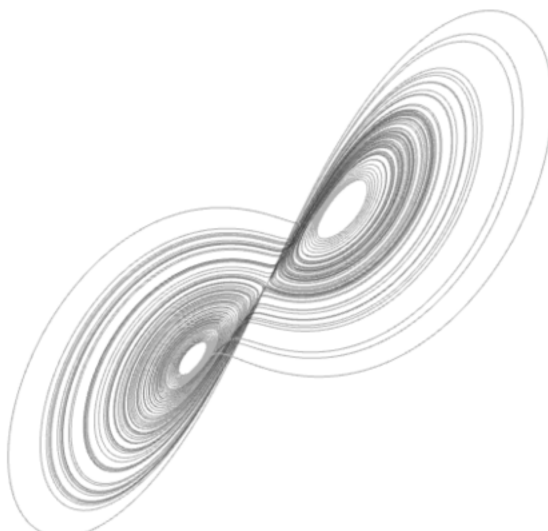
XXX Olimpiada Costarricense de Matemáticas

MEP–UNA–UCR–MICITT–UNED–ITCR

Solución

II Eliminatoria



Nivel II

(8° – 9°)

2018

Estimado estudiante:

La Comisión Organizadora de las Olimpiadas Costarricenses de Matemáticas le saluda y felicita por haber clasificado a la segunda eliminatoria nacional de estas justas académicas. La prueba consta de dos partes: una primera parte de 12 preguntas de selección única, ponderadas con dos puntos cada respuesta correcta, y una segunda parte con tres preguntas de desarrollo, con un valor de siete puntos cada solución correcta.

Los resultados de esta eliminatoria se publicarán a partir del viernes 5 de octubre, en la siguiente dirección electrónica:

www.olcoma.com

INDICACIONES GENERALES

- Debe trabajar en forma individual.
- Las respuestas a las preguntas que se le formulan, deben ser consignadas ÚNICAMENTE en las hojas de respuestas que se le han entregado.
- Los dibujos que aparecen en la prueba no están hechos a escala.
- El formulario de preguntas es suyo, por lo que puede realizar en él todas las anotaciones, cálculos o dibujos que le sean necesarios para resolver satisfactoriamente la prueba.
- Los únicos instrumentos cuyo uso se permite son los necesarios para escribir y dibujar. Se prohíbe el uso de libros, libretas de notas, tablas y calculadora.
- El examen tiene una duración máxima de tres horas.
- Escriba claramente los datos que se le solicitan en las hojas de respuestas.

SIMBOLOGÍA

$\overline{AB}$	segmento de extremos A y B	$\angle ABC \cong \angle DEF$	congruencia de ángulos
AB	medida de $\overline{AB}$	$\triangle ABC \cong \triangle DEF$	congruencia de triángulos
$\overrightarrow{AB}$	rayo de extremo A y que contiene a B	$ABC \leftrightarrow DEF$	correspondencia respectiva entre puntos
$\overleftrightarrow{AB}$	recta que contiene los puntos A y B	$\triangle ABC \sim \triangle DEF$	semejanza de triángulos
$\angle ABC$	ángulo de rayos $\overrightarrow{BA}$ y $\overrightarrow{BC}$	$\overline{AB} \cong \overline{CD}$	congruencia de segmentos
$m\angle ABC$	medida de $\angle ABC$	$\widehat{AB}$	arco de extremos A y B
$\triangle ABC$	triángulo de vértices A, B, C	$m\widehat{AB}$	medida de $\widehat{AB}$
$\square ABCD$	cuadrilátero de vértices A, B, C, D	(ABC)	área de ΔABC
$\parallel$	paralelismo	$(ABCD)$	área de $\square ABCD$
$\perp$	perpendicularidad	$P-Q-R$	P, Q, R puntos colineales, con Q entre los puntos P y R

I Parte: Selección única **Valor 24 puntos, 2 pts c/u**

1. Considere la ecuación $mx^2 + (2m - 3)\,x + m - 2 = 0$, con m constante real. Si la ecuación posee solución única, entonces la solución corresponde a

