB = 180° - \angle CDB$ si $ABCD$ es convexo. Como $\operatorname{sen}(180° - \theta) = \operatorname{sen}\theta$ siempre, se verifica $\operatorname{sen} A = \operatorname{sen}(\angle CDB)$ en cualquiera de los dos casos. El triángulo $\triangle BCD$ es rectángulo, con hipotenusa $|CD| = 2R$, así que

$$\operatorname{sen} A = \operatorname{sen}(\angle CDB) = \frac{|BC|}{|CD|} = \frac{a}{2R}, \quad \text{de donde} \quad \frac{a}{\operatorname{sen} A} = 2R. \qquad \square$$

Ejercicio 3.1. Si R es el radio del circuncírculo de $\triangle ABC$, verificar la fórmula de área:

$$(ABC) = 2R^2 \operatorname{sen} A \operatorname{sen} B \operatorname{sen} C. \qquad \lozenge$$

Ejercicio 3.2. En un triángulo $\triangle ABC$ con ortocentro H y alturas AD, BE y CF, mostrar que los cuadriláteros $AFHE$, $FBDH$ y $ADBE$ son concíclicos. Deducir que H es el **incentro** del triángulo $\triangle DEF$. ◊

Ejercicio 3.3. En un triángulo $\triangle ABC$ con alturas AD, BE yCF, comprobar las fórmulas:

$$\operatorname{sen}(\angle FDE) = \operatorname{sen} 2A, \quad \operatorname{sen}(\angle DEF) = \operatorname{sen} 2B, \quad \operatorname{sen}(\angle EFD) = \operatorname{sen} 2C.$$

⟦ Indicación: Usar el dibujo del Ejercicio 3.2. ⟧ ◊

Ejercicio 3.4. En un triángulo $\triangle ABC$ con alturas AD, BE yCF, mostrar que los tres triángulos $\triangle AEF$, $\triangle DBF$, $\triangle DEC$ son semejantes a $\triangle ABC$. ◊

Ejercicio 3.5. (La recta de Simson). Si P es un punto del circuncírculo de $\triangle ABC$ y si PU, PV, PW son las perpendiculares desde P a las rectas respectivas BC, CA, AB, verificar que los puntos U, V, W son colineales. ◊

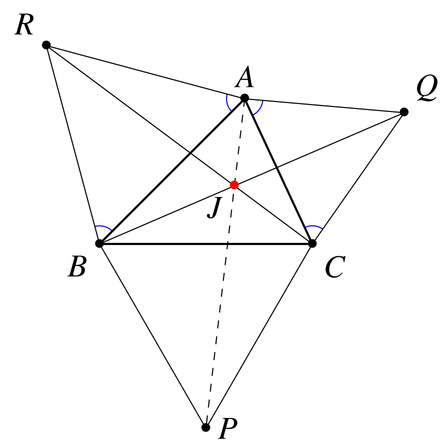

Figura 20: El punto de Fermat

Ejercicio 3.6. (Punto de Fermat). Sean $\triangle PBC$, $\triangle QCA$, $\triangle RAB$ los triángulos equiláteros construidos sobre los lados de $\triangle ABC$. Sea $J = BQ \cap CR$. Demostrar que los $\triangle ABQ \cong \triangle ARC$ y que $\angle RJB = 60°$. Concluir que los cuadriláteros $CQAJ$, $ARBJ$ y $BPCJ$ son concíclicos. Deducir que A, J y P son colineales, así que AP, BQ y CR son concurrentes en J; y que estas rectas forman seis ángulos de $60°$ alrededor de J.

3.2.1 El Teorema de Tolomeo

Resultado 3.4. ***(Teorema de Tolomeo).*** *Si $ABCD$ es un cuadrilátero concíclico convexo, con diagonales AC y BD, entonces (Figura 21):*

$$|AC| \cdot |BD| = |AB| \cdot |CD| + |AD| \cdot |BC|. \qquad \square$$

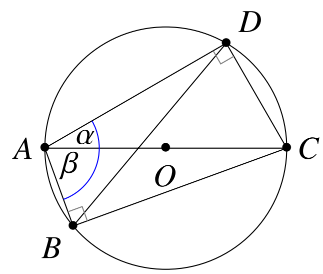

Figura 21: Seno de una suma de ángulos

Resultado 3.5. *Si α y β son ángulos agudos,* $\operatorname{sen}(\alpha+\beta)$ *obedece la fórmula:*

$$\operatorname{sen}(\alpha+\beta) = \operatorname{sen}\alpha\cos\beta + \cos\alpha\operatorname{sen}\beta.$$

En un círculo con diámetro AC se puede trazar dos triángulos rectángulos $\triangle DAC$ y $\triangle ABC$, uno en cada semicírculo, con $\angle DAC = \alpha$ y $\angle CAB = \beta$ (Figura 21). Luego

$$\operatorname{sen}\alpha = \frac{|CD|}{|AC|}, \quad \cos\alpha = \frac{|AD|}{|AC|}, \quad \operatorname{sen}\beta = \frac{|BC|}{|AC|}, \quad \cos\beta = \frac{|AB|}{|AC|}.$$

