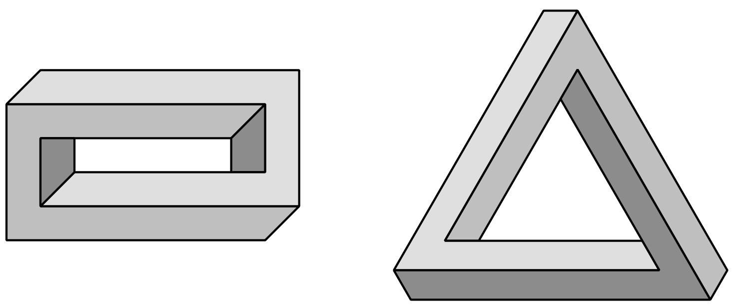
XXXII OLIMPIADA COSTARRICENSE DE MATEMÁTICAS

MEP - UNA - UCR - MICITT - UNED - TEC

SOLUCIÓN
SEGUNDA ELIMINATORIA



Nivel I

(7°)

2020

Estimado estudiante:

La Comisión de las Olimpiadas Costarricenses de Matemáticas 2020 le saluda y le da la más cordial bienvenida a la Segunda Eliminatoria Nacional de estas justas académicas, deseándole los mayores éxitos.
La prueba consta de un total de 20 preguntas de selección única.

Puede consultar la lista de estudiantes clasificados a partir del XXX, en la siguiente dirección electrónica:

www.olcoma.com

INDICACIONES GENERALES

- Debe trabajar en forma individual.
- Las respuestas a las preguntas que se le formulan, deben ser consignadas ÚNICAMENTE en la hoja de respuestas que se le ha entregado.
- Los dibujos que aparecen en la prueba no necesariamente están hechos a escala.
- El formulario de preguntas es suyo, por lo que puede realizar en él todas las anotaciones, cálculos o dibujos que le sean necesarios para resolver satisfactoriamente la prueba.
- No se permite el uso de hojas adicionales.
- Los únicos instrumentos cuyo uso se permite son los necesarios para escribir y dibujar. Se prohíbe el uso de libros, libretas de notas, tablas y calculadora.
- El examen tiene una duración máxima de tres horas.
- Escriba claramente los datos que se le solicitan en la hoja de respuestas.

SIMBOLOGÍA

$\overline{AB}$	segmento de extremos A yB	$\angle ABC \approx \angle DEF$	congruencia de ángulos
AB	medida de $\overline{AB}$	$\triangle ABC \cong \triangle DEF$	congruencia de triángulos
$\overrightarrow{AB}$	rayo de extremo A y que contiene a B	$ABC \leftrightarrow DEF$	correspondencia respectiva entre puntos
$\overleftrightarrow{AB}$	recta que contiene los puntos A y B	$\triangle ABC \sim \triangle DEF$	semejanza de triángulos
$\angle ABC$	ángulo de rayos $\overrightarrow{BA}$ y $\overrightarrow{BC}$	$\overline{AB} \cong \overline{CD}$	congruencia de segmentos
$m\angle ABC$	medida de $\angle ABC$	$\widehat{AB}$	arco de extremos A y B
$\triangle ABC$	triángulo de vértices A, B, C	$m\widehat{AB}$	medida de $\widehat{AB}$
$\square ABCD$	cuadrilátero de vértices A, B, C, D	(ABC)	área de ΔABC
$\parallel$	paralelismo	$(ABCD)$	área de $\square ABCD$
$\perp$	perpendicularidad	$P - Q - R$	P, Q, R puntos colineales, con Q entre los puntos P y R

I Parte: Selección única **Valor 24 puntos, 2 pts c/u**

1. Un grupo de estudiantes realiza una rifa para recaudar fondos. Elabora una lista del 00 al 99 y recorre aula por aula para vender los números. Al finalizar escogen de forma aleatoria el número ganador. La probabilidad de que el número favorecido tenga el digito 8 es

   (a) $\frac{10}{100}$

   (b) $\frac{11}{100}$

   (c) $\frac{19}{100}$

   (d) $\frac{20}{100}$

- Opción correcta: (c)
- Solución:

  Los números que tienen el digito 8 en son 8, 18, 28, 38, 48, 58, 68, 78, 80, 81, 82 ,83, 84, 85, 86, 87, 88, 89. Los cuales corresponde a 19 números. Así la probabilidad es $\frac{19}{100}$

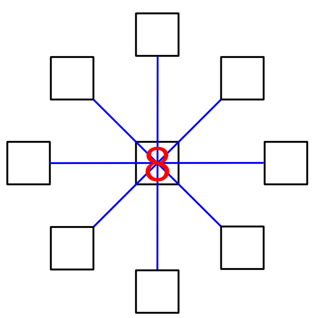
2. Cada uno de los números 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6 y 7 son escritos una sola vez en cada uno de los ocho cuadrados de la figura adjunta que no contienen número, de manera que se obtienen sumas iguales a lo largo de cada una de las cuatro líneas. Si el número 8 siempre está en el cuadrado del centro x representa la suma en cada una de las líneas, con certeza se puede asegurar que x es

   (a) 15

   (b) 12

   (c) 24

   (d) 16



- Opción correcta: (a)
- Solución:

  Sea x la suma que se produce en cada una de las cuatro líneas.

  Dado que $0+1+2+3+4+5+6+7+8 = \frac{8 \cdot 9}{2} = 36$, entonces $4x - 3 \cdot 8 = 36 \Rightarrow 4x = 36 + 24 \Rightarrow x = 60 \div 4 = 15$.

3. Sean A, B y C dígitos distintos con $A > C$. Si m es el número más grande posible de siete dígitos en el que se usan solo dos dígitos A, dos dígitos B y tres dígitos C, entonces m NO puede ser

   (a) $m = BBCCCAA$

   (b) $m = AABBCCC$

   (c) $m = AACCCBB$

   (d) $m = BBAACCC$

- Opción correcta: (a)
- Solución:

  Se analizan los números más grandes posibles para las distintas relaciones de orden entre los dígitos A, B y C.

  $B < C < A$ da como número más grande a $m = AACCCBB$.

  $C < A < B$ da como número más grande a $m = BBAACCC$.

  $C < B < A$ da como número más grande a $m = AABBCCC$.

  De las opciones, $m = BBCCCAA$ es el que no se presenta en los tres casos posibles.

4. La cantidad de números impares de 4 dígitos, múltiplos de 5 que son cuadrados perfectos y no divisibles por 9 es

   (a) 3

   (b) 4

   (c) 5

   (d) 6

- Opción correcta: (c)
- Solución:

  Como el número es impar y múltiplo de 5, necesariamente termina en 5, pero los cuadrados perfectos de 4 dígitos van de $32^2 = 1024$ a 99^2 ya que $100^2 = 10000$, ahora bien debe terminar en 5, pero además no debe ser divisibles entre 3, por tanto debe ser 35^2 , 55^2 , 65^2, 85^2 y 95^2. Por lo tanto son 5.

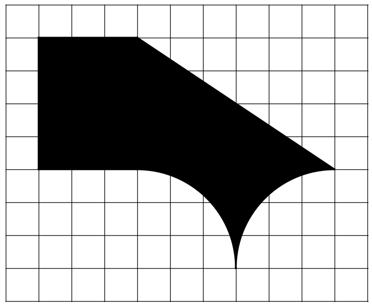
5. En la figura adjunta, cada uno de los cuadrados más pequeños tiene área igual a 1 cm^2. Si la figura sombreada está creada por cuatro segmentos y dos trazos curvos que corresponden cada uno a la cuarta parte de una circunferencia, y todos los vértices de la figura corresponden a vértices de la cuadrícula, entonces el área de la región sombreada, en cm^2, corresponde a

   (a) $42 - \dfrac{9\pi}{2}$

   (b) $42 - 9\pi$

   (c) $42 - \dfrac{9\pi}{4}$

   (d) $42 - 3\pi$



- Opción correcta: (a)
- Solución:

  Para el área de la región sobreada, se separará en el estudio del área de tres regiones.

  El área está dada por la suma de las áreas de: 1) el rectángulo 3×4, 2) el triángulo rectángulo de catetos 6 y 4, y 3) el rectángulo 6×3 menos las regiones asociadas con círculos de radio igual a 3.