   (a) -3

   (b) $\dfrac{-1}{3}$

   (c) $\dfrac{9}{4}$

   (d) $\dfrac{-9}{4}$

- Opción correcta: (b)
- Solución:

$$\begin{aligned} \triangle &= (2m-3)^2 - 4 \cdot m \cdot (m-2) \\ &= 4m^2 - 12m + 9 - 4m^2 + 8m \\ &= -4m + 9 \end{aligned}$$

Luego,

$$\delta = 0 \Rightarrow m = \frac{9}{4}$$

Así, la ecuación es de la forma $\dfrac{9}{4}x^2 + \dfrac{3}{2}x + \dfrac{1}{4} = 0$ y la solución corresponde a $x = \dfrac{-1}{3}$

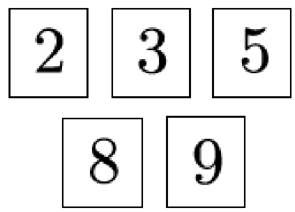
2. Hay 10 tarjetas numeradas del 1 al 10. En la figura adjunta se muestran cinco de las tarjetas. Las restantes se quieren emparejar con las que se muestran en dicha figura, de manera que las sumas de las parejas sean 9, 10, 11, 12 y 13 (sin repetir). La cantidad de maneras de realizar las parejas corresponde a

   (a) 0

   (b) 1

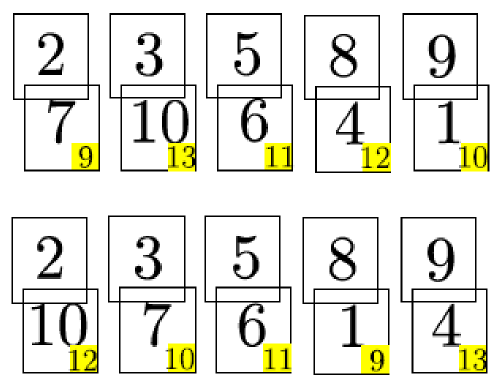
   (c) 2

   (d) 3



- Opción correcta: (c)

- Solución:
  Como las tarjetas 2 y 9 ya están ocupadas, la suma que cada una forme con su pareja no puede ser 11; lo mismo ocurre con la 3 y la 8, por lo que concluimos que la tarjeta que se empareja con la 5 es la 6.
  Entonces la suma 9 solo se puede lograr emparejando 7 con 2 o 1 con 8.
  En el primer caso, 10 debe aparearse con 3, 4 con 8 y 1 con 9. En el segundo caso, 10 debe emparejarse con 2, 7 con 3 y 4 con 9. Por lo que solo hay dos opciones posibles para emparejar las tarjetas.



3. Considere el sistema de ecuaciones $\begin{cases} -x^2 + y = -1 \\ x^2 - \alpha y = \alpha \end{cases}$, donde x y y son las incógnitas y α es un parámetro. Para que el sistema posea solución única, debe cumplirse que

   (a) $\alpha \in \mathbb{R}$

   (b) $\alpha \in \mathbb{R} - \{1\}$

   (c) $\alpha \in [1, +\infty[$

   (d) $\alpha \in]-\infty, 1]$

- Opción correcta: (b)
- Solución:

  Al sumar miembro a miembro las dos ecuaciones, se obtiene $(1-\alpha)\, y = \alpha - 1 \Rightarrow y = \dfrac{\alpha - 1}{1 - \alpha} = -1$, siempre que $\alpha \neq 1$ (con $\alpha = 1$ el sistema posee infinito número de soluciones).

  Ahora, con $y = -1$, al sustituir en la primera ecuación después de despejar x, se obtiene $x^2 = y + 1 \Rightarrow x^2 = -1 + 1 = 0 \Rightarrow x = 0$.

  Por lo tanto, si $\alpha \neq 1$, el sistema posee la única solución $(0, -1)$.

4. Sea el $\triangle ABC$ tal que $AB = AC$, y sean D y E puntos en $\overline{BC}$ y $\overline{AC}$, respectivamente, tales que $AD = AE$. Si $m\angle BAD = 30°$, entonces $m\angle EDC$ corresponde a

   (a) $10°$

   (b) $15°$

   (c) $20°$

   (d) $25°$

- Opción correcta: (b)
- Solución:

  Sean $x = m\angle DAC$, $a = m\angle ABC = m\angle ACB$ ($\triangle ABC$ isósceles con $AB = AC$), $b = m\angle ADE = m\angle AED$ ($\triangle ADE$ isósceles con $AD = AE$).