El círculo es el circuncírculo de $\triangle DAB$, con diámetro $2R = |AC|$, y el ángulo $\angle DAB$ mide $\alpha+\beta$. La ley de senos, aplicado a $\triangle DAB$, dice que $|BD|/\operatorname{sen}(\angle DAB) = 2R = |AC|$ y en consecuencia $\operatorname{sen}(\alpha+\beta) = |BD| : |AC|$. Entonces el teorema de Tolomeo dice que

$$\begin{aligned}\operatorname{sen}(\alpha+\beta) = \frac{|BD|}{|AC|} &= \frac{|AC|\cdot|BD|}{|AC|\cdot|AC|} = \frac{|AB|\cdot|CD|}{|AC|\cdot|AC|} + \frac{|AD|\cdot|BC|}{|AC|\cdot|AC|} \\ &= \frac{|CD|}{|AC|}\cdot\frac{|AB|}{|AC|} + \frac{|AD|}{|AC|}\cdot\frac{|BC|}{|AC|} = \operatorname{sen}\alpha\cos\beta + \cos\alpha\operatorname{sen}\beta. \qquad \square\end{aligned}$$

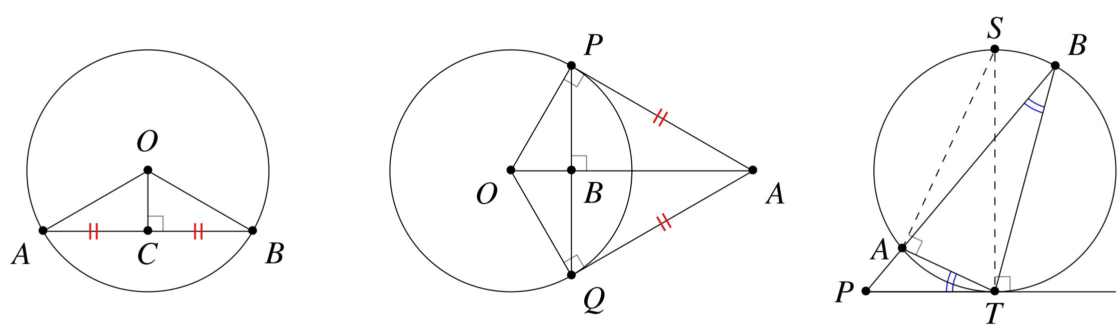

Figura 22: Radios, cuerdas y tangentes

3.3 Cuerdas y tangentes

Resultado 3.6. *La mediatriz de una cuerda de círculo pasa por el centro del círculo.*

El radio que pasa por el punto medio M de una cuerda AB es perpendicular a esa cuerda, porque $\triangle OAM \cong \triangle OBM$ por el criterio L–L–L (Figura 22). ☐

Resultado 3.7. *La recta tangente al círculo en P es perpendicular al radio OP.* ☐

Resultado 3.8. *Si AP, AQ son las dos tangentes a un círculo desde un punto externo A (que tocan el círculo en P y Q respectivamente), entonces $|AP| = |AQ|$.*

Fíjese que $\triangle AOP \cong \triangle AOQ$ por el criterio L–L–R (Figura 22). ☐

Resultado 3.9. *Si AB es una cuerda y P es un punto externo de la recta AB, sea PT es una recta tangente desde P al círculo. Entonces $\angle PTA = \angle TBA$, el ángulo subtendido por el arco AT.*

Si ST es el diámetro que pasa por T, está claro que $\angle PTA = 90° - \angle ATS = \angle TSA$, porque $\angle PTS$ y $\angle SAT$ son ángulos rectos. También $\angle TBA = \angle TSA$, porque son dos ángulos subtendidos por el mismo arco AT (Figura 22). ☐

3.3.1 Potencia de punto respecto de círculo

Resultado 3.10. *Si dos cuerdas AB y CD de un círculo se cortan (interna o externamente) en un punto P, entonces $|PA| \cdot |PB| = |PC| \cdot |PD|$.*

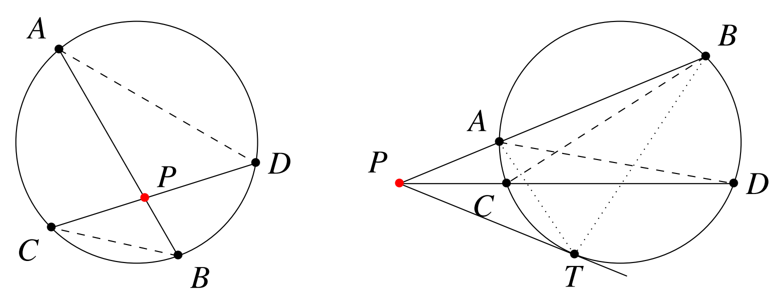

Figura 23: Potencia de un punto P con respecto a un círculo

En los triángulos $\triangle APD$ y $\triangle CPB$, se ve que $\angle DAB = \angle BCD$ (subtendidos por el arco BD) y también $\angle PDA = \angle PBC$ (subtendidos por el arco AC): Figura 23. Además, $\angle APD = \angle CPB$. Por lo tanto, $\triangle APD \sim \triangle CPB$. Del teorema de Thales (Resultado 2.17), sigue $|AP| : |PD| = |CP| : |PB|$, de donde $|PA| \cdot |PB| = |PC| \cdot |PD|$.

