OLCOMA.
MEP-UNA-UCR-ITCR-UNED.
Entrenamiento Nivel Elemental.
7 de marzo de 2020.

Teoría de Números

Elaborado por: Jeremías Ramírez Jiménez

1. Divisibilidad

En esta sección se presentan los conceptos básicos de la Teoría de Números, es decir, los aspectos relacionados con la divisibilidad en el conjunto de los números enteros.

Definición 1.1. Sean $a, b \in \mathbb{Z}$. Se dice que a **divide a** b si existe $k \in \mathbb{Z}$ tal que $b = ak$. En este caso se escribe $a \mid b$. En caso contrario se escribe $a \nmid b$, y se dice que a **no divide a** b.

Por ejemplo, $2 \mid 10$, $-5 \mid 15$, $3 \nmid 7$. Además, para todo $a \in \mathbb{Z}$ se tiene que $a \mid 0$, puesto que $a \cdot 0 = 0$. Si $a \mid b$ también se dice que b es **múltiplo** de a. Por ejemplo, 10 es múltiplo de 2, 15 es múltiplo de -5 y 7 no es múltiplo de 3. Un número se llama **par** si es múltiplo de 2, e **impar**, si no es múltiplo de 2. En particular, un número par es de la forma $2k$, para algún $k \in \mathbb{Z}$, mientras que un número impar es de la forma $2k + 1$, para algún $k \in \mathbb{Z}$.

Teorema 1.1. Sean $a, b, c \in \mathbb{Z}$, entonces se cumple que:

1. $a \mid a$, $1 \mid a$ y $a \mid 0$.
2. Si $a \mid b$ y $b \mid c$ entonces $a \mid c$.
3. Si $a \mid b$ y $a \mid c$ entonces $a \mid (bx + cy)$, para $x, y \in \mathbb{Z}$.
4. Si $a \mid b$ y $a \mid b \pm c$ entonces $a \mid c$.
5. Si $a \mid b$ y $b \mid a$ entonces $|a| = |b|$.
6. Si $a \mid b$ y $b \neq 0$ entonces $\dfrac{b}{a} \mid b$.
7. Si $c \neq 0$ entonces, $a \mid b \Leftrightarrow ac \mid bc$.

Demostración. 1. Observe que $a \mid a$ si y solo si existe $k \in \mathbb{Z}$ tal que $a = ka$. Luego, basta tomar $k = 1$, puesto que $a = 1 \cdot a$. Para la segunda, se tiene que $1 \mid a$ si y solo si existe $k \in \mathbb{Z}$ tal que $a = k \cdot 1$, luego, escogiendo $k = a$ se obtiene que $a = a \cdot 1$. Finalmente, para la tercera se tiene que $a \mid 0$ si y solo si existe $k \in \mathbb{Z}$ tal que $0 = k \cdot a$, luego, necesariamente $k = 0$.

2. Suponga que $a \mid b$ y $b \mid c$. Esto significa que existen enteros k_1 , k_2 tales que $b = k_1 a$ y $c = k_2 b$. Luego, $c = k_2 k_1 a$, y como $k_1, k_2 \in \mathbb{Z}$, entonces $k_1 k_2 \in \mathbb{Z}$, es decir $a \mid c$.

3. Suponga que $a \mid b$ y $a \mid c$. Entonces, existen enteros k_1, k_2, tales que $b = k_1 a$ y $c = k_2 a$. Luego, para cualesquiera $x, y \in \mathbb{Z}$ se cumple que

$$\begin{aligned} bx + cy &= k_1 ax + k_2 ay \\ &= a(k_1 x + k_2 y) \\ &= ak \end{aligned}$$

donde $k = k_1 x + k_2 y \in \mathbb{Z}$, por lo tanto, $a \mid bx + cy$.

4. Suponga que $a \mid b$ y $a \mid b + c$, el otro caso es análogo. Entonces $a \mid (b + c) - c = b$.

5. Suponga que $a \mid b$ y que $b \mid a$. Luego, existen $m, n \in \mathbb{Z}$ tales que $a = bn$ y $b = am$. Sustituyendo el valor de a de la primera en la segunda condición se obtiene que $b = bnm$, lo que implica que $b(1 - mn) = 0$, si $b = 0$ claramente $a = 0$, y el resultado es verdadero. Sino, entonces $1 = mn$, y como $m, n \in \mathbb{Z}$, entonces necesariamente $m = n = 1$ o $m = n = -1$. En el primer caso se obtiene que $a = b$, y en el segundo $a = -b$, en ambos casos se cumple el resultado.

