El principio de inducción

Daniel Campos Salas

(Material en construcción)

Contents

1 Introducción

La **inducción** (o **inducción empírica**) es el proceso de descubrimiento de leyes generales mediante la observación y combinación de situaciones particulares, [2]. El grado de validez con el que la ley se establece depende del número de observaciones y confirmaciones. Este tipo de razonamiento inductivo a menudo es convincente; la predicción de que el sol va a salir mañana por el este es tan cierto como cualquier otra afirmación, pero el carácter de este enunciado no es el mismo de un teorema que se demuestra por un razonamiento matemático o estrictamente lógico, [3].

En una manera diferente, la **inducción matemática** se usa para establecer la veracidad de un teorema matemático para una cantidad infinita de casos. La confirmación de una ley general para una cantidad finita de casos, no importa qué tan grande sea la cantidad, no provee una prueba para la ley en el sentido matemático riguroso de la palabra, incluso si no se conoce ninguna excepción en el momento. Tal ley solo permanecería como una hipótesis razonable, sujeto a modificaciones de los resultados de futuras experiencias, [3]. Varios casos conocidos son los siguientes.

1.1 Conjeturas con contraejemplos grandes

1.1.1 Conjetura de Euler de la suma de potencias

En un intento por generalizar lo que hoy conocemos como el último teorema de Fermat, en 1769 Leonhard Euler conjeturó que si la ecuación

$$a_1^k + a_2^k + \ldots + a_n^k = b^k,$$

tiene soluciones en enteros positivos, con $k, n \geq 1$, entonces $n \geq k$. Un caso particular de esta conjetura es que la ecuación $a^4 + b^4 + c^4 = d^4$ no tendría soluciones en enteros positivos. En 1986, Noam Elkies encontró un método para generar infinitas soluciones a esta ecuación. La solución más pequeña que encontró fue $a = 2682440$, $b = 15365639$, $c = 18796760$, $d = 20615673$. Siguiendo el método de Elkies y usando computadoras, en 1988, Roger Frye determinó que $a = 95800$, $b = 217519$, $c = 414560$, $d = 422481$ es el contraejemplo más pequeño, además de ser el único cuyas variables son todas menores a 1000000, [7].

1.1.2 Ecuaciones de Pell

Es fácil ver que la expresión $n^2 + 1$ no es un cuadrado perfecto para ningún entero positivo n. Se pueden considerar variaciones de esta expresión, del tipo $dn^2 + 1$, donde d es un entero positivo libre de cuadrados, y preguntar por la posibilidad de que este número sea un cuadrado perfecto. Para algunos casos pequeños, $d = 2, 3, 5, 6, \ldots$, se pueden encontrar fácilmente algunas soluciones. Para $d = 61$ la búsqueda puede resultar abrumadora y nos puede llevar a conjeturar que la expresión $61n^2 + 1$ nunca es un cuadrado perfecto. Sin embargo, sí existe una solución, pero el primer valor de n que hace que la expresión sea un cuadrado perfecto es $n = 226153980$. Otros ejemplos cuya solución mínima es grande son $109n^2 + 1$ ($n = 15140424455100$) y $991n^2 + 1$ ($n = 12055735790331359447442538767$). Quizá sorprendentemente, la teoría de las ecuaciones de Pell establece que para todo entero positivo d, libre de cuadrados, existen infinitos enteros positivos n para los que $dn^2 + 1$ es un cuadrado perfecto, [4].

1.1.3 Polinomios generadores de primos

En 1752, Christian Goldbach demostró que no es posible que un polinomio con coeficientes enteros al evaluarse en valores enteros dé por resultado únicamente valores primos. Sin embargo, hay expresiones sencillas que dan valores primos para una cantidad grande de entradas. Por ejemplo, en 1772, Leonhard Euler encontró que la expresión $n^2 - n + 41$ es un primo para todos los enteros no negativos menores que 41, [13].