Si P es un punto exterior al círculo, con recta tangente PT, resulta que $\triangle APT \sim \triangle TPB$, porque $\angle PTA = \angle PBT$ del Resultado 3.9; y $\angle APT = \angle TPB$ es evidente (Figura 22). Ahora el teorema de Thales dice que $|AP| : |PT| = |TP| : |PB|$, de donde $|PA| \cdot |PB| = |PT|^2$. ☐

Observación 3.2. La igualdad de productos dice que el valor de $|PC| \cdot |PD|$ *no depende de la cuerda AB sino solamente del punto P.*

Fíjese que $PA : PB > 0$ si y solo si P es exterior al círculo, mientras $PA : PB < 0$ si y solo si P es un punto interior. Llamamos **potencia de** P (con respecto a ese círculo) a la cantidad $\pm|PA| \cdot |PB|$, con signo + si y solo si P es un punto *externo*, donde A y B son los puntos de intersección del círculo con *cualquier* recta que pasa por P.

Ejercicio 3.7. Verificar que la potencia de P es $|PO|^2 - r^2$, si r es el radio del círculo. ◊

Ejercicio 3.8. Si H es el ortocentro de $\triangle ABC$, mostrar que

$$|AH| \cdot |HD| = |BH| \cdot |HE| = |CH| \cdot |HF|.$$

⟦ Indicación: Usar el circuncírculo de $\triangle ABC$. ⟧ ◊

3.4 El círculo de nueve puntos

Resultado 3.11. ***(La recta de Euler).*** *En un triángulo $\triangle ABC$, el circuncentro O, el baricentro G y el ortocentro H son colineales, en la razón $OG : GH = 1 : 2$.*

Llámese T, provisionalmente, al punto de la recta OG tal que $OG : GT = 1 : 2$. Los triángulos $\triangle KGO$ y $\triangle AGT$ (Figura 24) son semejantes, porque $KG : GA = 1 : 2 = OG : GT$ y además $\angle KGO = \angle AGT$ (ángulos opuestos por el vértice). En particular, $\angle OKG = \angle TAG$, de donde $AT \parallel OK$. Esto dice que T es un punto de la altura AD. El mismo razonamiento muestra que T es un punto de las alturas BE y CF: por ende, T es el ortocentro H. □

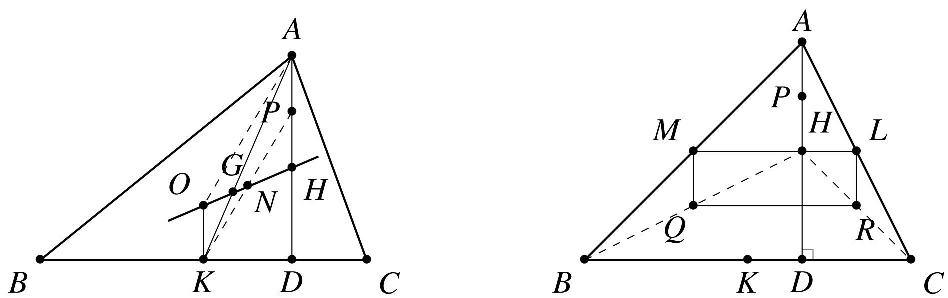

Figura 24: La recta de Euler y el rectángulo $LMQR$

Resultado 3.12. *En el triángulo $\triangle ABC$, si P, Q, R son los respectivos puntos medios de AH, BH, CH, entonces $LMQR$ es un rectángulo (Figura 24).*

La media paralela ML a BC cumple $ML \parallel BC$ y $|ML| = \frac{1}{2}|BC|$ por el Ejercicio 2.2. En el triángulo $\triangle HBC$, QR es la media paralela a BC; luego $QR \parallel BC$ y $|QR| = \frac{1}{2}|BC|$. Entonces $LMQR$ es, al menos, un paralelogramo. En el triángulo $\triangle ABH$, MQ es la media paralela a AH, así que $MQ \parallel AH$ y $|MQ| = \frac{1}{2}|AH|$. Como $AH \perp BC$, se concluye que $MQ \perp QR$ y que $LMQR$ es un rectángulo. □

Observación 3.3. El mismo razonamiento muestra que $KLPQ$ y $MKRP$ también son rectángulos. Estos tres rectángulos comparten las tres diagonales KP, LQ y MR. Por tanto tienen un centro común $N = KP \cap LQ \cap MR$.

Resultado 3.13. *El punto N es el centro de un círculo que pasa por D, E, F, K, L, M, P, Q, R.*

Este es el **círculo de nueve puntos**: Figura 25.