La demostración de las otras dos propiedades queda como ejercicio. $\square$

Ejercicio 1.1. Demuestre las propiedades 6. y 7. del Teorema 1.1.

Ejemplo 1.1 (Olcoma 2010)**.** Determine todos los números pares de dos cifras no nulas tales que la suma de las cifras divida al producto de las cifras.

Solución: Sea $N = \overline{ab}$ el número cuyos dígitos no nulos son a y b. Entonces, $(a + b)|ab$ y así $\dfrac{ab}{a + b}$ es un número entero y como el número es par, b puede ser igual a $2, 4, 6$ y 8. Si en cada caso para b se varía a la cifra a entre 1 y 9 se encuentran que los números que cumplen son 22 , 44, 36, 66 y 88. $\square$

Ejemplo 1.2. Sea $n \in \mathbb{Z}$. Muestre que $n(n + 1)$ siempre es un número par.

Solución: Sea $n \in \mathbb{Z}$. Si n es par, entonces existe $k \in \mathbb{Z}$ tal que $n = 2k$. Luego, $n(n + 1) = 2k(2k + 1)$ que es un número par. Si n no es par, entonces necesariamente es impar, pero en este caso $n + 1$ debe ser par. $\square$

Ejemplo 1.3 (Olcoma 2013)**.** Determine todas las soluciones (a, b) para la ecuación $ab - 24 = 2a$ donde a y b son enteros positivos.

Solución: Reordenando la ecuación dada se tiene que $ab - 2a = 24$, que es equivalente a $a(b - 2) = 24$. Ahora, para soluciones enteras positivas, necesariamente a y $b - 2$ deben ser factores de 24. Así, las soluciones son $(1, 26)$, $(2, 14)$, $(3, 10)$, $(4, 8)$, $(6, 6)$, $(8, 5)$, $(12, 4)$ y $(24, 3)$. $\square$

1.1. Reglas de divisibilidad

Existen algunas reglas que permiten saber de una manera un poco más sencilla si un número dado es divisible por un número dado. Se presenta a continuación las reglas más usuales. Existen también reglas de divisibilidad en otros casos. Estas se pueden buscar en los libros que aparecen en la bibliografía.

Teorema 1.2 (Reglas de divisibilidad)**.** Sea $N \in \mathbb{N}$. Entonces se cumple lo siguiente:

1. $2 \mid N$ si y solo si el dígito de las unidades de N es par.
2. $3 \mid N$ si y solo si 3 divide la suma de los dígitos de N.
3. $5 \mid N$ si y solo si el dígito de las unidades de N es 0 o 5.
4. $11 \mid N$ si y solo si 11 divide a la suma de los dígitos de N en posición impar menos la suma de los dígitos de N en posición par.

Ejemplo 1.4. Determine todos los números de la forma $\overline{2a9b3}$ que son divisibles por 11.

Solución: Para que $N = \overline{2a9b3}$ sea divisible por 11 se debe cumplir que la suma de los dígitos de N en posición impar menos la suma de los dígitos de N en posición par sea divisible por 11. En el número N la suma de las cifras que ocupan lugares impares es $3 + 9 + 2 = 14$, y la suma de las que ocupan lugares pares es $b + a$. La diferencia es $14 - (a + b)$, la cual es múltiplo de 11 si y solo si $a + b = 14$ o $a + b = 3$, puesto que a y b son dígitos. Si $a + b = 14$ se obtiene

$$\begin{array}{c|ccccc} a & 9 & 8 & 7 & 6 & 5 \\ b & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \end{array}$$

Mientras que para el caso $a + b = 3$ se obtiene

$$\begin{array}{c|cccc} a & 0 & 1 & 2 & 3 \\ b & 3 & 2 & 1 & 0 \end{array}$$

En total hay nueve posibles números de la forma $\overline{2a9b3}$ que son divisibles por 11. Estos son: 29953, 28963, 27973, 26983, 25993, 20933, 21923, 22913 y 23903. □

1.2. Ejercicios

Ejercicio 1.2. Determine la cantidad de números de la forma $\overline{5a6b}$, que son divisibles por 6.