1.1.4 Números de Fermat

En 1650, Pierre de Fermat conjeturó que los números de la forma $2^{2^n} + 1$ son primos. En 1732, Leonhard Euler refutó esta hipótesis notando que $2^{2^5} + 1 = 4294967297 = 641 \cdot 6700417$, [9].

1.2 Conjeturas con mucha evidencia y sin un contraejemplo conocido

1.2.1 Conjetura de Goldbach

Christian Goldbach conjeturó en 1742 que cualquier entero par mayor que 2 se puede escribir como suma de dos números primos. Hasta el 2013, este problema se había verificado para $n \leq 4 \times 10^{18}$. Un problema relacionado es la “conjetura débil”, que establece que todo número impar mayor que 5 es sumas de tres números primos. La conjetura débil fue demostrada en 2013 por el matemático peruano Harald Helfgott, [10].

1.2.2 Conjetura de Collatz

En 1937, Lothar Collatz conjeturó que al realizar el siguiente proceso una cantidad finita (quizás muy grande) de veces siempre se va a obtener el número 1: para todo entero positivo n, se toma su mitad

$n/2$ si n es par o $3n+1$ si n es impar, y se repite este proceso. Hasta el 2017, esto había sido verificado para $n \leq 87 \times 2^{60}$, [11].

2 Principio de Inducción Matemática

Empezamos con un ejemplo sencillo: consideramos los números impares positivos

$$1,\ 3,\ 5,\ 7,\ 9,\ \ldots,$$

y podemos preguntar cuál es una fórmula que los describe; es decir, si denotamos al n-ésimo impar por i_n, entonces queremos expresar i_n como una fórmula de n. Por ejemplo, tal vez la fórmula para todo n sea $i_n = n^2 - n + 1$. Esto lo podemos recolectar como una sucesión infinita de proposiciones $\{P_1, P_2, \ldots\}$:

$$\begin{array}{cc} P_1: & 1 = 1^2 - 1 + 1, \\ P_2: & 3 = 2^2 - 2 + 1, \\ P_3: & 5 = 3^2 - 3 + 1, \\ \vdots & \vdots \\ P_n: & i_n = n^2 - n + 1, \\ \vdots & \vdots \end{array}$$

El objetivo de la inducción es hacer válida una sucesión infinita de proposiciones como la anterior. El mecanismo para hacerlo consiste en los siguientes dos pasos:

1. Demostrar que la primera proposición P_1 es cierta; a esto se le conoce como el **paso básico**.
2. Probar que la proposición P_k implica P_{k+1} para todo entero positivo k. Llamamos **hipótesis inductiva** el asumir que la proposición P_k es cierta, y **tesis inductiva** a la proposición P_{k+1} que hay que demostrar.

El principio de la inducción matemática se deriva del hecho que para todo entero positivo k existe un siguiente elemento $k+1$, y por lo tanto cualquier entero n (y por tanto la proposición P_n) puede ser alcanzado después de un número finito de pasos, empezando desde el paso básico, [3].

Este principio se puede visualizar mediante el ejemplo de las fichas de dominó. Suponga que se tiene una infinidad de fichas de dominó (colocadas verticalmente) de manera que si una ficha cae, esta hará caer a la siguiente. De esta manera, al derribar la primera ficha todas las demás caerán.

También se puede pensar en que lo que se intenta mediante la inducción es llegar a cualquier entero positivo n a partir de una sucesión de pasos; es decir, poder "barrer" o recorrer todos los números naturales de esta manera. Esta idea, aunque es bastante intuitiva, ayuda a visualizar el principio, el cual no se reduce al mecanismo descrito anteriormente.

2.1 Fórmula para los impares

Volvemos al sistema anterior de proposiciones: vemos que P_1 y P_2 son verdaderas, pero P_3 no lo es. En efecto, $3^2 - 3 + 1 = 7$ y $5 \neq 7$. Por lo tanto, la fórmula $i_n = n^2 - n + 1$ no puede ser cierta para todo n. Dado que los impares saltan de dos en dos, podemos conjeturar que $i_n = 2n - 1$. Vamos a demostrar por inducción que esto es cierto.

