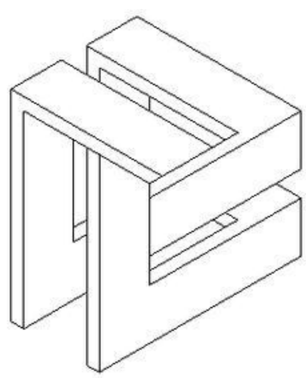
XXXI Olimpiada Costarricense de Matemáticas

MEP–UNA–UCR–MICITT–UNED–ITCR

Solución
II Eliminatoria



Nivel I
(7°)

2019

Estimado estudiante:

La Comisión Organizadora de las Olimpiadas Costarricenses de Matemáticas le saluda y felicita por haber clasificado a la segunda eliminatoria nacional de estas justas académicas. La prueba consta de dos partes: una primera parte de 10 preguntas de selección única, ponderadas con dos puntos cada respuesta correcta, y una segunda parte con dos preguntas de desarrollo, con un valor de siete puntos cada solución correcta.

Los resultados de esta eliminatoria se publicarán a partir del viernes 4 de octubre, en la siguiente dirección electrónica:

www.olcoma.com

INDICACIONES GENERALES

- Debe trabajar en forma individual.
- Las respuestas a las preguntas que se le formulan, deben ser consignadas ÚNICAMENTE en las hojas de respuestas que se le han entregado.
- Los dibujos que aparecen en la prueba no están hechos a escala.
- El formulario de preguntas es suyo, por lo que puede realizar en él todas las anotaciones, cálculos o dibujos que le sean necesarios para resolver satisfactoriamente la prueba.
- Los únicos instrumentos cuyo uso se permite son los necesarios para escribir y dibujar. Se prohíbe el uso de libros, libretas de notas, tablas y calculadora.
- El examen tiene una duración máxima de tres horas.
- Escriba claramente los datos que se le solicitan en las hojas de respuestas.

SIMBOLOGÍA

$\overline{AB}$	segmento de extremos A y B	$\angle ABC \cong \angle DEF$	congruencia de ángulos
AB	medida de $\overline{AB}$	$\triangle ABC \cong \triangle DEF$	congruencia de triángulos
$\overrightarrow{AB}$	rayo de extremo A y que contiene a B	$ABC \leftrightarrow DEF$	correspondencia respectiva entre puntos
$\overleftrightarrow{AB}$	recta que contiene los puntos A y B	$\triangle ABC \sim \triangle DEF$	semejanza de triángulos
$\angle ABC$	ángulo de rayos $\overrightarrow{BA}$ y $\overrightarrow{BC}$	$\overline{AB} \cong \overline{CD}$	congruencia de segmentos
$m\angle ABC$	medida de $\angle ABC$	$\widehat{AB}$	arco de extremos A y B
$\triangle ABC$	triángulo de vértices A, B, C	$m\widehat{AB}$	medida de $\widehat{AB}$
$\square ABCD$	cuadrilátero de vértices A, B, C, D	(ABC)	área de ΔABC
$\parallel$	paralelismo	$(ABCD)$	área de $\square ABCD$
$\perp$	perpendicularidad	$P-Q-R$	P, Q, R puntos colineales, con Q entre los puntos P y R

I Parte: Selección única **Valor 20 puntos, 2 pts c/u**

1. La suma de siete enteros consecutivos es 1001. La suma del menor y el mayor de estos siete números es
   (a) 288
   (b) 287
   (c) 286
   (d) 285

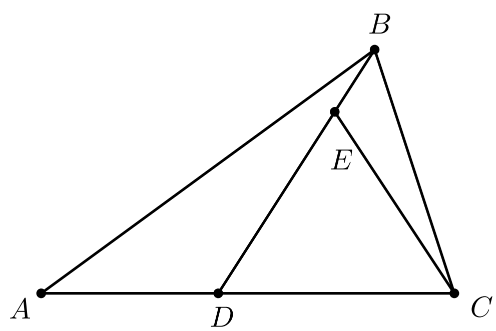
- Opción correcta: (c)
- **Solución:**

Siete números consecutivos pueden expresarse de la forma $n-3, n-2, n-1, n, n+1, n+2, n+3$, cuya suma es $7n$ y el número de enmedio es n.
Como la suma de todos ellos es 1001 entonces se tiene $7n = 1001$, por lo que

$$n = \frac{1001}{7} = 143$$

Luego, el menor es 140 y el mayor es 146, por lo que su suma es 286.