Ejercicio 1.3. Había un pastor que solo sabía contar hasta diez, y que tenía a su cargo un rebaño numeroso. Para saber si le faltaba alguna oveja inventó un sistema que ponía en práctica todas las tardes. Agrupaba a las ovejas de dos en dos, de tres en tres, de cuatro en cuatro, de cinco en cinco y de seis en seis; en todos los casos le sobraba una oveja. Luego las agrupaba de siete en siete y no le sobraba ninguna. Determine el menor número de ovejas que puede tener el pastor.

Ejercicio 1.4 (Olcoma 2012)**.** Determine los enteros positivos n tales que $n+4$ divide $n+95$.

Ejercicio 1.5. Sea m un entero positivo tal que $N = m+2m+3m+4m+5m+6m+7m+8m+9m$. Determine el menor entero N con todas sus cifras iguales que satisfaga dicha igualdad.

Ejercicio 1.6 (OMCC 2010)**.** Sea $S(n)$ la suma de los dígitos de n. Determine todos los enteros positivos tales que $n(S(n)-1) = 2010$.

Ejercicio 1.7. Hallar todos los enteros positivos m, n tales que $1 + 3 \cdot 2^m = n^2$.

Ejercicio 1.8 (Olcoma 2010)**.** Determine todos los enteros positivos n tales que $\dfrac{2n^2 + 4n + 18}{3n + 3}$ es entero.

Ejercicio 1.9. Determine si existen números enteros a, b, c, tales que $a+b+c = 2013$ y $a^2+b^3 = c^4$.

Ejercicio 1.10. [OMCC 2016] Determine todos los números n de 4 dígitos, todos ellos cuadrados perfectos, y tales que n es divisible por 2, 3, 5 y 7.

Ejercicio 1.11. Encuentre todos los números enteros positivos de 4 dígitos tales que, al eliminar cualquiera de sus dígitos, el número de 3 dígitos que se obtiene divide al número original.

Ejercicio 1.12 (OMCC 2007)**.** La Olimpiada de Matemática de Centroamérica y el Caribe es una competencia anual. La olimpiada número 9 fue en 2007. Determine todos los números enteros positivos n tales que la olimpiada n divide el año en que se efectúa la olimpiada.

1.3. Solución de los Ejercicios

Solución del Ejercicio 1.2

El número entero positivo $\overline{5a6b}$ es divisible por seis si es divisible por dos y por tres a la vez. Si $\overline{5a6b}$ es divisible por 2, entonces $b = 0, 2, 4, 6, 8$. Por otro lado, si $\overline{5a6b}$ es 3, entonces $3 \mid (5 + a + 6 + b)$, es decir, $3 \mid (11 + a + b)$. Se presentan entonces las siguientes posibilidades:

- Si $b = 0$ entonces $a = 1, 4, 7$.
- Si $b = 2$ entonces $a = 2, 5, 8$.
- Si $b = 4$ entonces $a = 0, 3, 6, 9$.
- Si $b = 6$ entonces $a = 1, 4, 7$.
- Si $b = 8$ entonces $a = 2, 5, 8$.

Así, en total hay 16 números diferentes.

Solución del Ejercicio 1.3

Sea N el número de ovejas. Luego, $N-1$ debe ser divisible por 2, 3, 4, 5, 6, mientras que N es múltiplo de 7. Los números divisibles entre 2, 3, 4, 5, 6 son los múltiplos de 60, y al sumarle 1, el resultado debe ser divisible por 7. Se comprueba luego directamente que $N = 301$ es el menor entero positivo que cumple la condición.

Solución del Ejercicio 1.4

Observe que $n+4 \mid (n+95)-(n+4) = 91$. Luego, se debe cumplir que $n+4 \mid 91$. Los divisores de 91 son 1, 7, 13, 91. Luego, los valores posibles para n son 3, 9 y 87.

