XXX Olimpiada Costarricense de Matemáticas

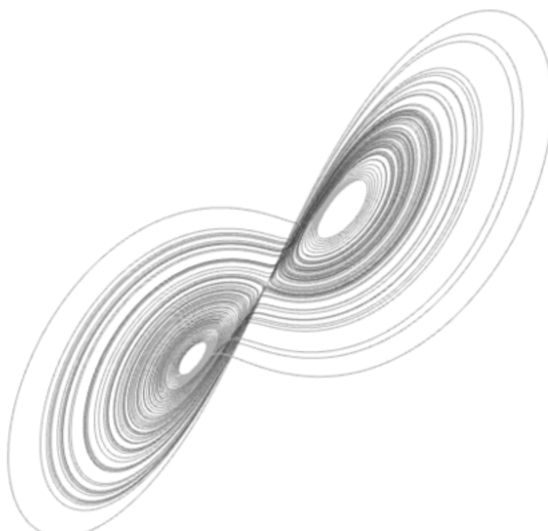
MEP–UNA–UCR–MICITT–UNED–ITCR

OLIMPIADAS COSTARRICENSES DE MATEMÁTICAS

OLCOMA

EXAMEN

II Eliminatoria



Nivel II

$(8^\circ - 9^\circ)$

2018

Ministerio de Educación Pública

UNA UNIVERSIDAD NACIONAL COSTA RICA

micitt

UNED

TEC Tecnológico de Costa Rica

Estimado estudiante:

La Comisión Organizadora de las Olimpiadas Costarricenses de Matemáticas le saluda y felicita por haber clasificado a la segunda eliminatoria nacional de estas justas académicas. La prueba consta de dos partes: una primera parte de 12 preguntas de selección única, ponderadas con dos puntos cada respuesta correcta, y una segunda parte con tres preguntas de desarrollo, con un valor de siete puntos cada solución correcta.

Los resultados de esta eliminatoria se publicarán a partir del viernes 5 de octubre, en la siguiente dirección electrónica:

www.olcoma.com

INDICACIONES GENERALES

- Debe trabajar en forma individual.
- Las respuestas a las preguntas que se le formulan, deben ser consignadas ÚNICAMENTE en las hojas de respuestas que se le han entregado.
- Los dibujos que aparecen en la prueba no están hechos a escala.
- El formulario de preguntas es suyo, por lo que puede realizar en él todas las anotaciones, cálculos o dibujos que le sean necesarios para resolver satisfactoriamente la prueba.
- Los únicos instrumentos cuyo uso se permite son los necesarios para escribir y dibujar. Se prohíbe el uso de libros, libretas de notas, tablas y calculadora.
- El examen tiene una duración máxima de tres horas.
- Escriba claramente los datos que se le solicitan en las hojas de respuestas.

SIMBOLOGÍA

$\overline{AB}$	segmento de extremos A y B	$\angle ABC \cong \angle DEF$	congruencia de ángulos
AB	medida de $\overline{AB}$	$\triangle ABC \cong \triangle DEF$	congruencia de triángulos
$\overrightarrow{AB}$	rayo de extremo A y que contiene a B	$ABC \leftrightarrow DEF$	correspondencia respectiva entre puntos
$\overleftrightarrow{AB}$	recta que contiene los puntos A y B	$\triangle ABC \sim \triangle DEF$	semejanza de triángulos
$\angle ABC$	ángulo de rayos $\overrightarrow{BA}$ y $\overrightarrow{BC}$	$\overline{AB} \cong \overline{CD}$	congruencia de segmentos
$m\angle ABC$	medida de $\angle ABC$	$\widehat{AB}$	arco de extremos A y B
$\triangle ABC$	triángulo de vértices A, B, C	$m\widehat{AB}$	medida de $\widehat{AB}$
$\square ABCD$	cuadrilátero de vértices A, B, C, D	(ABC)	área de ΔABC
$\parallel$	paralelismo	$(ABCD)$	área de $\square ABCD$
$\perp$	perpendicularidad	$P-Q-R$	P, Q, R puntos colineales, con Q entre los puntos P y R

I Parte: Selección única **Valor 24 puntos, 2 pts c/u**

1. Considere la ecuación $mx^2 + (2m-3)\,x + m - 2 = 0$, con m constante real. Si la ecuación posee solución única, entonces la solución corresponde a