2. Considere el $\triangle ABC$ de la figura adjunta. Si se tiene que $m\angle BAC = 42°$, $m\angle BDC = 56°$, $DC = DE$ y $AB = AC$, entonces $m\angle BCE$ corresponde a
   (a) $7°$
   (b) $8°$
   (c) $13°$
   (d) $14°$



- Opción correcta: (a)
- **Solución:**

Se tiene que el $\angle BDC$ mide $56°$, entonces $m\angle ADB = 180° - m\angle BDC = 124°$.

Luego, el $\angle BAC$ mide $42°$ entonces $m\angle ABD = 180° - m\angle BAC - m\angle ADB = 14°$.

Como $DE = DC$ entonces $m\angle DCE = m\angle DEC$, así que, $2m\angle DCE + 56° = 180° \Rightarrow m\angle DCE = m\angle DEC = 62°$.

Por otro lado, $AB = AC$ entonces $m\angle ABC = m\angle ACB$, así que, $2m\angle ACB = 180° - m\angle BAC \Rightarrow m\angle ACB = 69°$. Observe que $m\angle ACB = m\angle DCB = 69°$

Pero $m\angle DCB = m\angle DCE + \angle BCE \Rightarrow m\angle BCE = m\angle DCB - m\angle DCE = 69° - 62° = 7°$

3. Considere la sucesión de símbolos $xx222\alpha\alpha\alpha\beta xx222\alpha\alpha\alpha\beta xx222\alpha\alpha\alpha\beta\ldots$ Si se continúa de manera indefinida con el patrón, determine el símbolo que aparece en la posición 2019.
   (a) x
   (b) 2
   (c) α
   (d) β

- Opción correcta: (b)
- **Solución:**

  El patrón que se repite es $xx222\alpha\alpha\alpha\beta$, por lo que el ciclo consiste de 9 símbolos.

  De lo anterior, el símbolo β que aparece al final del patrón se presenta en las posiciones $9, 18, 27, 36, 45, 54, \ldots$

  Como $2019 = 9 \cdot 224 + 3$, se tiene que el símbolo que está en la posición 2019 es el mismo que el que aparece en la posición 3 del patrón original; es decir, el símbolo es 2.

4. Seis bolsas contienen 18, 19, 21, 23, 25 y 34 bolitas, respectivamente. Las bolsas contienen únicamente bolitas que son del mismo peso, tamaño y textura. Cinco de las bolsas contienen únicamente bolitas de color azul y la otra bolsa solo tiene bolitas rojas. Juan toma tres de las bolsas y Jorge toma dos de las restantes tres bolsas. Si solo quedó sin ser seleccionada la bolsa de bolitas rojas y Juan obtuvo el doble de bolitas que Jorge, entonces la cantidad de bolitas rojas es
   (a) 19
   (b) 21
   (c) 23
   (d) 34

- Opción correcta: (c)
- **Solución:**

  Primero observe que de las 6 bolsas hay dos que tienen una cantidad par de bolitas, esto quiere decir para que, Juan al tomar 3 de ellas, la suma de las bolitas posea mitad (dado que Juan toma el doble de bolitas que Jorge) debe elegir una bolsa con cantidad par y dos con cantidad impar.
  * Si Juan toma la bolsa con 18 bolitas más las dos bolas con 19 y 21 bolitas (que sería la menor suma) se obtiene como resultado 58, pero la mitad, que sería la cantidad de bolitas que tiene Jorge, debe ser 29 lo cual no puede ocurrir.