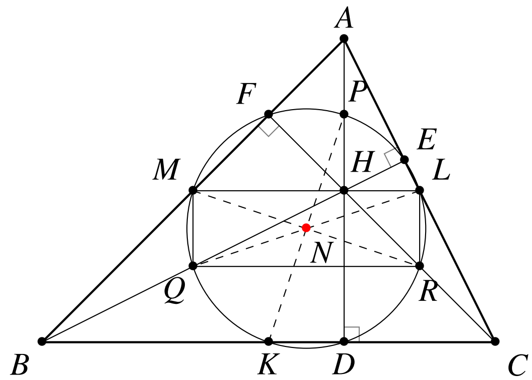

Figura 25: El círculo de nueve puntos de $\triangle ABC$

Las tres diagonales KP, LQ y MR de los rectángulos $LMQR$, $KLPQ$ y $MKRP$ son *diámetros de un círculo* que pasa por los seis puntos K, L, M, P, Q y R. Este círculo también pasa por D porque $\angle KDP$ es un ángulo recto y por eso es un ángulo en el semicírculo con diámetro KP (Figura 25). De la misma forma, los diámetros LQ y MR subtienden ángulos rectos en E y F respectivamente. $\square$

Resultado 3.14. *N es el punto medio del segmento OH.*

Como $\triangle KGO \sim \triangle AGH$, con lados en la razón $1 : 2$, resulta que $|OK| = \frac{1}{2}|AH| = |PH|$ (véase la Figura 24). Además, $OK \parallel PH$ porque estas dos rectas son perpendiculares a BC. Entonces $OKHP$ es un paralelogramo, cuyas diagonales OH y KP se bisecan mutuamente, es decir, comparten el mismo punto medio, el cual es N. $\square$

Ejercicio 3.9. Comprobar que $AOKP$ es un paralelogramo (Figura 24) y concluir que el radio del círculo de nueve puntos es $\frac{1}{2}R$ (donde R es el radio del circuncírculo de $\triangle ABC$). $\lozenge$

4 Fórmulas Analíticas

4.1 Puntos y rectas con coordenadas

En esta sección, (x, y) denotarán coordenadas cartesianas de un punto P en el plano. Se debe describir los puntos P que cumplen una determinada *condición geométrica*, la cual se traduce en una *ecuación* satisfecha por sus coordenadas (x, y). Para referirse a ciertos puntos fijos, se escribirá

$$A = (x_1, y_1), \quad B = (x_2, y_2), \quad C = (x_3, y_3).$$

► Es importante notar que se puede – y se debe – *colocar los ejes coordenados en cualquier posición conveniente* para resolver un problema geométrico particular.

Fórmula 4.1. *Una recta cumple una ecuación de primer grado:* $\underline{ax + by + c = 0}$.

Esta recta pasa por el origen $(0, 0)$ si y solo si $c = 0$. En todo caso $a^2 + b^2 > 0$, pues de lo contrario habría $a = b = 0$ y la ecuación no sería de primer grado. □

Fórmula 4.2. *Una recta perpendicular a* $\underline{ax + by + c = 0}$ *tiene ecuación* $\underline{bx - ay + d = 0}$.

Los posibles valores de d corresponden a las diversas rectas que son todas perpendiculares a la primera (y paralelas entre sí). □

Fórmula 4.3. *Si $A = (x_1, y_1)$, $B = (x_2, y_2)$, la recta AB tiene ecuación*

$$\boxed{(y_2 - y_1)(x - x_1) - (x_2 - x_1)(y - y_1) = 0.}$$

Está claro que esta es una recta (pues la ecuación es de primer grado), y que dos soluciones son $(x, y) = (x_1, y_1)$ y también $(x, y) = (x_2, y_2)$: esta es entonces la recta que pasa por A y por B. Una fórmula equivalente es

$$\frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}.$$

□

Ejercicio 4.1. Comprobar que $A = (x_1, y_1)$, $B = (x_2, y_2)$, $C = (x_3, y_3)$ son colineales si y solo si

$$\tfrac{1}{2}(x_1y_2 + x_2y_3 + x_3y_1) - \tfrac{1}{2}(x_1y_3 + x_2y_1 + x_3y_2) = 0.$$

◊

Observación 4.1. El lado izquierdo de la última ecuación representa el *área del triángulo* $\triangle ABC$ (esta área es cero si los tres puntos son colineales). Su signo es positivo si y solo si el recorrido de los vértices A, B, C, A es un giro contrario a reloj.

Fórmula 4.4. *Un punto P cualquiera en la recta AB tiene la forma*

$$\boxed{P = \big((1 - t)x_1 + tx_2,\ (1 - t)y_1 + ty_2\big),}$$

en cuyo caso, $AP : PB = t : (1 - t)$.
En particular, el punto medio del segmento AB tiene coordenadas $M = \left(\dfrac{x_1 + x_2}{2}, \dfrac{y_1 + y_2}{2}\right)$.

El cociente $t : (1-t) = \frac{t}{1-t}$ es negativo si $t < 0$ y también si $t > 1$. El **segmento** AB consiste de los puntos P con $0 \leq t \leq 1$. Por ejemplo, $P = A$ cuando $t = 0$, y $P = B$ cuando $t = 1$. $\square$

Ejercicio 4.2. Comprobar que el **baricentro** del triángulo $\triangle ABC$ tiene las coordenadas

$$G = \left(\frac{x_1 + x_2 + x_3}{3}, \frac{y_1 + y_2 + y_3}{3}\right).$$

⟦ Indicación: Si K es el punto medio de BC, vale $AG : GK = \frac{2}{3} : \frac{1}{3}$, por el Ejercicio 2.5. ⟧ $\lozenge$

Fórmula 4.5. *La **longitud** del segmento AB es* $|AB| = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$. $\square$