Solución del Ejercicio 1.5

Sea $N = m + 2m + 3m + 4m + 5m + 6m + 7m + 8m + 9m$. Si $N = \overline{nnn\cdots n}$, siendo n un dígito, entonces se tiene que

$$N = m + 2m + 3m + 4m + 5m + 6m + 7m + 8m + 9m = 45m,$$

luego, se debe cumplir que $45m = \overline{nnn\cdots n}$. Esto implica que $5 \mid N$ y $9 \mid N$. Para que $\overline{nnn\cdots n}$ sea múltiplo de 5, necesariamente n debe ser 0 o 5, pero no puede ser 0, luego, $n = 5$. Finalmente, para que N sea el menor entero entonces $\overline{555\cdots 5}$ debe ser el menor número divisible por 9, que es cuando tiene 9 dígitos. Por lo tanto $N = 555555555$.

Solución del Ejercicio 1.6

La ecuación $n(S(n)-1) = 2010$ implica que $n \mid 2010$. Como $2010 = 2\cdot 3\cdot 5\cdot 67$, entonces $n \in \{1, 2, 3, 5, 6, 10, 15, 30, 67, 134, 201, 335, 402, 670, 1005, 2010\}$. Al evaluar todas las posibles opciones se deduce que la única opción es $n = 402$. En este caso, $402\cdot(S(402)-1) = 402\cdot 5 = 2010$.

Solución del Ejercicio 1.7

Observe que

$$\begin{aligned} 1 + 3\cdot 2^m = n^2 \quad &\Leftrightarrow \quad 3\cdot 2^m = n^2 - 1 \\ &\Leftrightarrow \quad 3\cdot 2^m = (n-1)(n+1) \end{aligned}$$

Luego, se ve que $n-1$ y $n+1$ deben ser ambos números pares. Suponga que $n-1 = 2a$ y $n+1 = 2a+2$, para $a \in \mathbb{Z}^+$. Sustituyendo en la ecuación anterior se obtiene que

$$a(a+1) = 3\cdot 2^{m-2},$$

de donde se ve que uno de los factores es 1 o 3. Resolviendo cada caso se tiene que $a = 1$, $a+1 = 2$, en este caso no hay solución. Si $a = 3$, $a+1 = 4$ se obtiene la solución $n = 7, m = 1$, y en el último caso $a = 2$, $n = 5, m = 3$.

Solución del Ejercicio 1.8

Observe que

$$\begin{aligned}
\frac{2n^2+4n+18}{3n+3} &= \frac{2n^2+4n+2-2+18}{3n+3} \\
&= \frac{2(n+1)^2+16}{3(n+1)} \\
&= \frac{2(n+1)}{3}+\frac{16}{3(n+1)}
\end{aligned}$$

De la última expresión se deduce que, es necesario (pero no suficiente) que $(n+1) \mid 16$. Como los divisores de 16 son 1, 2, 4, 8 y 16, se sigue que los posibles valores para n son 1, 3, 5, 7, y 15. Comprobando cada uno de estos se verifica que todos son solución.

Solución del Ejercicio 1.9

Observe que si x y n son enteros, con $n \geq 1$, entonces x y x^n tienen la misma paridad. Suponga que existen tres enteros a, b y c que cumplen las condiciones. Como $a+b+c=2013$ es impar, entonces a, b, c son todos impares, o solo uno es impar. Si todos son pares, o dos son impares y uno par, entonces la suma es par. Note ahora que si a y b son ambos pares, entonces a^2 y b^3 son también pares, y por lo tanto, c^4 debe ser par. Esto implica que c es par. Pero esto no es posible.

Si a y b son ambos impares, entonces $a^2+b^3=c^4$ es par. En este caso dos números son impares y uno par. Pero esto tampoco es posible.

Finalmente, considere el caso en que de a y b uno es par y el otro impar. Luego, entre a^2 y b^3 hay un par y otro impar, y por lo tanto c^4 debe ser impar, lo que significa que, entre a, b y c hay solo un par, y este caso tampoco es posible. Por lo tanto, no existen tres enteros que cumplan las condiciones citadas.

Solución del Ejercicio 1.10

Los dígitos deben ser $1, 4, 9, 0$. Como n es divisible por 10, entonces el último dígito es 0, los números posibles son $1110, 1140, 1410, 4410, 4140, 9000, 9090, 9900, 9990$, y la respuesta es 4410.