Iniciamos con el **paso básico**. Este dice que el primer impar, es decir 1, es igual a $2 \cdot 1 - 1$. Esto es cierto porque $2 \cdot 1 - 1 = 1$.

Ahora, suponemos que el resultado es cierto para k, es decir, suponemos que $i_k = 2k - 1$. La **tesis inductiva** a demostrar es que $i_{k+1} = 2(k+1) - 1$. Ahora, sabemos que los números impares i_k e i_{k+1} se relacionan mediante $i_{k+1} = i_k + 2$. Por lo tanto, usando la **hipótesis inductiva** concluimos que

$$i_{k+1} = i_k + 2 \overset{H.I.}{=} (2k-1) + 2 = 2(k+1) - 1,$$

que es lo que queríamos demostrar.

2.2 Suma de los primeros n impares

Consideramos ahora el problema de encontrar una fórmula para la suma de los primeros n impares positivos.

Ejercicio. *Calcule las sumas* $1,\ 1+3,\ 1+3+5,\ 1+3+5+7,\ \ldots$. *Sorpréndrase. Conjeture una fórmula para la suma.*

Denotamos a la suma de los primeros n impares por s_n. Seguramente, al realizar el ejercicio anterior usted encontró que $s_n = n^2$. Vamos a demostrar el resultado por inducción.

Tenemos que $s_1 = 1$ y $1^2 = 1$, por lo tanto el **paso básico** se cumple. Suponemos ahora que el resultado es cierto para k, es decir, $s_k = k^2$. La **tesis inductiva** a demostrar es que $s_{k+1} = (k+1)^2$. Ahora, sabemos que las sumas s_k y s_{k+1} se relacionan mediante $s_{k+1} = s_k + i_{k+1}$, donde i_{k+1} es el $(k+1)$-ésimo impar. Por un resultado anterior sabemos que $i_{k+1} = 2(k+1) - 1 = 2k+1$. Ahora podemos usar la **tesis inductiva** para obtener que

$$s_{k+1} = s_k + i_{k+1} \stackrel{H.I.}{=} k^2 + (2k+1) = (k+1)^2,$$

que es justamente la tesis inductiva que había que probar.

3 Otros tipos de inducción matemática

La idea principal de inducción es la de ir "barriendo" todos los números naturales. Aunque los siguientes principios necesitan una demostración rigurosa, estos son intuitivamente claros y por el momento vamos a limitarnos a describirlos.

3.1 Principio de inducción fuerte

La validez de una sucesión infinita de proposiciones $P_1, P_2, ...$ se garantiza si sucede lo siguiente:

1. La primera proposición P_1 es cierta.
2. Las proposiciones P_1,...,P_k implican P_{k+1} para todo entero positivo k.

Es importante mencionar que muchas veces no es necesario usar *todas* las proposiciones anteriores para concluir la siguiente. Regresando a la analogía de las fichas de dominó, consideramos la situación en que los dominós tienen un resorte que les evita caer fácilmente y que estos resortes son más fuertes cada vez. El dominó n no sólo requiere la fuerza de su vecino más cercano, sino de todos (o algunos) de las fichas anteriores para caer, [5].

3.1.1 Fórmula explícita para la sucesión de Fibonacci

Presentamos este ejemplo de manera ilustrativa, aunque el resultado en principio resulta enigmático. Cuando se cubran las lecciones de *Sucesiones recurrentes* se verá que no hay razón para el misterio.