  * Si Juan toma la bolsa con 18 bolitas más las dos bolas con 21 y 23 bolitas se obtiene como resultado 62, pero la mitad, que sería la cantidad de bolitas que tiene Jorge, debe ser 31 lo cual

no puede ocurrir.

* Si Juan toma la bolsa con 18 bolitas más las dos bolas con 23 y 25 bolitas (que sería la mayor suma) se obtiene como resultado 66, pero la mitad, que sería la cantidad de bolitas que tiene Jorge, debe ser 33 lo cual no puede ocurrir.

De lo anterior, Juan debe tomar la bolsa con 34 bolitas, por lo que Juan debe tomar las bolsas con 34, 25 y 19 para que la suma sea 78, y la mitad que es la cantidad que tomó Jorge, se da tomando las bolsas con 18 y 21.

Por lo tanto la bolsa restante, es decir, la que contiene bolitas rojas es la que tiene 23 bolitas.

5. Sea A el área de un rectángulo cuyos lados miden a y b, respectivamente. Un nuevo rectángulo se obtiene al incrementar a en 30 % y disminuir b en 10 %. Con certeza, el área del nuevo rectángulo es el área A

   (a) incrementada en 17 %

   (b) disminuida en 17 %

   (c) incrementada en 20 %

   (d) disminuida en 20 %

- Opción correcta: (a)

- **Solución:**

  El área del rectángulo inicial es $A = a \cdot b$.

  Para el nuevo rectángulo, las medidas de los lados son $1{,}3a$ y $0{,}9b$, por lo que su área es $1{,}3a \cdot 0{,}9b = \dfrac{13}{10} \cdot \dfrac{9}{10} \cdot a \cdot b = \dfrac{13 \cdot 9}{100}A = \dfrac{117}{100}A = 1{,}17 \cdot A$. Por lo que el área del nuevo rectángulo es el área A incrementada en 17 %.

6. Si se selecciona al azar un número entero mayor que 188 pero menor o igual que 981, la probabilidad de que el número selecionado sea múltiplo de dos o tres es

   (a) $\dfrac{528}{793}$

   (b) $\dfrac{529}{793}$

   (c) $\dfrac{660}{793}$

   (d) $\dfrac{661}{793}$

- Opción correcta: (b)
- **Solución:**

  Hay 793 números enteros $(981 - 188 = 793)$ mayores que 188 pero menores o iguales que 981, de los cuales 396 son pares. Además el primer múltiplo de 3 corresponde a $189 = 3 \cdot 63$ y el último $981 = 3 \cdot 327$ por tanto hay 265 números múltiplo de 3 $(327 - 63 + 1 = 265)$. Finalmente el primer múltiplo de 6 corresponde a $192 = 6 \cdot 32$ y el último $978 = 6 \cdot 163$ por tanto hay 132 números múltiplos de 6 $(163 - 32 + 1 = 132)$. Entonces la probabilidad de que el número selecionado sea múltiplo de dos o tres corresponde a $\dfrac{396 + 265 - 132}{793} = \dfrac{529}{793}$

7. Si se suman dos o más números del conjunto $\{5, 11, 17, 23, 29, 35\}$, la cantidad de resultados que corresponden a números primos es

   (a) 3

   (b) 4

   (c) 5

   (d) 6

- Opción correcta: (a)
- **Solución:**

  Consideremos los casos:

  a) Si se suman dos números no se tendrán números primos ya que la suma dará un numero par mayor que 2.

  b) Si se suman tres números no se tendrán números primos ya que cada uno de los números deja residuo 2 al dividirlo entre 3, por lo cual la suma de tres de ellos dará múltiplo de 3.

  c) Si se suman cuatro números la suma dará par.

  d) Si se suman cinco números la suma puede calcularse restando al total $5 + 11 + 17 + 23 + 29 + 35 = 120$ cada un de los números, es decir los resultados serán: $120 - 5 = 115$, $120 - 11 = 109$, $120 - 17 = 103$, $120 - 23 = 97$, $120 - 29 = 91$ y $120 - 35 = 85$. De los cuales 109, 103 y 97 son primos.

e) Si se suman seis números la suma es 120, que no es primo.
De los casos anteriores tenemos 3 resultados que daran números primos.