Solución del Ejercicio 1.11

Como el número $\overline{abcd}$ es divisible por $\overline{abc}$ entonces se debe tener $d=0$. Dado que $\overline{abcd}=\overline{abc0}$ es divisible por $\overline{abd}=\overline{ab0}$ entonces $c=0$. Como $\overline{abcd}=\overline{ab00}$ es divisible por $\overline{acd}=\overline{a00}$ y por $\overline{bcd}=\overline{b00}$, el número $\overline{ab}$ es divisible por a y b, así, $b=ax$ y $10a=by$ para algunos enteros x y y. Por tanto, $10a=axy$, de donde $xy=10$. Si $x=1$, $y=10$ entonces $a=b$ lo cual da 9 posibles números, estos son 1100, 2200, 3300, 4400, 5500, 6600, 7700, 8800, 9900.

Si $x=2$, $y=5$ entonces $2a=b$ y se obtienen los 4 números ´1200, 2400, 3600, 4800.

Si $x=5$, $y=2$ entonces $5a=b$ y se obtiene un único número que es 1500.

Finalmente, el caso $x=10$, $y=1$ no se considera ya que a y b representan un solo dígito.

Solución del Ejercicio 1.12

Si la olimpiada número 9 fue en 2007, entonces la primera olimpiada fue en 1999. En general, la olimpiada número n será en $1998+n$. Luego, se necesita que $n \mid 1998+n$, esto implica que $n \mid 1998$. Luego, n debe ser un divisor de 1998.

2. Algoritmo de la división

En el caso de que a no sea múltiplo de b se puede obtener otra expresión mediante la llamada división con residuo, tal y como se presenta en el Teorema 2.1, el algoritmo de la división tiene múltiples aplicaciones tanto dentro de la Teoría de Números como en otras áreas. Un ejemplo sencillo consiste en conocer si es posible dividir una cierta cantidad de objetos a entre b personas.

Teorema 2.1 (Algoritmo de la División)**.** Sean $a, b \in \mathbb{Z}$, con $b \neq 0$. Entonces existen $q, r \in \mathbb{Z}$ únicos, con $0 \leq r < |b|$, tales que

$$a = bq + r.$$

Demostración. Suponga primero que b es un entero positivo. Considere el conjunto de todos los múltiplos de b, esto es

$$\ldots, -kb, \ldots, -5b, -4, -3b, -2b, -b, 0, b, 2b, 3b, 4b, 5b, \ldots, kb, \ldots$$

donde k es un entero positivo. Por el principio del buen orden, existe un único $q \in \mathbb{Z}$ tal que $qb \leq a < (q+1)b$. Defina $r := a - bq$, esto determina de forma única los números q y r. Adicionalmente, se tiene que $0 \leq r < b$, y como q es único, entonces r también.

En el caso de que b sea negativo, se aplica el mismo argumento con $-b$. En este caso existen q', r' únicos, tales que

$$a = b'q + r',$$

donde $0 \leq r' < b' = |b|$, en cuyo caso, basta escoger $q = -q'$. □

Entonces, el algoritmo descrito en el Teorema 2.1 permite obtener los correspondientes valores de q y r, dados a y b. Por ejemplo, si $a = 41$ y $b = 5$ entonces $q = 8$ y $r = 1$ porque $41 = 5 \cdot 8 + 1$. Por otro lado, si $b = -5$ entonces $q = -8$ y $r = 1$, porque $41 = (-5)(-8) + 1$, mientras que si $a = -41$ y $b = 5$ entonces $q = -9$ y $r = 4$, y finalmente, si $a = -41$ y $b = -5$, entonces $q = -9$ y $r = 4$.

Ejemplo 2.1. Calcule el residuo de la división de 13545 entre 425. Usando la estrategia del Teorema 2.1.

Solución: De acuerdo con el procedimiento anterior, se calcula los múltiplos de 425, hasta que el resultado exceda 13545, y se escoge el múltiplo anterior. Haciendo los cálculos se obtiene que donde $425 \times 32 = 13600$. Luego, $425 \times 31 = 13175$ y $r = 13545 - 13175 = 370$, es decir

$$13545 = 425 \times 31 + 370.$$

□

Ejemplo 2.2. Determine el residuo al dividir 785662331646452 por 5.

