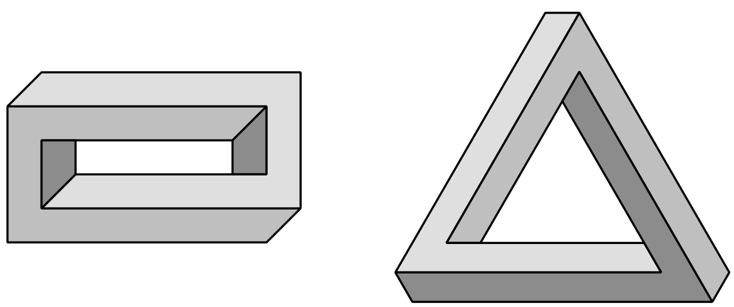
XXX Olimpiada Costarricense de Matemáticas

MEP–UNA–UCR–MICITT–UNED–ITCR

EXAMEN

II Eliminatoria



Nivel I

(7°)

2018

Estimado estudiante:

La Comisión Organizadora de las Olimpiadas Costarricenses de Matemáticas le saluda y felicita por haber clasificado a la segunda eliminatoria nacional de estas justas académicas. La prueba consta de dos partes: una primera parte de 12 preguntas de selección única, ponderadas con dos puntos cada respuesta correcta, y una segunda parte con tres preguntas de desarrollo, con un valor de siete puntos cada solución correcta.

Los resultados de esta eliminatoria se publicarán a partir del viernes 5 de octubre, en la siguiente dirección electrónica:

www.olcoma.com

INDICACIONES GENERALES

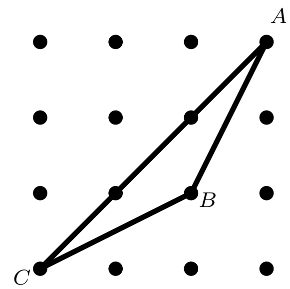
- Debe trabajar en forma individual.
- Las respuestas a las preguntas que se le formulan, deben ser consignadas ÚNICAMENTE en las hojas de respuestas que se le han entregado.
- Los dibujos que aparecen en la prueba no están hechos a escala.
- El formulario de preguntas es suyo, por lo que puede realizar en él todas las anotaciones, cálculos o dibujos que le sean necesarios para resolver satisfactoriamente la prueba.
- Los únicos instrumentos cuyo uso se permite son los necesarios para escribir y dibujar. Se prohíbe el uso de libros, libretas de notas, tablas y calculadora.
- El examen tiene una duración máxima de tres horas.
- Escriba claramente los datos que se le solicitan en las hojas de respuestas.

SIMBOLOGÍA

$\overline{AB}$	segmento de extremos A y B	$\angle ABC \cong \angle DEF$	congruencia de ángulos
AB	medida de $\overline{AB}$	$\triangle ABC \cong \triangle DEF$	congruencia de triángulos
$\overrightarrow{AB}$	rayo de extremo A y que contiene a B	$ABC \leftrightarrow DEF$	correspondencia respectiva entre puntos
$\overleftrightarrow{AB}$	recta que contiene los puntos A y B	$\triangle ABC \sim \triangle DEF$	semejanza de triángulos
$\angle ABC$	ángulo de rayos $\overrightarrow{BA}$ y $\overrightarrow{BC}$	$\overline{AB} \cong \overline{CD}$	congruencia de segmentos
$m\angle ABC$	medida de $\angle ABC$	$\widehat{AB}$	arco de extremos A y B
$\triangle ABC$	triángulo de vértices A, B, C	$m\widehat{AB}$	medida de $\widehat{AB}$
$\square ABCD$	cuadrilátero de vértices A, B, C, D	(ABC)	área de ΔABC
$\parallel$	paralelismo	$(ABCD)$	área de $\square ABCD$
$\perp$	perpendicularidad	$P-Q-R$	P, Q, R puntos colineales, con Q entre los puntos P y R

I Parte: Selección única **Valor 24 puntos, 2 pts c/u**

1. En la figura adjunta, las distancias horizontales y verticales entre puntos consecutivos son iguales a 1 cm. El área, en cm^2, del triángulo ABC corresponde a



   (a) 3

   (b) 4

   (c) 1,5

   (d) 4,5

2. Un faro emite tres colores distintos:

   - Rojo cada 16 segundos
   - Verde cada 45 segundos
   - Blanco cada 2 minutos y 20 segundos

   Los tres colores son emitidos, simultáneamente, a media noche. La frecuencia con que son emitidos simultáneamente los colores rojo y blanco corresponde a

   (a) 720 segundos

   (b) 21 minutos

   (c) 9 minutos y 20 segundos

   (d) 1 hora y 24 minutos

3. La cantidad de números primos de tres cifras que existen, tales que al suprimirle la cifra de las centenas el número resultante es un cuadrado perfecto de dos cifras corresponde a

   (a) 5

   (b) 6

   (c) 7

   (d) 8

4. Un rectángulo mide 192×84. Se corta el cuadrado de mayor tamaño que se pueda del rectángulo con un solo corte. Si ambas piezas resultantes son cuadrados, el proceso termina, sino se repite el proceso recortando el rectángulo no cuadrado. La cantidad de piezas que resultan al final del proceso corresponde a