8. Las casillas de una cuadrícula de 2019×2019 están numeradas con 1, 2, 3 y 4 de acuerdo al patrón que se muestra en la figura. Una ficha se coloca en la casilla de la esquina superior izquierda. A cada paso la ficha puede moverse a una casilla vecina que esté abajo o a la derecha. Después de 2019 pasos, el número que tendrá la casilla sobre la que estará la ficha es

1	2	3	4	1		$\cdots$	
4	1	2	3	4		$\cdots$	
3	4	1	2	3		$\cdots$	
2	3	4	1	2		$\cdots$	
1	2	3	4	1		$\cdots$	
						$\cdots$	
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$
						$\cdots$	

(a) 1 o 4

(b) 2 o 3

(c) 1 o 3

(d) 2 o 4

- Opción correcta: (*d*)
- **Solución:**

Se puede observar que 2019 tiene residuo tres al dividirlo entre cuatro, así que el número que obtenemos depués de 2019 pasos es el mismo que obtemos después de tres pasos. Por lo anterior terminaremos en un cuadrado con un 2 o un 4.

9. Sean a, b y c los dígitos del número de tres cifras abc. Si se sabe que el producto de este número con su cifra de unidades es 2 529, el producto de ese mismo número con cifra de las centenas 6 744 y las cifras de las centenas son el doble que las de las decenas, entonces el valor de $abc \cdot abc$, siendo este el producto usual, es

(a) 160 17

(b) 160 170

(c) 400 689

(d) 710 649

- Opción correcta: (*d*)
- **Solución:**

De los datos se tiene que $abc \cdot a = 6\,744$, $abc \cdot c = 2\,529$ y $a = 2 \cdot b$.
Luego, $abc \cdot a = abc \cdot 2 \cdot b = 6\,744 \Rightarrow abc \cdot b = 3\,372$.
Considerando la notación desarrollda de abc se tiene: $(a \cdot 100 + b \cdot 10 + c) \cdot abc$.
Considerando el algoritmo de la multiplicación:

$$(a \cdot 100 + b \cdot 10 + c) \cdot abc = a \cdot 100 \cdot abc + b \cdot 10 \cdot abc + c \cdot abc$$

$$= 2\,529 + 33\,720 + 674\,400 = 710\,649$$

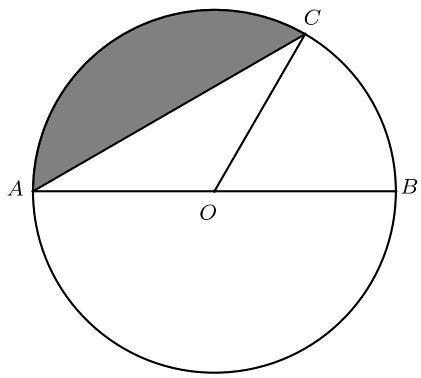
10. Considere la figura adjunta en la que O es el centro de la circunferencia, $A - O - B$ y $m\angle BOC = 60°$. Si $AB = 12$, entonces el perímetro de la figura sombreada menos el perímetro del $\triangle AOC$ es

    (a) $4\pi - 6$

    (b) $4\pi - 12$

    (c) $8\pi - 6$

    (d) $8\pi - 12$



- Opción correcta: (b)

- **Solución:**

  Como $m\angle BOC = 60°$, entonces $m\angle AOC = 120°$; de esta manera, la región sombreada junto con el $\triangle AOC$ corresponden con la tercera parte del círculo.