Considere la sucesión de Fibonacci definida por $F_1 = F_2 = 1$ y $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$ para todo entero $n \geq 1$. Los primeros términos de la sucesión son

$$1,\ \ 1,\ \ 2,\ \ 3,\ \ 5,\ \ 8,\ \ 13,\ \ 21,\ \ 34, \ldots.$$

La fórmula de Binet, que da explícitamente el valor de la sucesión de Fibonacci, establece que

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}}(\alpha^n - \beta^n),$$

donde $\alpha = (1+\sqrt{5})/2$ y $\beta = (1-\sqrt{5})/2$. El método de inducción en este problema va a ser ligeramente diferente de los casos anteriores, pero al final notaremos que aún mantiene la idea principal. Antes de empezar con el problema, es conveniente visualizar el tipo de inducción que usaremos. Aunque posiblemente no sea la única forma de demostración, el principio de inducción fuerte resulta una buena opción pues conociendo la fórmula para F_n y F_{n+1} y la relación de recurrencia, podríamos en principio calcular directamente F_{n+2}. El principio "estándar" no resulta tan útil pues en la relación de recurrencia se observa que se ocupan de dos términos anteriores para calcular el siguiente, de manera que usar como hipótesis inductiva una sola proposición no va a ayudar a demostrar el problema.

Ahora, si se utilizara la inducción fuerte sería necesario asumir la igualdad por lo menos para los dos valores anteriores. Esto implica que para el **paso básico** hay que verificar que la relación para F_1 y F_2 se cumplen. En estos casos se tiene que

$$\frac{1}{\sqrt{5}}(\alpha-\beta)=\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}-\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)=\frac{2\sqrt{5}}{2\sqrt{5}}=1,$$

$$\frac{1}{\sqrt{5}}(\alpha^2-\beta^2)=\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{6+2\sqrt{5}}{4}-\frac{6-2\sqrt{5}}{4}\right)=\frac{4\sqrt{5}}{4\sqrt{5}}=1.$$

Por lo tanto, en ambos casos se cumple la igualdad. En este caso la **hipótesis inductiva** consiste en asumir que para todos los enteros $k \leq n$ se cumple la fórmula para F_k, y la **tesis inductiva** corresponde a demostrar que

$$F_{n+1}=\frac{1}{\sqrt{5}}(\alpha^{n+1}-\beta^{n+1}),$$

para $n \geq 2$. De la definición de la sucesión y la hipótesis inductiva tenemos que

$$F_{n+1}\overset{def}{=}F_n+F_{n-1}\overset{H.I.}{=}\frac{1}{\sqrt{5}}([\alpha^n-\beta^n]+[\alpha^{n-1}-\beta^{n-1}]).$$

En este momento es posible que no tengamos idea de cómo concluir la inducción. Podemos trabajar el resultado de "atrás para adelante", reduciendo el problema mediante una serie de equivalencias, para ver cómo logramos concluir el resultado. En nuestro caso hay que demostrar que

$$\frac{1}{\sqrt{5}}(\alpha^{n+1}-\beta^{n+1})=\frac{1}{\sqrt{5}}([\alpha^n-\beta^n]+[\alpha^{n-1}-\beta^{n-1}])\Longleftrightarrow \alpha^{n+1}-\beta^{n+1}=(\alpha^n-\beta^n)+(\alpha^{n-1}-\beta^{n-1}).$$

Ahora, resulta una opción natural agrupar las potencias de α y β por separado, de manera que hay que probar que

$$(\alpha^{n+1}-\alpha^n-\alpha^{n-1})-(\beta^{n+1}-\beta^n-\beta^{n-1})=0.$$

Ahora, podemos observar que $t^{n+1}-t^n-t^{n-1}=t^{n-1}(t^2-t-1)$, y concluimos el resultado al notar que α y β son las soluciones de la ecuación $t^2-t-1=0$.

3.2 Inducción de Cauchy

Otra manera de validar una sucesión infinita de proposiciones $P_1, P_2, \ldots$ se puede alcanzar si se demuestra lo siguiente:

1. La primera proposición P_1 es cierta.
2. La proposición P_k implica P_{2k} para todo entero positivo k.
3. La proposición P_k implica P_{k-1} para todo entero $k \geq 2$.