   (a) 6

   (b) 7

   (c) 8

   (d) 9

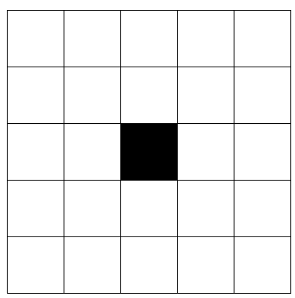
5. En la figura adjunta, se ha creado un cuadrado 5×5 conformado por cuadritos de dimensiones 1×1. La cantidad de cuadrados conformados por cuadritos 1×1 que contienen al cuadrado negro del centro corresponde a

   (a) 16

   (b) 17

   (c) 18

   (d) 19



6. Considere el $\triangle ABC$ en el que M es el punto medio de $\overline{BC}$, D es un punto en $\overline{AC}$, tal que $\overline{BD} \perp \overline{AC}$, y $DM = MC$. Si $m\angle BAC = 45°$ y $m\angle ACB = 30°$, entonces $m\angle AMB$ corresponde a

   (a) $15°$

   (b) $30°$

   (c) $45°$

   (d) $60°$

7. La suma de todos los enteros positivos menores que 100 y que tienen exactamente tres divisores positivos diferentes corresponde a

   (a) 87

   (b) 88

   (c) 176

   (d) 177

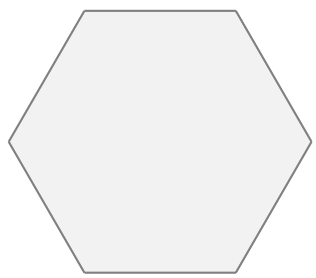
8. Considere la figura adjunta, en la que cada uno de sus lados mide dos unidades. Si se escogen siete puntos cualesquiera en el interior de la figura, se cumple con certeza que dos de los puntos dados están a una distancia

   (a) menor de dos unidades

   (b) mayor de dos unidades pero menor de tres unidades

   (c) mayor de tres unidades pero menor de cuatro unidades

   (d) mayor de cuatro unidades



9. Considere el rectángulo $ABCD$. Sean los puntos E sobre $\overline{AB}$, y F sobre $\overline{AD}$, tales que $A-E-B$ y $A-F-D$, respectivamente. Si $\angle BEC \cong \angle FEC$ y $\angle EFC \cong \angle DFC$, entonces $m\angle BCE + m\angle DCF$ corresponde a

   (a) $30°$

   (b) $45°$

   (c) $60°$

   (d) $75°$

10. Ana, Beatriz y Carlos van al mismo colegio, el cual tiene 793 estudiantes distribuidos en la totalidad de aulas de la institución. En el colegio se sabe que por cada 23 personas que se reúnen en los recreos, hay dos de la misma aula.
    Ana afirma que hay por lo menos un aula en la que hay al menos 19 estudiantes del mismo género, Carlos dice que hay a lo sumo 19 y Beatriz dice que hay al menos 20. Se puede asegurar que

    (a) Ana tiene razón

    (b) Beatriz tiene razón

    (c) Carlos tiene razón

    (d) Ninguno tiene razón

11. Se elige un entero n al azar, tal que $1000 \leq n \leq 9999$. La probabilidad de que el producto de las cifras de n sea múltiplo de 3 corresponde a

    (a) $\dfrac{118}{125}$

    (b) $\dfrac{107}{125}$

    (c) $\dfrac{18}{125}$

    (d) $\dfrac{7}{125}$

12. Si a, b y c son dígitos, la cantidad total de números múltiplos de seis de la forma $4a5bc$ corresponde a

    (a) 161

    (b) 163

    (c) 165

    (d) 167

II Parte: Desarrollo **Valor 21 puntos, 7 pts c/u**

Instrucciones: Los siguientes ejercicios deben ser resueltos en las hojas adicionales que se le entregaron. Conteste en forma ordenada, completa y clara. Se califica procedimientos y respuesta.

1. Verónica, Ana y Gabriela situadas en una ronda se divierten con el siguiente juego: una de ellas elige un número y lo dice en voz alta; la que está a su izquierda divide el número dicho entre su mayor divisor primo y dice el resultado en voz alta; la que está a su izquierda divide este último número entre su mayor divisor primo y dice el resultado en voz alta, y así sucesivamente. Ganará aquella que deba decir en voz alta el número 1, momento en que el juego termina.

   Ana eligió un número mayor que 50 y menor que 100 y ganó.

   Verónica eligió el número consecutivo posterior del que escogió Ana, y ¡Verónica también ganó!

   Determine todos los números que pudo haber elegido Ana.

2. Determine todos los números naturales N de dos dígitos, tales que N equivale a siete veces la suma de sus dígitos.

3. Las diagonales del cuadrilátero $ABCD$ se intersecan en P y se tiene que $AP = 5$, $BP = 6$, $CP = 10$, $DP = 8$ y $AB = 7$.

   Encuentre la razón entre el área del cuadrilátero $ABCD$ y el área del triángulo ABP.