  Por otra parte, dado que $AB = 12$, entonces el radio del círculo satisface $OA = OC = 6$. Así, el perímetro del círculo es $2 \cdot \pi \cdot 6 = 12\pi$ y el perímetro de la región sombreada es $AC + \dfrac{12\pi}{3} = AC + 4\pi$.

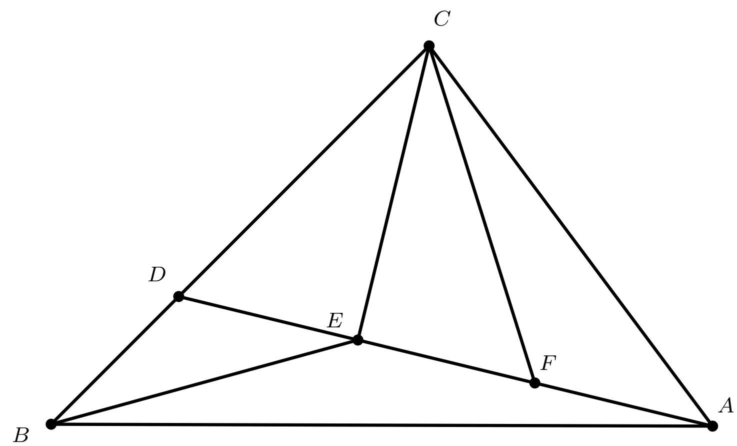
  Por lo tanto, el perímetro de la figura sombreada menos el perímetro del $\triangle AOC$ está dado por $(AC + 4\pi) - (6 + 6 + AC) = AC + 4\pi - 6 - 6 - AC = 4\pi - 12$.

II Parte: Desarrollo **Valor 14 puntos, 7 pts c/u**

Instrucciones: Los siguientes ejercicios deben ser resueltos en las hojas adicionales que se le entregaron. **Debe responder cada pregunta en hojas separadas**. Conteste en forma ordenada, completa y clara. Se califica procedimientos y respuesta.

1. En el $\triangle ABC$, considere que $m\angle CBA = 45°$, además el $\triangle DCF$ es equilátero y $BD = EF$. Determine $m\angle FCA$

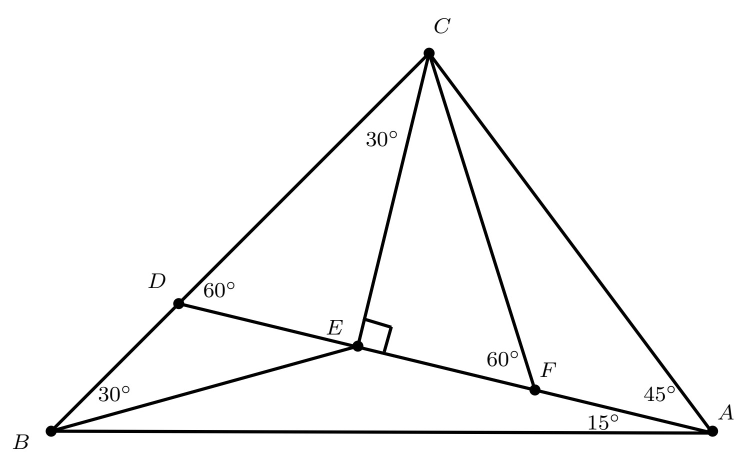
   Pregunta eliminada debido a en el enunciado se omitió el dato de que $m\angle DEC = 90°$



Solución

Considerando el dato de que $m\angle DEC = 90°$**:**

Como el $\triangle DCF$ es equilátero entonces $m\angle FDC = 60°$, $m\angle DCE = 30°$ y por el teorema del ángulo exterior $m\angle DAB = 60° - 45° = 15°$. Como la altura de un triángulo equilátero biseca su base se tiene que $DE = EF = DB$ por lo tanto el $\triangle BDE$ es isósceles y como $m\angle BDE = 120°$ entonces $m\angle DBE = 30°$, lo que implica que $m\angle EBA = 15°$, entonces el $\triangle BEA$ es isósceles, lo que significa que $BE = EA$ y como tambien $\triangle BEC$ es isósceles $BE = EC = EA$, por lo tanto el $\triangle ECA$ es isósceles y $m\angle EAC = 45°$. Por otra parte como $m\angle EFC = 60°$ se concluye que $m\angle FCA = 60° - 45° = 15°$