  1) área es $4 \cdot 3 = 12$

  2) área es $\dfrac{6 \cdot 4}{2} = 12$

  3) área es $6 \cdot 3 - \dfrac{\pi \cdot 3^2}{2} = 18 - \dfrac{9\pi}{2}$

  Luego, el área de la región sombreada es $12 + 12 + 18 - \dfrac{9\pi}{2} = 42 - \dfrac{9\pi}{2}$

6. La cantidad de números de 5 dígitos de la forma $3a51b$ divisibles por 12 corresponde a

   (a) 6

   (b) 7

   (c) 8

   (d) 9

- Opción correcta: (b)
- Solución: Para que un número sea divisible por 12, debe ser divisible por 3 y por 4. Utilizando divisibilidad por 4, se debe cumplir que $1b$ sea divisible por 4, por lo tanto b solo puede tomar el valor de 2 y 6.

  - Si $b = 2$
    El número es de la forma $3a512$, el cual debe ser divisible por 3, es decir, $3 + a + 5 + 1 + 2 = 11 + a = 3k$, $k \in \mathbb{Z}$, por cual a puede asumir el valor de 1, 4 y 7. De esta forma los números que cumplen la condición son 31512, 34512 y 37512.

- Si $b = 6$
  El número es de la forma $3a516$, el cual debe ser divisible por 3, es decir, $3+a+5+1+6 = 15+a = 3k$, $k \in \mathbb{Z}$, por cual a puede asumir el valor de 0, 3, 6 y 9. De esta forma los números que cumplen la condición son 30516, 33516, 36516 y 39516.

7. La cantidad de números positivos que son divisibles por 1 001, que tienen exactamente 24 divisores y exactamente tres de esos divisores son primos es

   (a) 6

   (b) 7

   (c) 8

   (d) 9

- Opción correcta: (d)

- Solución:
  El o los números que estamos buscando, tienen exactamente tres divisores primos y como es divisible por $1001 = 7 \cdot 11 \cdot 13$, entonces esos tres primos son $7, 11$ y 13.
  Así que el número que estamos buscando esta compuesta por potencias de 7, 11 y 13.
  Como tienen en total 24 divisores, entonces el exponente de 7 más 1, el exponente de 11 más 1 y el exponente de 13 más 1 multiplicados es 24.
  Descomponiendo 24 en tres factores tenemos $24 = 6 \cdot 2 \cdot 2$ o $24 = 3 \cdot 4 \cdot 2$
  Así los exponentes pueden ser $5, 1$ y 1 o bien $2, 3$ y 1
  Combinando esos exponentes con las bases de potencia $7, 11$ y 13 se forman los siguientes números
  $7^5 \cdot 11^1 \cdot 13^1$
  $7^1 \cdot 11^5 \cdot 13^1$
  $7^1 \cdot 11^1 \cdot 13^5$
  $7^1 \cdot 11^2 \cdot 13^3$
  $7^3 \cdot 11^1 \cdot 13^2$
  $7^2 \cdot 11^3 \cdot 13^1$
  $7^1 \cdot 11^3 \cdot 13^2$
  $7^2 \cdot 11^1 \cdot 13^3$
  $7^3 \cdot 11^2 \cdot 13^5$
  Por tanto son 9 números que cumplen con las condiciones dadas.

8. En un triángulo rectángulo cuyos catetos miden 8 cm y 24 cm se inscribe un cuadrado, de forma tal que uno de sus ángulos coincide con el ángulo recto del triángulo y uno de los vértices del cuadrado está en la hipotenusa del triángulo. El perímetro del cuadrado, en centímetros, corresponde a

   (a) 12

   (b) 24

   (c) 30

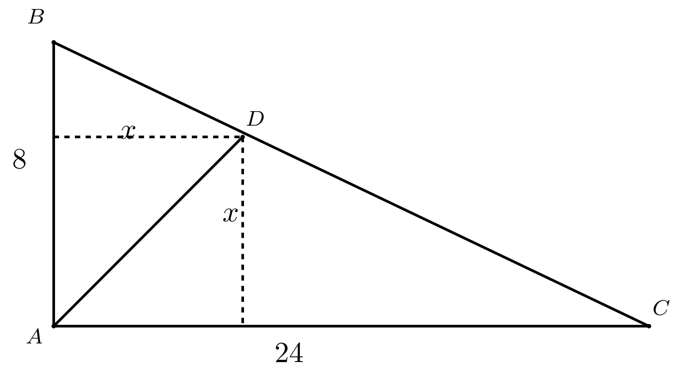
   (d) 95

- Opción correcta: (b)