Fórmula 4.6. *La **distancia perpendicular** $\underline{d}$ desde (x_1, y_1) a la recta $\underline{ax + by + c = 0}$ es*

$$\boxed{d = \pm \frac{ax_1 + by_1 + c}{\sqrt{a^2 + b^2}}\,.}$$

Esta fórmula lleva un *signo* $\pm$ porque el numerador $(ax_1 + by_1 + c)$ tiene signo que depende de la posición del punto $A = (x_1, y_1)$ con respecto a la recta: es positivo cuando A está a un lado de la recta y negativo cuando está al otro lado (desde luego, el numerador es cero si y sólo si A pertenece a la recta). $\square$

4.2 Ecuaciones de círculos

Fórmula 4.7. *La ecuación del círculo con centro P_0 y radio r es*

$$\boxed{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2.}$$ $\square$

Fórmula 4.8. *La ecuación*

$$\boxed{x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + c = 0}$$

representa un círculo con centro $(-g, -f)$ y radio $r = \sqrt{g^2 + f^2 - c}$. $\square$

Fórmula 4.9. *La recta tangente al círculo $\underline{x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + c = 0}$ en un punto (x_1, y_1) de la circunferencia tiene la ecuación:*

$$x_1x + y_1y + g(x + x_1) + f(y + y_1) + c = 0.$$

La ecuación anterior representa una recta, por ser de primer grado. El círculo y la recta pasan por el punto $(x, y) = (x_1, y_1)$, y que la recta perpendicular $(y_1 + f)(x - x_1) - (x_1 + g)(y - y_1) = 0$ pasa por (x_1, y_1) y por el centro $(-g, -f)$ del círculo. (Resultado 3.7.) $\square$

Ejercicio 4.3. Mostrar que la cantidad $x_1^2 + y_1^2 + 2gx_1 + 2fy_1 + c$ es la **potencia** del punto $P = (x_1, y_1)$ con respecto al círculo $x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + c = 0$.

⟦ Indicación: si O es el centro del círculo, la potencia de P es $|PO|^2 - r^2$. ⟧ $\lozenge$

4.3 Otras curvas cuadráticas

El círculo tiene una ecuación de segundo grado, pero las ecuaciones de segundo grado pueden representar otras curvas. En primer lugar, dadas dos rectas $a_1x+b_1y+c_1 = 0$ y $a_2x+b_2y+c_2 = 0$, la ecuación *factorizable* de segundo grado:

$$(a_1x + b_1y + c_1)(a_2x + b_2y + c_2) = 0$$

representa la unión de las dos rectas. En efecto, un punto $P = (x, y)$ en una u otra de estas rectas cumple esta ecuación, porque $uv = 0$ si $u = 0$ o bien $v = 0$.

Fórmula 4.10. *En cambio, si el lado izquierdo de la ecuación de segundo grado*

$$ax^2 + 2hxy + by^2 + 2gx + 2fy + c = 0$$

no se factoriza, esta ecuación representa una curva cuya forma es determinada por su "parte cuadrática" $ax^2 + 2hxy + by^2$. Esta curva es:

- ⋆ *una **elipse**, si $h^2 - ab < 0$;*
- ⋆ *una **parábola**, si $h^2 - ab = 0$;*
- ⋆ *una **hipérbola**, si $h^2 - ab > 0$.* □

Resultado 4.1. *La curva cuadrática*

$$(1 - e^2)x^2 + y^2 - 2c(1 + e)x = 0$$

*es una **elipse** si $0 \le e < 1$, una **parábola** si $e = 1$, o una **hipérbola** si $e > 1$.*

El número e se llama la **excentricidad** de la curva. (Un *círculo* es una elipse con excentricidad cero). La geometría de la curva es determinado por un punto F, su **foco**, y por una recta ℓ, su **recta directriz** (Figura 26), dados por

$$F = (c, 0); \qquad \ell : \quad x = -\frac{c}{e}.$$

Resultado 4.2. *Si P es un punto de una curva cuadrática con excentricidad e, foco F y recta directriz ℓ, y si PZ es la perpendicular desde P a ℓ, entonces*

$$|PF| = e\,|PZ|.$$

Si ℓ es la recta $x = -c/e$ (Figura 26), la distancia de $P = (x, y)$ a esta recta es $|PZ| = \pm(x+c/e)$. Entonces la condición $|PF| = e\,|PZ|$, o lo que es lo mismo, $|PF|^2 = e^2\,|PZ|^2$, es la ecuación:

$$(x - c)^2 + y^2 = e^2\Big(x + \frac{c}{e}\Big)^2,$$

o bien

$$x^2 - 2cx + c^2 + y^2 = e^2x^2 + 2cex + c^2.$$

Al reacomodar esta ecuación, se obtiene $(1 - e^2)x^2 + y^2 - 2c(1 + e)x = 0$. □

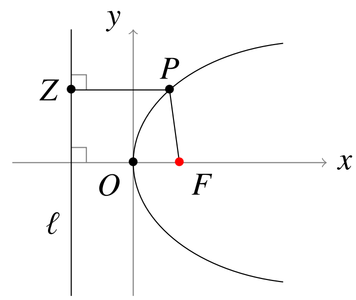

Figura 26: Foco y recta directriz de una curva cuadrática

Ejercicio 4.4. Si $0 < e < 1$ o bien $e > 1$, hay *otro foco* F' y *otra recta directriz* ℓ' (Figura 27), dados por:

$$F' = \left(c\,\frac{1+e}{1-e}, 0\right); \qquad\qquad \ell' : \quad x = \frac{c(1+e)}{e(1-e)}.$$

Si PZ' es la distancia perpendicular desde P a ℓ', comprobar que $|PF'| = e\,|PZ'|$. $\Diamond$

La parábola $y^2 = 4cx$ [en el caso $e = 1$] solamente posee un foco y una recta directriz.