2. Una rana roja y una rana verde compiten en una calle de piedras enumeradas del 1 al 20 con las siguientes reglas:

   a) Ambas ranas inician en la piedra 1 y en cada salto, ambas ranas avanzan a la piedra siguiente.

   b) Si la rana roja cae en en una piedra cuyo número es múltiplo de 3, entonces en el siguiente turno saltará dos lugares (por ejemplo, si la rana cae en la piedra número 12, en el siguiente turno brincará a la piedra con el número 14).

   c) Si la rana verde cae en en una piedra cuyo número es primo impar, entonces en el siguiente turno saltará tres lugares (por ejemplo, si la rana cae en la piedra número 5, en el siguiente turno brincará a la piedra con el número 8).

   d) Si cualquiera de las ranas llega a la piedra con el número 20, esta regresará a la piedra con el número 4 (no cuenta como salto).

   e) Gana la rana que después de cierta cantidad de saltos esté más adelante (pueden quedar empatadas)

   Determine cuál rana gana la competencia si deben hacer 2019 saltos.

Solución

Determinemos primero la posición de la rana roja.

Después de los primeros saltos se tiene la siguiente secuencia de posiciones:

1-2-3-5-6-8-9-11-12-14-15-17-18-20-	13 saltos
4-5-6-8-9-11-12-14-15-17-18-20-	11 saltos (24 en total)
4-5-6-8-9-11-12-14-15-17-18-20-	11 saltos (35 en total)
4-5-6-8-9-11-12-14-15-17-18-20-	11 saltos (46 en total)

La primera vez quen se llega a la piedra 20, toma 13 saltos, después se sigue pasando por las mismas piedras dando 11 saltos hasta llegar a la piedra 20.

Como se hacen 2019 saltos, y la rana hace 13 la primera vez que llega a la piedra 20, quedan 2006 saltos, y hace 182 veces la rutina de 11 saltos llegando a la piedra 20, así tenemos:

$$2006 - 182 \cdot 11 = 4$$

Es decir nos quedan 4 saltos y estamos en la posición 4, entonces hacemos los saltos correspondientes: 4-5-6-8-9.

Y así tenemos que después de 2019 saltos la rana roja está en la piedra 9.

Ahora veamos la posición de la rana verde

Después de los primeros saltos se tiene la siguiente secuencia de posiciones:

1-2-3-6-7-10-11-14-15-16-17-20-	11 saltos
4-5-8-9-10-11-14-15-16-17-20-	10 saltos (21 en total)
4-5-8-9-10-11-14-15-16-17-20-	10 saltos (31 en total)
4-5-8-9-10-11-14-15-16-17-20-	10 saltos (41 en total)

La primera vez que se llega a la piedra 20, toma 11 saltos, después se sigue pasando por las mismas piedras dando 10 saltos hasta llegar a la piedra 20.

Es claro que ambas ranas llegarán siempre a la piedra con el número 20.

Como se hacen 2019 saltos, y la rana hace 11 la primera vez que llega a la piedra 20, quedan 2008 saltos, y hace 200 veces la rutina de 11 saltos llegando a la piedra 20, así tenemos:

$$2008 - 200 \cdot 10 = 8$$

Es decir nos quedan 8 saltos y estamos en la posición 4, entonces hacemos los saltos correspondientes: 4-5-8-9-10-11-14-15-16.

Y así tenemos que después de 2019 saltos la rana verde está en la piedra 16.

Así tenemos que la rana verde gana la competencia.