- Solución:

  Como el triángulo dado es triángulo rectángulo, entonces el área es $\dfrac{8 \cdot 24}{2} = 96 \text{ cm}^2$

  Se traza una diagonal en el cuadrado, que va desde el ángulo recto que coincide con el triángulo rectángulo hasta la hipotenusa del triángulo rectángulo. La diagonal que se traza en el cuadrado, divide al triángulo rectángulo en dos triángulos. Sea x la medida de un lado del cuadrado.



  En $\triangle ABD$ la base es 8 cm y la altura es x, por lo que su área es $\dfrac{8 \cdot x}{2} = 4x\, cm^2$. En $\triangle ADC$ la base es 24 cm y la altura es x, por lo que su área es $\dfrac{24 \cdot x}{2} = 12x\, cm^2$. Como la suma de las áreas de ambos triángulos es igual al área del $\triangle ABC$, entonces:

$$4x + 12x = 96 \Rightarrow 16x = 96 \Rightarrow x = 6\,\text{cm}$$

  Por lo tanto, el perímetro del cuadrado es $6 \cdot 4 = 24$ cm.

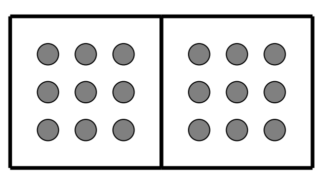
9. Emma tiene un dominó con fichas que van desde el doble 0 hasta el doble 9. La cantidad de puntos que hay en todas las fichas es

   (a) 505

   (b) 495

   (c) 450

   (d) 405



- Opción correcta: (b)

- Solución: Observe que cada valor k desde 0 hasta 9, aparece 11 veces en total: 10 veces en las fichas desde $(0, k)$ hasta $(9, k)$ y una vez adicional en la ficha doble (k, k). Entonces, la cantidad total de puntos está dada por:

$$11 \cdot 1 + 11 \cdot 2 + \ldots + 11 \cdot 9 = 11 \cdot (1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9) = 11 \cdot \frac{9 \cdot 10}{2} = 11 \cdot 45 = 495$$

10. Si se eligen al azar dos números de teléfono celular, y se toma el último dígito de cada uno, la probabilidad de que su suma sea 11 es
    (a) 0,08

    (b) 0,1

    (c) 0,5

    (d) 0,8

- Opción correcta: (a)
- Solución:
  En este caso el espacio muestral de este experimento está formado por los cien sucesos elementales: $(0,0)$, $(0,1)$, $(0,2)$, $(0,3)$, $(0,4)$, $(0,5)$, $(0,6)$, $(0,7)$, $(0,8)$, $(0,9)$, $(1,0)$, $(1,1)$, ..., $(9,8)$, $(9,9)$. Donde la primera componente corresponde al último dígito del primer número telefónico y la segunda componente al último dígito del segundo número.

  Y los casos favorables, que su suma sea 11, son: (2,9), $(3,8)$, $(4,7)$, $(5,6)$, $(6,5)$, $(7,4)$, $(8,3)$ y $(9,2)$.

  Por lo tanto, la probalidad está dada por $P = \dfrac{8}{100} = 0{,}08$

11. En una reunión de la olimpiada nacional de *Trompos* hay 25 jóvenes formando una fila; de ellos unos dicen la verdad y otros mienten. Cada uno de ellos, excepto el primero de la fila, afirma que el joven que tiene adelante es un mentiroso. El primero de la fila afirma que todos los que están detrás suyo son mentirosos. La cantidad de mentirosos que hay en la fila es
    (a) 1

    (b) 12

    (c) 13

    (d) 24

- Opción correcta: (c)
- Solución:
  Si el primero dijera la verdad, el segundo sería mentiroso, y así el tercero también diría la verdad, lo cual no es posible.