Este tipo de inducción es un poco diferente a las dos anteriores por el hecho de que una proposición implica otra mucho más "adelantada" y que también implica la anterior y no directamente la siguiente. Sin embargo, es fácil concluir que P_k sí implica P_{k+1} de una forma indirecta: si P_k es cierta entonces P_{2k} también lo es, y de esta forma P_{2k-1}, P_{2k-2}, … también lo son. Puesto que $2k \geq k+1$ para todo entero positivo k en algún momento se va a obtener que P_{k+1} es cierta.

3.2.1 La desigualdad de la media aritmética y geométrica

El siguiente ejemplo es un resultado fundamental en la resolución de desigualdades y establece una relación entre las medias aritmética y geométrica. Esta demostración se le atribuye a Cauchy, [5], y la parte ingeniosa de la prueba es que P_{k+1} implica P_k.

El enunciado establece que la media aritmética es mayor o igual que la geométrica, es decir, si $x_1, \ldots, x_n$ números reales positivos. Entonces se cumple que

$$\frac{x_1 + \ldots + x_n}{n} \geq \sqrt[n]{x_1 \ldots x_n}.$$

El caso para $n = 1$ es claramente cierto, pero no es interesante, ni nos va a ser útil. Vamos a empezar con $n = 2$ para **paso básico**, es decir, hay que probar que $(x_1 + x_2)/2 \geq \sqrt{x_1 x_2}$. La desigualdad anterior se puede reescribir como $x_1 - 2\sqrt{x_1 x_2} + x_2 \geq 0$. Esta última expresión es cierta pues

$$x_1 - 2\sqrt{x_1 x_2} + x_2 \geq (\sqrt{x_1} - \sqrt{x_2})^2 \geq 0,$$

y con esto concluye la demostración del paso básico. Suponemos ahora la **hipótesis inductiva**, es decir, que

$$\frac{x_1 + \ldots + x_n}{n} \geq \sqrt[n]{x_1 \ldots x_n},$$

para cualesquiera n reales positivos. El primer paso de la **tesis inductiva** consiste en demostrar que P_n implica P_{2n}, es decir, que

$$\frac{x_1 + \ldots + x_{2n}}{2n} \geq \sqrt[2n]{x_1 \ldots x_{2n}}$$

para cualesquiera $2n$ reales positivos. El lado izquierdo se puede reescribir de la siguiente forma,

$$\frac{x_1 + \ldots + x_{2n}}{2n} = \frac{(x_1 + \ldots + x_n) + (x_{n+1} + \ldots + x_{2n})}{2n} = \frac{1}{2}\left(\frac{x_1 + \ldots + x_n}{n} + \frac{x_{n+1} + \ldots + x_{2n}}{n}\right).$$

Usando la hipótesis inductiva para cada uno de los grupos de n reales positivos resulta que

$$\frac{x_1 + \ldots + x_{2n}}{2n} = \frac{1}{2}\left(\frac{x_1 + \ldots + x_n}{n} + \frac{x_{n+1} + \ldots + x_{2n}}{n}\right) \overset{H.I.}{\geq} \frac{1}{2}(\sqrt[n]{x_1 \ldots x_n} + \sqrt[n]{x_{n+1} \ldots x_{2n}}).$$

Usando el resultado del paso básico, $(a + b)/2 \geq \sqrt{ab}$, se sigue que

$$\frac{1}{2}(\sqrt[n]{x_1 \ldots x_n} + \sqrt[n]{x_{n+1} \ldots x_{2n}}) \geq \sqrt{\sqrt[n]{x_1 \ldots x_n} \cdot \sqrt[n]{x_{n+1} \ldots x_{2n}}} = \sqrt[2n]{x_1 \ldots x_{2n}}.$$