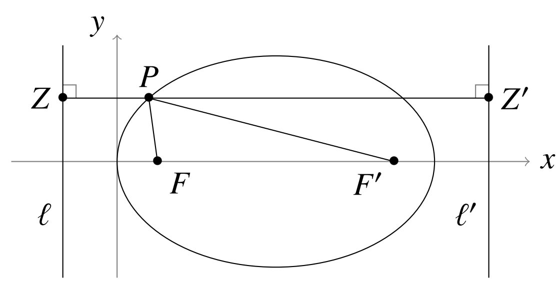

Figura 27: Distancias a los focos y entre las rectas directrices

Resultado 4.3. *Para cada punto P de una elipse, la suma $|PF| + |PF'|$ de las distancias desde P a los focos es la misma.*

La recta FF' que pasa por los focos es un eje de simetría de la elipse (Figura 27); las rectas directrices son perpendiculares a este eje y paralelas entre sí. La elipse queda en la franja entre las rectas directrices, así que $|PZ| + |PZ'| = |ZZ'|$ es la distancia perpendicular entre las rectas directrices, que no depende de P. En coordenadas, esta distancia es

$$\frac{c}{e} + \frac{c(1+e)}{e(1-e)} = \frac{2c}{e(1-e)}.$$

Entonces $|PF| + |PF'| = e\,|PZ| + e\,|PZ'| = e\,|ZZ'|$; la suma no depende de la posición de P. $\square$

4.4 Lugares geométricos

El **lugar geométrico** de una condición geométrica es la totalidad de los puntos que la cumplen: generalmente, se trata de una curva (o una recta) cuyo punto típico P satisface una ecuación apropiada. La distancia entre dos puntos P y Q es la longitud $|PQ|$ del segmento con esos extremos. En esta sección, se usará $d(P, \ell)$ para denotar la distancia perpendicular desde P a una recta ℓ (dada por la Fórmula 4.6).

► He aquí una lista de lugares geométricos conocidos:

(a) Condición $\underline{|PA| = r}$: un *círculo* con centro A y radio r.

(b) Condición $\underline{|PA| = |PB|}$: la *recta mediatriz* del segmento AB.

(c) Condición $\underline{d(P, \ell) = r}$: dos *rectas paralelas* a ℓ, una a cada lado de ℓ.

(d) Condición $\underline{d(P, \ell) = d(P, \ell')}$ si $\ell \parallel \ell'$: una *recta paralela* a ℓ y ℓ'.

(e) Condición $\underline{d(P, \ell) = d(P, \ell')}$ si ℓ y ℓ' no son paralelas:
las dos *rectas bisectrices* de los ángulos formados por ℓ y ℓ'.

(f) Condición $\underline{|PA| = d(P, \ell)}$: una *parábola* con foco A y recta directriz ℓ.

(g) Condición $\underline{|PA| + |PB| = r}$: una *elipse* con focos A y B.

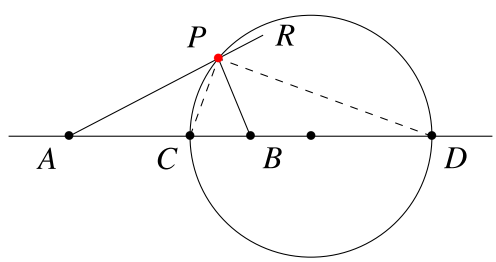

Figura 28: Un círculo de Apolonio

Resultado 4.4. ***(Círculo de Apolonio)*** *Dados dos puntos A y B y un número $r > 0$ con $r \neq 1$, el lugar geométrico del punto P tal que $\underline{|PA| : |PB| = r}$ es un círculo con centro en la recta AB.*

Hay exactamente dos puntos en la recta AB que cumplen esta condición: el punto C tal que $AC : CB = r$ y el punto D tal que $AD : DB = -r$. El punto C está dentro y D está afuera del segmento AB (Figura 28). Si P es otro punto con $|PA| : |PB| = r$, entonces $AC : CB = |PA| : |PB|$, así que C es el punto del triángulo $\triangle PAB$ en donde la bisectriz *interna* del ángulo $\angle BPA$ corta el lado AB, por el Resultado 2.20. Del mismo modo, $AD : DB = -r = -|PA| : |PB|$, así que D es el punto en donde la bisectriz *externa* de $\angle BPA$ corta la recta AB (Ejercicio 2.11). Entonces

$$\angle DPC = \angle DPB + \angle BPC = \tfrac{1}{2} \angle RPB + \tfrac{1}{2} \angle BPA = \tfrac{1}{2} \angle RPA = 90^\circ.$$

Esto significa que $\angle DPC$ es un ángulo en un semicírculo con diámetro CD. Entonces P es un punto del círculo con diámetro CD: este círculo es el lugar geométrico de P. □

Ejercicio 4.5. En un triángulo $\triangle ABC$, sea X un punto del lado AB y sea Y el punto del lado AC tal que $XY \parallel BC$. Mostrar que el lugar geométrico del punto $P = BY \cap CX$ es la mediana AK. $\lozenge$

4.5 Problemas resueltos con coordenadas

Muchos problemas geométricos pueden ser resueltos en forma directa con los resultados ya vistos. Otra alternativa es emplear coordenadas cartesianas para buscar una solución. Es importante recordar que siempre se puede colocar los ejes coordenados en una posición conveniente; de hecho, la elección del origen y de la dirección de los ejes es casi la mitad del trabajo.