  Si el primero es mentiroso, el segundo dice la verdad, el tercero es mentiroso, y así sucesivamente. De esta forma los que están en posición par dicen la verdad y los que ocupan posición impar son mentirosos. Hay 13 mentirosos en la fila.

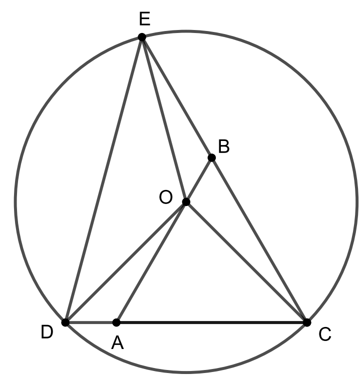
12. En la figura, O es el centro del círculo y pertenece al $\overline{AB}$, el $\triangle ABC$ es equilátero, $\overline{DO} \perp \overline{OC}$ y $E - B - C$. Entonces, la medida del $\angle EOA$ corresponde a

    (a) $125°$

    (b) $130°$

    (c) $135°$

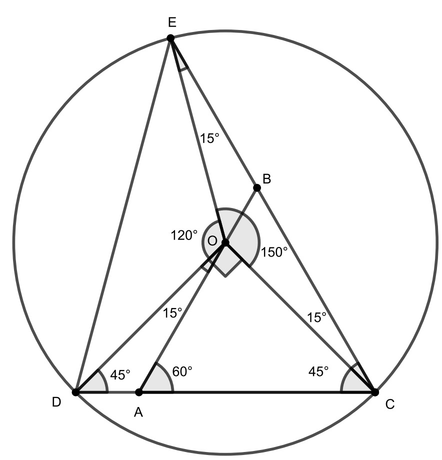
    (d) $140°$



- Opción correcta: (c)
- Solución:

  Como el $\triangle DOC$ es isósceles y rectángulo, su ángulos miden $90°$, $45°$ y $45°$ y como el $\triangle ABC$ es equilátero sus ángulos miden $60°$, por lo tanto $m\angle OCE = 15°$ (note que $60° - 45° = 15°$), pero $\triangle OEC$ es isósceles entonces $m\angle OEC = 15°$ y $m\angle EOC = 150°$, lo que significa que $m\angle DOE = 120°$, pues $m\angle EOC + m\angle DOC + m\angle DOE = 150° + 90° + m\angle DOE = 360°$.

  Por otra parte el $\angle OAC$ es un ángulo externo del $\triangle DAO$, por lo tanto $m\angle DOA = 15°$. Finalmente $m\angle EOA = 135°$.



II Parte: Desarrollo **Valor 14 puntos, 7 pts c/u**

Instrucciones: Los siguientes ejercicios deben ser resueltos enhojas adicionales. **Debe responder cada pregunta en hojas separadas**. Conteste en forma ordenada, completa y clara. Se califica procedimientos y respuesta.

1. Carlos dibuja las siguientes figuras geométricas en una pizarra: 2018 veces un círculo, 2019 veces un triángulo y 2020 veces un cuadrado. A continuación efectúa la siguiente operación: puede escoger dos figuras geométricas diferentes, borrarlas, y añadir una más de la tercera figura (Por ejemplo: Si borra $\bigcirc$ y $\square$, añade un $\triangle$). Repite este proceso hasta que quede solo una figura geométrica en la pizarra. ¿Qué figuras geométricas pueden quedar al final?

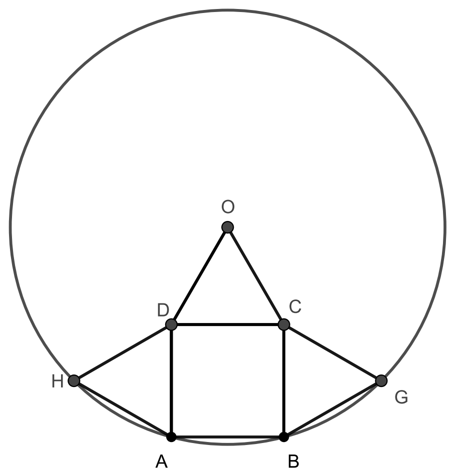
   Solución:

   En cada operación está cambiando la cantidad de figuras geométricas de cada tipo en la pizarra por 1, ya sea restando 1 al borrar dos figuras diferentes o sumando 1 al añadir una nueva figura. En cada operación, la paridad de las cantidades de las figuras geométricas $\bigcirc, \triangle$ y $\square$ se alternan.