  Por suma de medidas de ángulos internos en el $\triangle ABC$ se tiene que $2a + x + 30° = 180°$

  Por suma de medidas de ángulos internos en el $\triangle ADE$ se tiene que $2b + x = 180°$

  Entonces igualando tenemos:

  $$2a + x + 30° = 2b + x \Rightarrow 30° = 2b - 2a \Rightarrow 15° = b - a$$

  Por teorema de la medida del ángulo externo en el $\triangle DEC$, tenemos:

  $$b = a + m\angle EDC \Rightarrow b - a = m\angle EDC \Rightarrow 15° = m\angle EDC$$

5. Se escriben en una pizarra los números 2^{-1}, 3^{-1}, 4^{-1}, $\cdots$, 2017^{-1}, 2018^{-1}. A continuación, se escogen dos de esos números, llamémoslos a y b, se borran esos dos números seleccionados y se agrega en la lista restante de la pizarra el resultado de la operación $(a-1)(b-1)+1$. Si se continúa con este proceso hasta que se obtenga un único número, entonces ese número resultante corresponde a

   (a) $\dfrac{2018^2-1}{2018}$

   (b) $\dfrac{2019}{2018}$

   (c) $\dfrac{2017}{2018}$

   (d) $\dfrac{1}{2018}$

- Opción correcta: (c)
- Solución:

  Como al escoger a y b se escribe $(a-1)(b-1)+1$ y si en una operación posterior se elige este número con algún otro número c, se deberá escribir el número

$$(((a-1)(b-1)+1)-1)(c-1)+1=(a-1)(b-1)(c-1)+1$$

  Por lo tanto, al final el número que queda será el producto de los números que están en la pizarra (que son 2017 números) disminuido en 1, más una unidad.

  Es decir

$$\left(\frac{1}{2}-1\right)\left(\frac{1}{3}-1\right)\left(\frac{1}{4}-1\right)\cdots\left(\frac{1}{2018}-1\right)+1$$

$$=\left(\frac{-1}{2}\right)\left(\frac{-2}{3}\right)\left(\frac{-3}{4}\right)\cdots\left(\frac{-2017}{2018}\right)+1$$

$$=(-1)^{2017}\,\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{3}{4}\cdots\frac{2017}{2018}+1$$

$$=\frac{-1}{2018}+1=\frac{2017}{2018}$$

6.

7.

   (a) 2520

   (b) 5040

   (c) 20 160

   (d) 40 320

- Opción correcta: (a)
- Solución:

  Numeremos las patas del gato del 1 al 4, y sean m_1, m_2, m_3, m_4 las medias correspondientes a cada pata, y z_1, z_2, z_3, z_4 los zapatos correspondientes a cada pata.

  La cantidad de formas de ponerse las medias y los zapatos serán las permutaciones de $m_1, m_2, m_3, m_4, z_1, z_2, z_3, z_4$ siempre que m_k esté antes de z_k; es decir, $\dfrac{8!}{2^4} = 2520$.

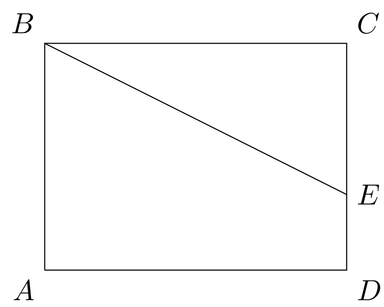
8. En la figura adjunta, el $\square ABCD$ es un rectángulo, E es un punto sobre $\overline{CD}$, tal que $CE = 2DE$. Si el área del $\triangle BCE$ es 10 cm^2, entonces el área, en cm^2, del $\square ABCD$ corresponde a

   (a) 25

   (b) 30

   (c) 35

   (d) 40



- Opción correcta: (b)

- Solución:

  Recuerde que el área de un triángulo es $\text{Área} = \dfrac{\text{base} \times \text{altura}}{2}$. Luego, se tiene que $\dfrac{CE \cdot BC}{2} = 10$.
  Ahora, considere el triángulo $\triangle BED$. Si consideramos como base $\overline{ED}$, entonces la altura es $\overline{CB}$, de la condición, $CE = 2DE \to DE = \dfrac{CE}{2}$, se obtiene que el área del $\triangle BED$ es

$$\frac{DE \cdot BC}{2} = \frac{CE/2 \cdot BC}{2} = \frac{1}{2} \cdot \frac{CE \cdot BC}{2} = \frac{1}{2} \cdot 10 = 5$$