A continuación se demostrarán algunos hechos ya conocidos con coordenadas.

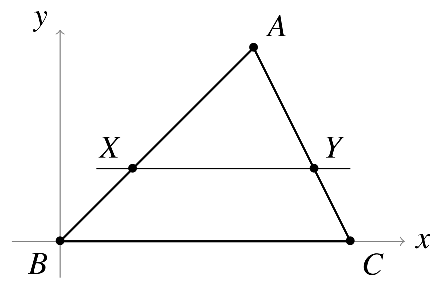

Figura 29: Proporcionalidad y paralelismo

Ejercicio 4.6. (Teorema de Thales 1) Si XY es una transversal a las rectas AB y AC (con X en AB y Y en AC) y si $AX : XB = AY : YC$, comprobar que $XY \parallel BC$.

Colóquese el eje x en la recta BC con el origen en B (Figura 29). En tal caso:

$$B = (0, 0), \qquad C = (r, 0) \text{ con } r > 0, \qquad A = (p, q) \text{ con } q \neq 0.$$

La razón $AX : XB = AY : YC$ es de la forma $t : (1 - t)$ para algún número t. La Fórmula 4.4 de división proporcional ofrece las coordenadas de X y de Y:

$$\begin{aligned} X &= ((1 - t)p + t0, (1 - t)q + t0) = (p - tp, q - tq), \\ Y &= ((1 - t)p + tr, (1 - t)q + t0) = (p - tp + tr, q - tq). \end{aligned}$$

Entonces la recta XY tiene la ecuación $\underline{y = q - tq}$, paralela al eje x ($\underline{y = 0}$). Por eso, $XY \parallel BC$. $\lozenge$

Ejercicio 4.7. Verificar que las alturas de un triángulo $\triangle ABC$ son concurrentes.

Si AD, BE, CF son las alturas, colóquese el origen en D de modo que BC sea el eje x y AD sea el eje y (Figura 30). En este caso, los vértices son

$$A = (0, a), \qquad B = (-b, 0), \qquad C = (c, 0)$$

para ciertos números a, b, c.

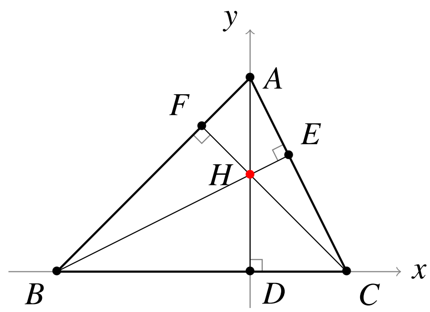

Figura 30: Alturas y ortocentro de un triángulo

Las ecuaciones de los lados son, por la Fórmula 4.3,

$$\begin{aligned} BC &: & y &= 0, \\ CA &: & a(x-c)+cy &= 0, \\ AB &: & a(x+b)-by &= 0. \end{aligned}$$

La altura AD (el eje y) es $\underline{x = 0}$. Las ecuaciones de las alturas BE y CF vienen de la Fórmula 4.2,

$$\begin{aligned} BE &: & cx - ay + d &= 0, \\ CF &: & bx + ay + e &= 0, \end{aligned}$$

para ciertas constantes d, e.

Estas constantes se despejan al sustituir las coordenadas de B y C en estas ecuaciones; se obtiene $-bc + d = 0$, $bc + e = 0$. Por tanto, las alturas son:

$$\begin{aligned} AD &: & x &= 0, \\ BE &: & cx - ay &= -bc, \\ CF &: & bx + ay &= bc. \end{aligned}$$

Estas tres ecuaciones tienen *la solución simultánea* $(x, y) = (0, bc/a)$; por tanto, son concurrentes en ese punto. El ortocentro tiene coordenadas $H = (0, bc/a)$ referente a los ejes elegidos. ◊

Ejercicio 4.8. Si O es el circuncentro y H el ortocentro de $\triangle ABC$, y si K es el punto medio del lado BC, mostrar que $|OK| = \frac{1}{2}|AH|$.