Solución: En este caso, al aplicar la estrategia del ejemplo anterior, el proceso sería un poco lento, pues el dividendo es muy grande. Sin embargo, es fácil ver que los múltiplos de 5 terminan en 0 y en 5. Por otro lado, $785662331646452 = 785662331646450 + 2$. Como $5 \mid 785662331646452$ entonces el residuo es 2. $\square$

Ejercicio 2.1. Determine el residuo al dividir $N = 3^{100} + 4^{100} + 5^{100} + 6^{100}$ entre 2.

Desde luego, existe un procedimiento algorítmico que permite calcular el cociente un dígito a la vez, este es el procedimiento usual para hacer la divisi'on, en el cual se trabaja con agrupación de los dígitos, como se presenta en el Ejemplo 2.3.

Ejemplo 2.3. Determine el cociente y el residuo que se obtienen al dividir 3042016 por 7.

Solución: Para hallar el cociente q y el residuo r, se realiza la división usual $3042016 \div 7$. Esto es:

$$
\begin{array}{r|l}
3\;0'\,4'\,2'\,0'\,1'\,6' & \quad 7 \\ \cline{2-2}
-2\;8 & 434573 \\
2\;4 & \\
-2\;1 & \\
3\;2 & \\
-2\;8 & \\
4\;0 & \\
-3\;5 & \\
5\;1 & \\
-4\;9 & \\
2\;6 & \\
-2\;1 & \\
\mathbf{5} &
\end{array}
$$

De lo anterior, se concluye que $q = 434573$, mientras que $r = 5$. $\square$

Ejercicio 2.2. Calcule el residuo de la división de 857659 entre 315. Primero usando la estrategia del Teorema 2.1, y luego de la manera tradicional.

Ejemplo 2.4. Sea $A = \{x_1, x_2, \ldots, x_{n+1}\}$, donde x_i es un número entero, para todo $i = 1, 2, \ldots, n$. Muestre que existen dos elementos, tales que la resta es divisible por n.

Solución: Observe que existen n posibles residuos al dividir cada número entero entre n,

$$x_i = q_i \times n + r_i, \qquad i = 1, 2, \ldots, n,$$

estos son $0, 1, 2, \ldots, n-1$. Como A tiene $n+1$ elementos, por el *Principio del Palomar* existen dos elementos que tienen el mismo residuo. Sean x_i, x_j tales elementos. Es decir, $x_i = kn + r$ y $x_j = ln + r$, entonces $x_i - x_j = kn + r - (ln + r) = (k - l)n$. $\square$

Observe que los elementos del conjunto no son necesariamente números enteros consecutivos, sino que pueden escogerse de cualquier forma.

2.1. Ejercicios

Ejercicio 2.3. Determine la cantidad de números impares menores que 500, tales que al ser divididos por 3, 4 y 5 el residuo es 1.

Ejercicio 2.4. Determine la cantidad de números enteros positivis menores que 1000, que son divisibles por 3 o por 7.

Ejercicio 2.5. Los números enteros mayores que 1 se colocan en 5 columnas, tal como se muestra a continuación:

$$\begin{array}{ccccc} & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 9 & 8 & 7 & 6 & \\ & 10 & 11 & 12 & 13 \\ 17 & 16 & 15 & 14 & \\ & 18 & 19 & 20 & 21 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{array}$$

Determine el número de fila y de columna en que esta ubicado el número 2400.

Ejercicio 2.6. Considere la sucesión definida por $a_1 = 1$, $a_2 = 1$ y si $n \geq 3$, entonces $a_n = (n-1)(a_{n-1} + a_{n-2})$. Determine el residuo de la división de a_{2019} entre 2019.

2.2. Solución de los Ejercicios

Solución del Ejercicio 2.1

Observe que 3^{100} y 5^{100} son impares, de modo que su suma es par, por otro lado, 4^{100} y 6^{100} son pares, de modo que su suma es par. Por lo tanto $3^{100} + 4^{100} + 5^{100} + 6^{100}$ es par, y el residuo es 0.

Solución del Ejercicio 2.2

Se tiene que $q = 2722$ y $r = 229$.