  Finalmente, observe que $\triangle BCD \cong \triangle BAD$, luego,

$$(ABCD) = (BCD) + (BAD) = 15 + 15 = 30$$

9. Luz y María compiten en resolver problemas. A cada una se le entrega la misma lista de 100 problemas. La primera en resolver cualquiera de los problemas recibe cuatro puntos, mientras que la segunda en resolverlo recibe un punto. Si se resolvieron exactamente 60 problemas y juntas obtuvieron 296 puntos en total, entonces la cantidad de problemas resueltos tanto por Luz como por María corresponde a

   (a) 53

   (b) 54

   (c) 55

   (d) 56

- Opción correcta: (d)
- Solución:

  Sea a el número de problemas resueltos por ambas y b el número de problemas que solo resolvió una de las dos; luego $a + b = 60$ y por los puntos se tiene que $5a + 4b = 296$ (a cada problema en común se asignaban 4 puntos a la primera en resolverlo y 1 punto a la segunda; es decir, 5 puntos en total; mientras que cada problema que solo una de ellas resolvió recibía 4 puntos), de donde $a = 56$ y $b = 4$, por lo que en común resolvieron 56 problemas.

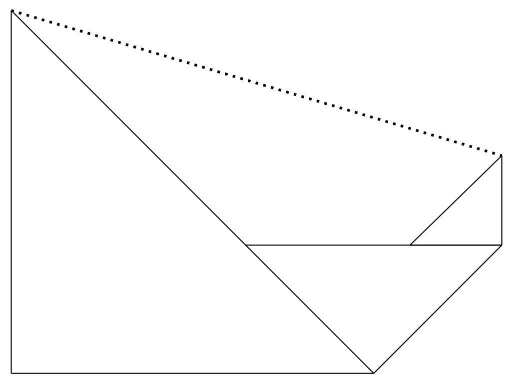
10. En la figura adjunta se presentan tres triángulos rectángulos isósceles, donde la hipotenusa del triángulo mediano mide la mitad de la medida de la hipotenusa del grande, y la del pequeño la mitad de la medida de la hipotenusa del mediano. Si un cateto del triángulo pequeño mide 1 cm, entonces la longitud, en centímetros, de la línea punteada corresponde a

(a) $\sqrt{29+2\sqrt{2}}$

(b) $\sqrt{25+2\sqrt{2}}$

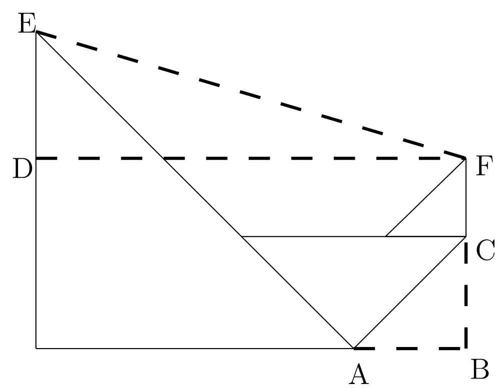
(c) $\sqrt{29+\sqrt{2}}$

(d) $\sqrt{25+\sqrt{2}}$



- Opción correcta: (a)
- Solución:

Por semejanza de triángulos, la relación entre las hipotenusas se mantiene entre los catetos, por lo que el cateto del triángulo mediano mide 2 y el del triángulo grande mide 4.



El $\triangle ABC$ es rectángulo isósceles cuya hipotenusa mide 2 cm, por lo que $AB=\sqrt{2}$; luego $DF=4+\sqrt{2}$ y $BF=1+\sqrt{2}$, por lo que $DE=4-\left(1+\sqrt{2}\right)=3-\sqrt{2}$.