Con los mismos ejes de coordenadas BC y AD del Ejercicio 4.7 anterior, se obtiene $A = (0, a)$, $B = (-b, 0)$, $C = (c, 0)$ y los puntos medios de los lados son, por la Fórmula 4.4 (véase la Figura 31):

$$K = (\tfrac{1}{2}(c-b), 0), \qquad L = (\tfrac{1}{2}c, \tfrac{1}{2}a), \qquad M = (-\tfrac{1}{2}b, \tfrac{1}{2}a).$$

Las mediatrices OK, OL, OM son perpendiculares a los lados y pasan por K, L, M respectivamente; sus ecuaciones son, entonces,

$$\begin{aligned} OK &: & x &= \tfrac{1}{2}(c-b), \\ OL &: & cx - ay &= \tfrac{1}{2}c^2 - \tfrac{1}{2}a^2, \\ OM &: & bx + ay &= -\tfrac{1}{2}b^2 + \tfrac{1}{2}a^2. \end{aligned}$$

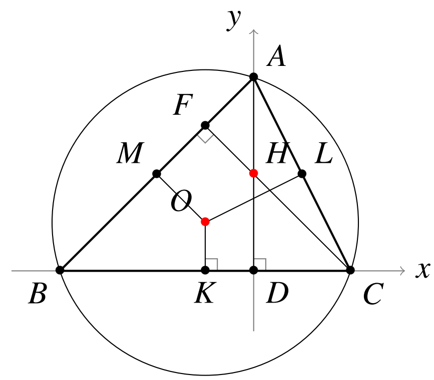

Figura 31: Posiciones relativas del ortocentro y del circuncentro

Estas tres ecuaciones tienen la solución simultánea

$$(x, y) = (\tfrac{1}{2}(c - b), \tfrac{1}{2}(a - bc/a)) = O.$$

(De paso, se ha verificado la concurrencia de las mediatrices.) Ahora, a partir de las coordenadas de O y K, además de $A = (0, a)$ y $H = (0, bc/a)$, se obtiene

$$|OK| = \frac{1}{2}\left|a - \frac{bc}{a}\right| = \tfrac{1}{2}|AH|. \qquad \lozenge$$

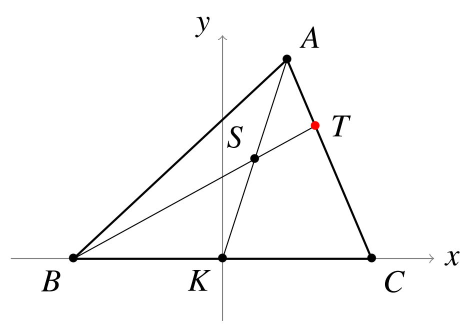

Figura 32: Una razón de división de un lado del triángulo

Ejercicio 4.9. Si S es el punto medio de la mediana AK de $\triangle ABC$ y si $T = BS \cap CA$, comprobar que $CT : TA = 2 : 1$.

Si se toma el eje x a lo largo de la recta BC, con el origen en el punto K (Figura 32), entonces

$$A = (p, q), \qquad B = (-c, 0), \qquad C = (c, 0) \qquad \text{y además} \quad K = (0, 0).$$

Por ser S el punto medio de AK, se ve que $S = (\frac{1}{2}p, \frac{1}{2}q)$. Las rectas BS y CA tienen las ecuaciones

$$\begin{aligned} BS: &\quad \tfrac{1}{2}q(x + c) - (\tfrac{1}{2}p + c)y = 0, \\ CA: &\quad q(x - c) - (p - c)y = 0. \end{aligned}$$

La solución simultánea de estas ecuaciones es $T = (\frac{2}{3}p + \frac{1}{3}c, \frac{2}{3}q)$. Por la Fórmula 4.4 con $t = \frac{2}{3}$, este es el punto que divide el segmento CA en la razón $CT : TA = \frac{2}{3} : \frac{1}{3} = 2 : 1$. $\lozenge$

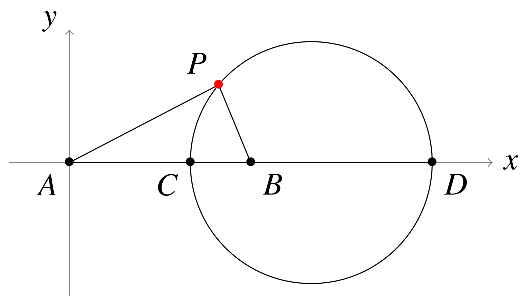

Figura 33: Un círculo de Apolonio, de nuevo

Ejercicio 4.10. (Círculo de Apolonio) Dados dos puntos A y B y un número $r > 0$ con $r \neq 1$, el lugar geométrico del punto P tal que $\underline{|PA| : |PB| = r}$ es un círculo con centro en la recta AB.

Es conveniente tomar el origen en A y usar la recta AB como el eje x. Entonces $A = (0, 0)$ y $B = (b, 0)$. Si $P = (x, y)$ cumple la condición $|PA| : |PB| = r$, entonces $|PA| = r\,|PB|$, o lo que es lo mismo, $|PA|^2 = r^2\,|PB|^2$, esto es,

$$x^2 + y^2 = r^2\big((x - b)^2 + y^2\big).$$

Después de reacomodar los términos, esta ecuación se simplifica en

$$(1 - r^2)x^2 + (1 - r^2)y^2 + 2r^2bx - r^2b^2 = 0.$$

Como $r \neq 1$, es permisible dividir por $(1 - r^2)$:

$$x^2 + y^2 + 2\left(\frac{r^2b}{1 - r^2}\right)x - \frac{r^2b^2}{1 - r^2} = 0.$$

Esta es la *ecuación de un círculo* con centro en el punto $\left(\dfrac{r^2b}{r^2 - 1}, 0\right)$ del eje x. En particular, este centro queda en la recta AB.

Obsérvese que esta segunda demostración del Resultado 4.4 no requiere conocimientos previos sobre proporcionalidades en lados de triángulos (Resultado 2.20 y Ejercicio 2.11). $\Diamond$