De esta forma concluimos que

$$\frac{x_1 + \ldots + x_{2n}}{2n} \geq \sqrt[2n]{x_1 \ldots x_{2n}},$$

que es una de las partes de la tesis inductiva. Para la segunda parte de la **tesis inductiva**, hay que demostrar que

$$\frac{x_1 + \ldots + x_{n-1}}{n-1} \geq \sqrt[n-1]{x_1 \ldots x_{n-1}}.$$

La observación fundamental en este momento es que si, en un promedio, uno de los términos es igual al promedio, entonces el promedio de los demás es igual al anterior. Podemos usar esto tomando $x_n = \sqrt[n-1]{x_1 \ldots x_{n-1}}$, y obtener que

$$\sqrt[n]{x_1 \ldots x_{n-1} x_n} = \sqrt[n]{x_1 \ldots x_{n-1} \sqrt[n-1]{x_1 \ldots x_{n-1}}} = \sqrt[n]{\sqrt[n-1]{(x_1 \ldots x_{n-1})^n}} = \sqrt[n-1]{x_1 \ldots x_{n-1}}.$$

De esta forma, la **hipótesis inductiva**, con $x_n = \sqrt[n-1]{x_1 \ldots x_{n-1}}$, implica que

$$\frac{x_1 + \ldots + x_{n-1} + \sqrt[n-1]{x_1 \ldots x_{n-1}}}{n} \overset{H.I.}{\geq} \sqrt[n-1]{x_1 \ldots x_{n-1}}.$$

Luego de multiplicar por n y reacomodar los términos, concluimos fácilmente la tesis inductiva.

4 Problemas

Los libros [1], [6] y [5] contienen una buena cantidad de problemas en inducción.

Problema 1 ([12])**.** *Considere la afirmación "En un conjunto finito de caballos, todos tienen el mismo color". Procedemos por inducción sobre el número de caballos. El caso base $n = 1$ es claro. Suponemos que el resultado es cierto para n. Para $n + 1$, dividimos los caballos en los primeros n y los últimos n. Por hipótesis inductiva los primeros n tienen el mismo color y los últimos n también, por lo tanto los $n + 1$ caballos tienen el mismo color.*

Problema 2. *Sea n un entero positivo mayor que 3. Entonces se cumple que $n! > 2^n$.*

Problema 3. *Para todo entero positivo n, demuestre que:*

a). $1 + 2 + \ldots + n = \frac{n(n+1)}{2}$,

b). $1^2 + 2^2 + \ldots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$,

c). $1^3 + 2^3 + \ldots + n^3 = (\frac{n(n+1)}{2})^2$,

d). $\frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \ldots + \frac{1}{n(n+1)} = 1 - \frac{1}{n+1}$,

e). $\frac{1}{2} + \frac{2}{2^2} + \ldots + \frac{n}{2^n} = 2 - \frac{n+2}{2^n}$,

f). $1 + a + a^2 + \ldots + a^n = \frac{a^{n+1}-1}{a-1}$ *para* $a \neq 1$.

Problema 4 (Desigualdad de Bernoulli)**.** *Sea n un entero positivo y x un real mayor que -1. Entonces se cumple que $(1 + x)^n \geq 1 + nx$.*

Problema 5. *Para todo entero positivo n, demuestre que*

$$\frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \ldots + \frac{1}{n^2} \leq 2 - \frac{1}{n}.$$

Problema 6. *Para todo entero positivo n, demuestre que*

a). 7 *divide a* $8^n - 1$,

b). 133 *divide a* $11^{n+1} + 12^{2n-1}$,

c). 3^{n+1} *divide a* $2^{3^n} + 1$.

Problema 7. *Demuestre que la suma de los ángulos internos de un polígono no cruzado de n lados es $(n - 2) \cdot 180°$.*

Problema 8. *Sea $\{F_n\}$ la sucesión de Fibonacci, definida por $F_1 = F_2 = 1$ y $F_{n+2} = F_n + F_{n+1}$ para $n \geq 1$. Demuestre que los términos satisfacen las siguientes relaciones:*

a). cualesquiera dos términos consecutivos de la sucesión son coprimos,

b). $F_1 + F_3 + \ldots + F_{2n-1} = F_{2n}$,

c). $F_2 + F_4 + \ldots + F_{2n} = F_{2n+1} - 1$,

d). $F_{n+1}F_{n-1} - F_n^2 = (-1)^n$,

e). $F_{n+1}^2 + F_n^2 = F_{2n+1}$.