   (a) -3

   (b) $\dfrac{-1}{3}$

   (c) $\dfrac{9}{4}$

   (d) $\dfrac{-9}{4}$

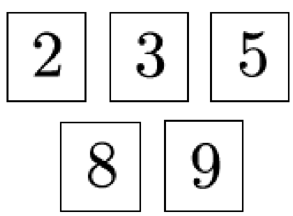
2. Hay 10 tarjetas numeradas del 1 al 10. En la figura adjunta se muestran cinco de las tarjetas. Las restantes se quieren emparejar con las que se muestran en dicha figura, de manera que las sumas de las parejas sean 9, 10, 11, 12 y 13 (sin repetir). La cantidad de maneras de realizar las parejas corresponde a

   (a) 0

   (b) 1

   (c) 2

   (d) 3



3. Considere el sistema de ecuaciones $\begin{cases} -x^2 + y = -1 \\ x^2 - \alpha y = \alpha \end{cases}$, donde x y y son las incógnitas y α es un parámetro. Para que el sistema posea solución única, debe cumplirse que

   (a) $\alpha \in \mathbb{R}$

   (b) $\alpha \in \mathbb{R} - \{1\}$

   (c) $\alpha \in [1, +\infty[$

   (d) $\alpha \in \,]-\infty, 1]$

4. Sea el $\triangle ABC$ tal que $AB = AC$, y sean D y E puntos en $\overline{BC}$ y $\overline{AC}$, respectivamente, tales que $AD = AE$. Si $m\angle BAD = 30°$, entonces $m\angle EDC$ corresponde a

   (a) $10°$

   (b) $15°$

   (c) $20°$

   (d) $25°$

5. Se escriben en una pizarra los números 2^{-1}, 3^{-1}, 4^{-1}, $\cdots$, 2017^{-1}, 2018^{-1}. A continuación, se escogen dos de esos números, llamémoslos a y b, se borran esos dos números seleccionados y se agrega en la lista restante de la pizarra el resultado de la operación $(a-1)(b-1)+1$. Si se continúa con este proceso hasta que se obtenga un único número, entonces ese número resultante corresponde a

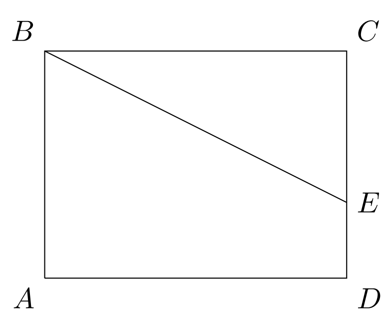
   (a) $\dfrac{2018^2-1}{2018}$

   (b) $\dfrac{2019}{2018}$

   (c) $\dfrac{2017}{2018}$

   (d) $\dfrac{1}{2018}$

6. En la figura adjunta, el $\square ABCD$ es un rectángulo, E es un punto sobre $\overline{CD}$, tal que $CE = 2DE$. Si el área del $\triangle BCE$ es 10 cm^2, entonces el área, en cm^2, del $\square ABCD$ corresponde a



   (a) 25

   (b) 30

   (c) 35

   (d) 40

7. Luz y María compiten en resolver problemas. A cada una se le entrega la misma lista de 100 problemas. La primera en resolver cualquiera de los problemas recibe cuatro puntos, mientras que la segunda en resolverlo recibe un punto. Si se resolvieron exactamente 60 problemas y juntas obtuvieron 296 puntos en total, entonces la cantidad de problemas resueltos tanto por Luz como por María corresponde a

   (a) 53

   (b) 54

   (c) 55

   (d) 56

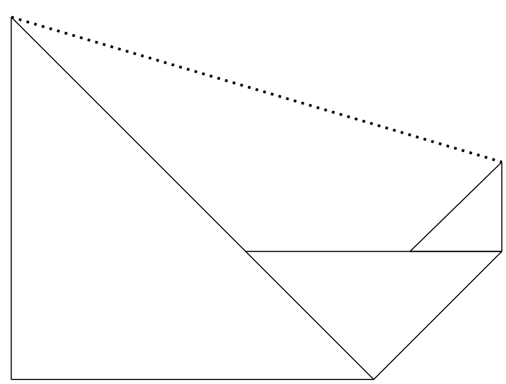
8. En la figura adjunta se presentan tres triángulos rectángulos isósceles, donde la hipotenusa del triángulo mediano mide la mitad de la medida de la hipotenusa del grande, y la del pequeño la mitad de la medida de la hipotenusa del mediano. Si un cateto del triángulo pequeño mide 1 cm, entonces la longitud, en centímetros, de la línea punteada corresponde a