Solución del Ejercicio 2.3

Si al dividir un número impar por 3, 4 y 5 el residuo es 1, entonces su antecesor debe ser múltiplo de 3, 4 y 5. Dado que 3, 4 y 5 no tienen divisores en común, entonces cualquier múltiplo común a ellos debe ser un múltiplo de $3 \cdot 4 \cdot 5 = 60$. Se determina entonces los múltiplos pares de 60 menores a 500. Estos son: 0, 60, 120, 180, 240, 300, 360, 420, 480. Los sucesores de estos números son: 1, 61, 121, 181, 241, 301, 361, 421 y 481.

Solución del Ejercicio 2.4

Se puede calcular la cantidad de múltiplos de 3 o 7 menores que 1000, esto porque los múltiplos de 3 o 7 son divisibles precisamente por 3 o 7. La cantidad de números menores que 1000 que son múltiplos de 3 es el cociente de la división $1000 \div 3$, es decir 333. De igual forma, la cantidad de números menores que 1000 que son múltiplos de 7 es el cociente de $1000 \div 7$, el cual 142. Por otra parte, se debe calcular los múltiplos de 3 y 7 a la vez, es decir, los múltiplos de 21, pues si se suma los múltiplos de 3 y 7 se consideran dos veces los que son múltiplos de ambos a la vez. Los múltiplos de 21 son el cociente de $1000 \div 21$ que es 47. Así, en total hay $333 + 142 - 47 = 428$ números menores que 1000 que son divisibles por 3 o 7.

Solución del Ejercicio 2.5

Para determinar el número de fila (de arriba hacia abajo), se tiene que en cada una de las filas se encuentran cuatro números (iniciando en 2). Así, para conocer en que fila esta un número dado n, se calcula el cociente y el residuo de la división $(n-2)\div 4$. En este caso, $(2400-2)\div 4 = 2398\div 4 = 599\cdot 4+2$. Es decir, 2400 esta en la fila $599 + 1 = 600$. Para determinar el número de columna (de izquierda a derecha) en la que se encuentra el número 2400, debe notarse que todos los múltiplos de 8 están ubicados en la segunda columna. Como $8 \mid 2400$ entonces 2400 está en la segunda columna. Por lo tanto, 2400 está en la fila 600 y columna 2.

Solución del Ejercicio 2.6

La idea consiste en aplicar la sustitución hacia atrás de cada término de la sucesión hasta llegar al primero. Como $a_n = (n-1)(a_{n-1} - a_{n-2})$, entonces

$$a_n - na_{n-1} = -a_n + (n-1)a_{n-2} = -(a_{n-1} - (n-1)a_{n-2}).$$

Repitiendo este proceso se obtiene que

$$\begin{aligned} a_n - na_{n-1} &= -(a_{n-1} - (n-1)a_{n-2}) \\ &= (a_{n-2} - (n-2)a_{n-3}) \\ &\vdots \\ &= (-1)^{n-3}(a_3 - 1\cdot a_2) \\ &= (-1)^{n-2}(a_2 - 0\cdot a_1) \\ &= (-1)^{n-2} \end{aligned}$$

De lo anterior se deduce que $a_{2019} = 2019 \cdot a_{2019} + (-1)^{2017} = 2019 \cdot a_{2019} - 1$. Claramente al dividir a_{2019} entre 2019 el residuo es $2019 - 1 = 2018$.

Referencias

[An] T. Andreescu, D. Andrica, and Z. Feng. *104 Number Theory Problems: from the training of the USAMO team*. Birkhäuser, (2007).

[Ba] M. Baldoni, C. Ciliberto, and G. P. Cattaneo. *Elementary Number Theory, Criptography and Codes*. Springer, (2009).

[Bu] D. Burton. *Elementary Number Theory*. Mc Graw Hill, 7th edition, (2011).

[Du] U. Dudley. *Elementary Number Theory*. Dover, second edition, (2008).

[Ir] K. Ireland and M. Rosen. *A Classical Introduction to Modern Number Theory*. Springer, (1990).

[Ko] N. Koblitz. *A Course in Number Theory and Criptography*. Springer, second edition, (1994).

[Sh] V. Shoup. *A Computational Introduction to Number Theory and Algebra*. Cambridge University Press, (2005).

[St] J. Stillwell. *Elements of Number Theory*. Springer, (2003).

[We] A. Weil. *Number Theory for beginners*. Springer, (1979).