Problema 9. *La sucesión de Lucas se define como $L_0 = 2$, $L_1 = 1$ y $L_{n+2} = L_{n+1} + L_n$, para todo entero no negativo n. Demuestre que*

$$L_n = \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2}\right)^n + \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2}\right)^n.$$

Problema 10 (Mazur-Orlicz-Ulam)**.** *Sea E una colección de conjuntos, cada uno de los cuales contiene a lo sumo n elementos y cualesquiera $n+1$ de ellos tiene por lo menos un elemento común. Demuestre que existe un elemento común a todos los conjuntos de E.*

Problema 11. *Sea x un número real tal que $x + 1/x$ es un entero. Demuestre que $x^n + 1/x^n$ es un entero para todo entero positivo n.*

Problema 12. *Sea n un entero positivo. Demuestre que el polinomio $p(t) = t^{n+1} - (n+1)t + n$ se factoriza como forma $p(t) = (t-1)^2 q(t)$ y use esto para demostrar que $p(t) \geq 0$ para $t \geq 0$. Use esto para dar una demostración alternativa de la desigualdad de las medias usando la inducción "regular".*

Problema 13 (Representación de Zeckendorf)**.** *Demuestre que todo entero positivo puede ser escrito de manera única como suma de términos distintos no consecutivos de la sucesión de Fibonacci.*

Problema 14 ([1])**.** *Sea $a_1 \leq a_2 \leq \ldots \leq a_n$ una sucesión de enteros positivos tales que*

$$\frac{1}{a_1} + \ldots + \frac{1}{a_n} = 1.$$

Demuestre que $a_n < 2^{n!}$.

Problema 15. *Encuentre todas las funciones $f : \mathbb{Z}^+ \to \mathbb{Z}^+$ tales que*

1. *$f(2) = 2$,*
2. *$f(mn) = f(m)f(n)$ para todo $m, n \in \mathbb{Z}^+$,*
3. *$f(m) < f(n)$ si $m < n$.*

Problema 16 (Ecuación de Cauchy)**.** *Suponga que $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ satisface la ecuación funcional de Cauchy, $f(x+y) = f(x) + f(y)$, para cualesquiera números reales x,y.*

1. *Exprese $f(2x), f(3x), \ldots$ en términos de $f(x)$.*
2. *Demuestre que $f(nx) = nf(x)$ para todo entero positivo n y todo número real x.*
3. *Demuestre que $f(0) = 0$ y que $f(-x) = -f(x)$.*
4. *Use lo anterior para concluir que $f(nx) = nf(x)$ para todo entero n (no necesariamente positivo) y todo número real x.*
5. *Exprese $f(x/2), f(x/3), \ldots$ en términos de $f(x)$.*
6. *Demuestre que $f(rx) = rf(x)$ para todo número racional r y todo número real x.*

Problema 17 (Polinomios de Chebyshev)**.** *Recuerde las fórmulas de suma*

$$\mathit{sen}\ (\alpha \pm \beta) = \mathit{sen}\ \alpha \cos\beta \pm \cos\alpha\, \mathit{sen}\ \beta, \qquad \cos(\alpha \pm \beta) = \cos\alpha\cos\beta \mp \mathit{sen}\ \alpha\, \mathit{sen}\ \beta,$$

y las fórmulas de producto a suma

$$\mathit{sen}\ \alpha \pm \mathit{sen}\ \beta = 2\mathit{sen}\ \frac{\alpha \pm \beta}{2} \cos\frac{\alpha \mp \beta}{2},$$

$$\cos\alpha + \cos\beta = 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2},$$

$$\cos\alpha - \cos\beta = 2\mathit{sen}\ \frac{\alpha+\beta}{2}\mathit{sen}\ \frac{\beta-\alpha}{2}.$$

a). Escriba $\cos(2\alpha)$, $\cos(3\alpha)$, $\ldots$ en términos de $\cos\alpha$.