   Por otro lado, en cada paso, la cantidad total de las figuras geométricas va a disminuir en 1, pues se restan dos y a la vez se suma una figura. Se comienza $2018 + 2019 + 2020 = 6057$ figuras geométricas y se realiza el proceso hasta que solo quede una figura geométrica, necesariamente hay que realizar 6056 pasos.

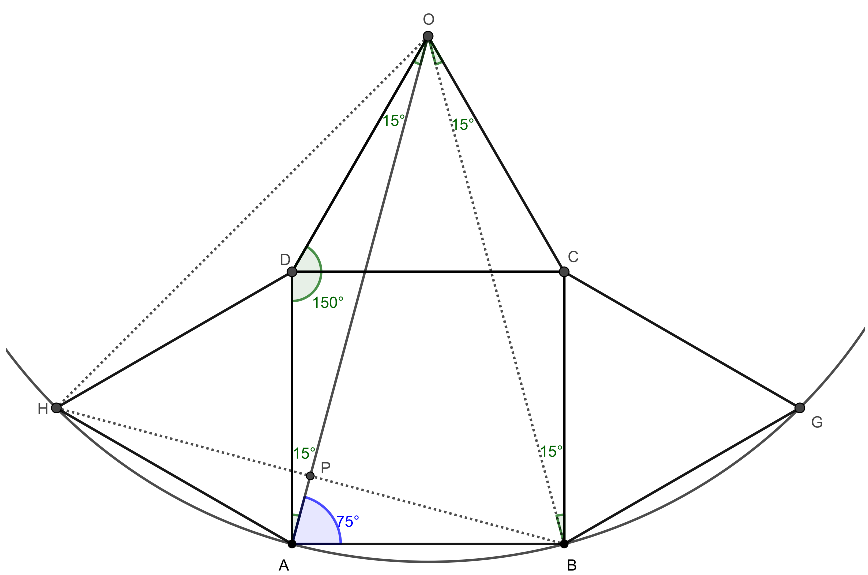
   Se puede observar que la cantidad de figuras geométricas $\bigcirc, \triangle$ y $\square$ son respectivamente par, impar, par. Al realizar el primer cambio se vuelven impar, par, impar; luego par, impar, par; luego impar, par, impar y así sucesivamente. Al realizar los 6056 pasos, la paridad es la siguiente: par, impar, par. Es decir; las cantidades de las figuras geométricas son repespectivamente: 0,1,0 y por lo tanto, la figura geométrica que queda al final es triángulo.

2. Considere en el círculo de centro O, el cuadrado $\square ABCD$ y los triángulos equiláteros $\triangle ADH$, $\triangle DCO$ y $\triangle BGC$ como se muestra en la figura.



Si P es el punto de intersección de los segmentos $\overline{HB}$ y $\overline{AO}$, determine la medida de cada uno de los ángulos del $\triangle ABP$.

Solución



Como el $\triangle ODC$ es equilátero, entonces $m\angle CDO = 60°$ y por tanto la $m\angle ADO = 60° + 90° = 150°$. Por otra parte el $\triangle ADO$ es isósceles ya que $AD = DO$, por lo tanto la $m\angle DAO = m\angle DOA = 15°$, con lo cual se tiene que la $m\angle PAB = 90° - 15° = 75°$. De la misma manera la $m\angle CBO = m\angle COB = 15°$.

Note que $m\angle HDO = 360° - 90° - 60° - 60° = 150°$ y como $\triangle HDO$ es isósceles ya que $HD = DO$ entonces $m\angle HOD = 15°$, con lo anterior $m\angle HOB = 60°$ y como $\triangle HOB$ es isósceles (equilátero) ya que $HO = OB$ (ambos radios), con lo cual $m\angle OBH = 60°$ y $m\angle PBA = 90° - 15° - 60° = 15°$. Finalmente $m\angle APB = 90°$.