   (a) $\sqrt{29+2\sqrt{2}}$

   (b) $\sqrt{25+2\sqrt{2}}$

   (c) $\sqrt{29+\sqrt{2}}$

   (d) $\sqrt{25+\sqrt{2}}$



9. La cantidad de parejas de números enteros (a, b) que existen, tales que $2a + b$ es una solución de la ecuación $x^2+ax+b = 0$, siendo x la variable, corresponde a

   (a) 6

   (b) 8

   (c) 12

   (d) 16

10. Se tienen tres números enteros consecutivos a, b y c, tales que $a < b < c$ y dos de ellos son impares. Dado $R = b^2 - c^2 + a^2$, considere las siguientes afirmaciones:

    I) Si b es divisible por 3, R es divisible por 12.

    II) Si b es divisible por 4, R es divisible por 32.

    De las afirmaciones anteriores, son siempre verdaderas

    (a) Solamente la I

    (b) Solamente la II

    (c) Ambas

    (d) Ninguna

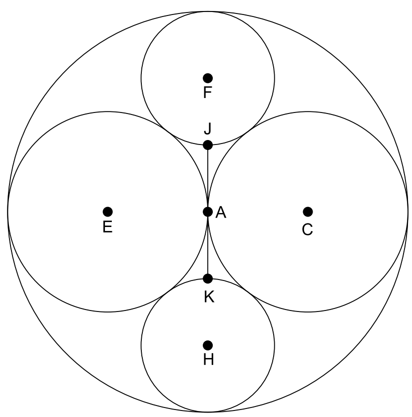
11. En un círculo de centro A y radio 6, se dibujan cuatro círculos de centros E, C, F y H, respectivamente, que son tangentes entre sí y tangentes al círculo de centro A, tal y como se muestra en la figura adjunta. Si los puntos H, K, A, J y F son colineales, entonces la medida de $\overline{JK}$ corresponde a

    (a) 2

    (b) 3

    (c) 4

    (d) 6



12. Considere la secuencia definida como $a_1 = 3$ y $a_{n+1} = a_n(1 + a_n)$, para todo entero $n > 1$. Las últimas dos cifras de a_{2018} corresponden a

    (a) 12

    (b) 56

    (c) 58

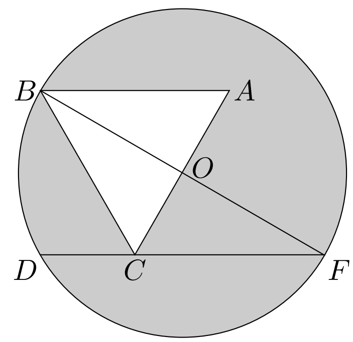
    (d) 92

II Parte: Desarrollo **Valor 21 puntos, 7 pts c/u**

Instrucciones: Los siguientes ejercicios deben ser resueltos en las hojas adicionales que se le entregaron. Conteste en forma ordenada, completa y clara. Se califica procedimientos y respuesta.

1. Considere la figura adjunta, en la que el área del $\triangle ABC = 25\sqrt{3}$ cm^2.

   Si se tiene que $\overline{DF} \parallel \overline{AB}$, $B - O - F$, $A - O - C$, $D - C - F$, $\overline{BF}$ es diámetro del círculo, $OA = CO = \dfrac{AB}{2}$ y $\overline{BF}$ biseca al $\angle ABC$, determine el área de la región sombreada.



2. Se tiene un cubo de tamaño $10 \times 10 \times 10$ donde cada cara está partida en 10×10 cuadrados de mismo tamaño (cada uno de tamaño 1×1). Su superficie es cubierta por 300 tiras de tamaño 2×1, sin que ninguno de los cuadrados 1×1 sea cubierto por dos o más tiras. Se dice que una tira está doblada si no está en solo una cara. Pruebe que el número de tiras dobladas es par.

3. Sean $a, b, c \in \mathbb{R}$. Considere los polinomios

$$p(x) = x^3 + ax^2 + x + 10$$

   y

$$q(x) = x^4 + 7x^3 + bx^2 + 9x + c$$

   Se sabe que $p(x)$ tiene tres raíces distintas y que cada una de las raíces de $p(x)$ es también raíz de $q(x)$. Determine los posibles valores de a, b y c.