b). Escriba los cocientes

$$\frac{sen\ (2\alpha)}{sen\ \ \alpha}, \quad \frac{sen\ (3\alpha)}{sen\ \ \alpha}, \quad \dots$$

en términos de $\cos\alpha$.

c). Demuestre que

$$\cos((n+2)\alpha) = 2\cos\alpha\cos((n+1)\alpha) - \cos(n\alpha), \quad sen\ ((n+2)\alpha) = 2\cos\alpha sen\ ((n+1)\alpha) - sen\ (n\alpha).$$

d). Use de nuevo las identidades anteriores para probar que existen polinomios de grado n tal que $T_n(\cos\alpha) = \cos(n\alpha)$ y

$$U_n(\cos\alpha) = \frac{sen\ ((n+1)\alpha)}{sen\ \ \alpha}.$$

Establezca distintas recurrencias entre estos polinomios.

Problema 18 (Rusia '95). *La sucesión $a_0, a_1, \dots$ satisface la relación de recurrencia*

$$a_{m+n} + a_{m-n} = \frac{1}{2}(a_{2m} + a_{2n}),$$

para cualesquiera enteros no negativos m, n con $m \geq n$. Si $a_1 = 1$, entonces determine una fórmula explícita para a_{1995}.

Problema 19 (Competencia de Sociedad Iraní de Matemática 2008, Problema 6). *Sea $a_0, a_1, \dots, a_{n+1}$ una sucesión de enteros tales que $a_0 = a_{n+1} = 1$, $a_i > 1$, y a_i divide a $a_{i-1} + a_{i+1}$ para $1 \leq i \leq n$. Demuestre que existe al menos un 2 en la sucesión.*

Problema 20 (OIM '96). *Dado un número natural $n \geq 2$, considere todas las fracciones de la forma $1/ab$, donde a y b son números naturales, primos entre sí y tales que*

$$a < b \leq n, \qquad a + b > n.$$

Demuestre que para cada n la suma de estas fracciones es $1/2$.

References

[1] A. Engel, *Problem-Solving Strategies*, Problem Books in Mathematics, Springer, 1998.

[2] G. Pólya, *How to Solve It. A New Aspect of Mathematical Method*, Princeton University Press, 1988.

[3] R. Courant, H. Robbins, *What is Mathematics?*, Oxford University Press, 1996.

[4] K. Rosen, *Elementary Number Theory and Its Applications*, Addison Wesley, 2005.

[5] P. Zeitz, *The Art and Craft of Problema Solving*, John Wiley & Sons, 2007.

[6] E. Meneses, R. Cruz, *Sólo para Olímpicos*, 1998.

[7] Colabores de Wikipedia, *Euler's sum of powers conjecture*, `en.wikipedia.org/wiki/Euler%27s_sum_of_powers_conjecture`.

[8] Colabores de Wikipedia, *Pell's equation*, `en.wikipedia.org/wiki/Pell%27s_equation`.

[9] Colabores de Wikipedia, *Fermat number*, `en.wikipedia.org/wiki/Fermat_number`.

[10] Colabores de Wikipedia, *Goldbach's conjecture*, `en.wikipedia.org/wiki/Goldbach%27s_conjecture`.

[11] Colabores de Wikipedia, *Collatz conjecture*, en.wikipedia.org/wiki/Collatz_conjecture.

[12] Colabores de Wikipedia, *All horses are the same color*, en.wikipedia.org/wiki/All_horses_are_the_same_color.

[13] E.W. Weisstein, *Prime-Generating Polynomial*, tomado de MathWorld–A Wolfram Web Resource. mathworld.wolfram.com/Prime-GeneratingPolynomial.html.