Aplicando el Teorema de Pitágoras en $\triangle DEF$ se tiene que

$$EF=\sqrt{\left(3-\sqrt{2}\right)^2+\left(4+\sqrt{2}\right)^2}=\sqrt{29+2\sqrt{2}}$$

11. La cantidad de parejas de números enteros (a, b) que existen, tales que $2a + b$ es una solución de la ecuación $x^2+ax+b = 0$, siendo x la variable, corresponde a

    (a) 6

    (b) 8

    (c) 12

    (d) 16

- Opción correcta: (b)
- Solución:

  Evaluando $2a + b$ en la ecuación: $(2a + b)^2 + a\,(2a + b) + b = 0 \Rightarrow b^2 + (5a + 1)\,b + 6a^2 = 0$.

  Viendo esta como una ecuación cuadrática en b, se tiene que su discriminante Δ está dado por $\Delta = (5a + 1)^2 - 4 \cdot 6a^2 = a^2 + 10a + 1 = (a + 5)^2 - 24 = k^2$, donde $k \in \mathbb{N}$.

  Así, $(a + 5 - k)\,(a + 5 + k) = 24$, como $a + 5 - k$ y $a + 5 + k$ tienen la misma paridad, entonces las opciones que tenemos es que estas sean iguales a 2 y 12, -2 y -12, 4 y 6, -4 y -6, de donde dan 4 valores para a que son 0, 2, -10 y -12, y al cambiarlos en la ecuación en términos de b dan cada ecuación 2 valores enteros diferentes de b, de donde hay 8 pares distintos que cumplen lo requerido.

12. Se tienen tres números enteros consecutivos a, b y c, tales que $a < b < c$ y dos de ellos son impares. Dado $R = b^2 - c^2 + a^2$, considere las siguientes afirmaciones:

    I) Si b es divisible por 3, R es divisible por 12.

    II) Si b es divisible por 4, R es divisible por 32.

    De las afirmaciones anteriores, son siempre verdaderas

    (a) Solamente la I

    (b) Solamente la II

    (c) Ambas

    (d) Ninguna

- Opción correcta: (c)
- Solución:

  Ambas son verdaderas.

  Considerando $a = b - 1$ y $c = b + 1$, tenemos que $R = b^2 - (b+1)^2 + (b-1)^2 = b\,(b-4)$. Como dos de los tres números deben ser impares, es claro que b es par.

  La primara opción dice que b es divisible por 3, pero además es par, por consiguiente es múltiplo de 6 es decir $b = 6k$, con k entero.

  Por tanto, $R = b\,(b-4) = 6k\,(6k-4) = 12k\,(3k-2)$ y la opción I es verdadera.

  Por otro lado, la opción II dice que b es divisible por 4; es decir, es de la forma $b = 4k$, por consiguiente $R = b\,(b-4) = 4k\,(4k-4) = 16k\,(k-1)$.

  Pero como $k\,(k-1)$ es par entonces $k\,(k-1) = 2s$, con s entero, por tanto $R = 32s$, lo que implica que la opción II es verdadera.

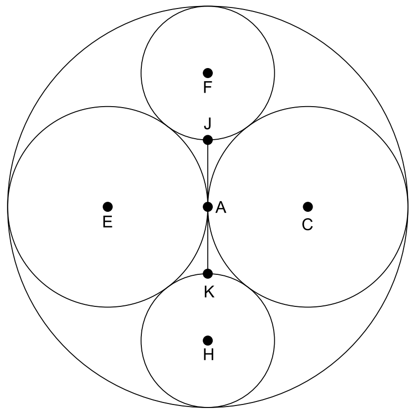
13. En un círculo de centro A y radio 6, se dibujan cuatro círculos de centros E, C, F y H, respectivamente, que son tangentes entre sí y tangentes al círculo de centro A, tal y como se muestra en la figura adjunta. Si los puntos H, K, A, J y F son colineales, entonces la medida de $\overline{JK}$ corresponde a

(a) 2

(b) 3

(c) 4

(d) 6



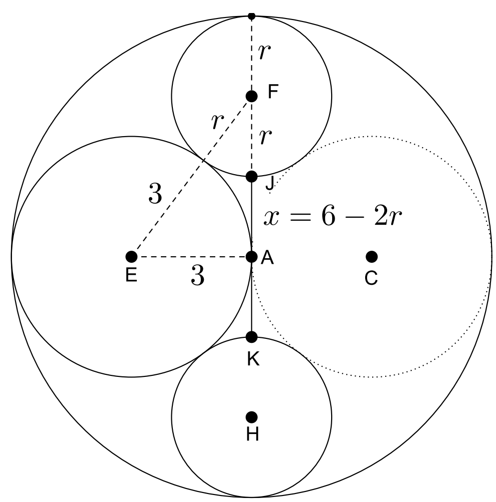
- Opción correcta: (c)
- Solución:

Sea r al radio del círculo de centro F, sea x la longitud de $\overline{JA}$.
Como el círculo mayor tiene radio 6, el círculo de centro E tiene radio 3 y, además, $x = 6 - 2r$, como se muestra en la figura.
Aplicando el Teorema de Pitágoras al $\triangle EAF$, se tiene:

$$(r+3)^2 = 3^2 + (6-r)^2$$

$$r = 2$$

Por lo tanto $x = 6 - 2r = 2$ y JK es 4.



14. Considere la secuencia definida como $a_1 = 3$ y $a_{n+1} = a_n(1 + a_n)$, para todo entero $n > 1$. Las últimas dos cifras de a_{2018} corresponden a

    (a) 12

    (b) 56

    (c) 58

    (d) 92

- Opción correcta: (d)
- Solución:

  Con $a_1 = 3$ y $a_{n+1} = a_n(1 + a_n)$, se tienen los primeros términos:

$$
\begin{aligned}
a_1 &= 3 \\
a_2 &= 3 \cdot 4 = 12 \\
a_3 &= 12 \cdot 13 = 1\mathbf{56} \\
a_4 &= 1\mathbf{56} \cdot 1\mathbf{57} = 24\,4\mathbf{92} = [\,]\,92 \\
a_5 &= 24\,4\mathbf{92} \cdot 24\,4\mathbf{93} = [\,]\,92 \cdot [\,]\,93 = [\,]\,56 \\
a_6 &= [\,]\,56 \cdot [\,]\,57 = [\,]\,92
\end{aligned}
$$

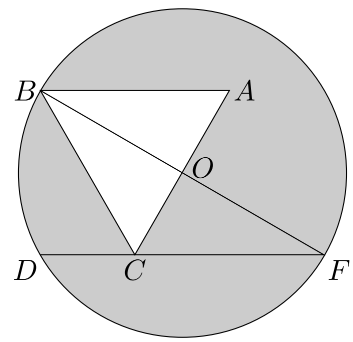
  Como 2018 es par, entonces a_{2018} termina en 92.

II Parte: Desarrollo **Valor 21 puntos, 7 pts c/u**

Instrucciones: Los siguientes ejercicios deben ser resueltos en las hojas adicionales que se le entregaron. Conteste en forma ordenada, completa y clara. Se califica procedimientos y respuesta.

1. Considere la figura adjunta, en la que el área del $\triangle ABC = 25\sqrt{3}$ cm^2.

   Si se tiene que $\overline{DF} \parallel \overline{AB}$, $B - O - F$, $A - O - C$, $D - C - F$, $\overline{BF}$ es diámetro del círculo, $OA = CO = \dfrac{AB}{2}$ y $\overline{BF}$ biseca al $\angle ABC$, determine el área de la región sombreada.



Solución

De acuerdo con la información, $\angle ABF \cong \angle BFC$ y $\angle BAC \cong \angle FCA$ por ser ángulos correspondientes entre paralelas, y $\overline{OA} \cong \overline{CO}$; así, $\triangle ABO \cong \triangle CFO$, por lo que $FO = BO = r$ es la medida del radio del círculo y $CF = AB$.

Como $\angle ABF \cong \angle CBF$ y $\angle CFB \cong \angle ABF$, se tiene que $\angle CBF \cong \angle CFB$, por lo que el $\triangle BFC$ es isósceles con $CF = CB = AB$.

Con $AB = CB$ y dado que $AB = AC$, se tiene que el $\triangle ABC$ es equilátero.

Dado que $(ABC) = \dfrac{AC^2\sqrt{3}}{4} = 25\sqrt{3} \Rightarrow AC^2 = 4 \cdot 25 \Rightarrow AC = 10 = AB$. Utilizando el Teorema de Pitágoras en el $\triangle OAB$, se tiene que $AB^2 = OA^2 + OB^2 \Rightarrow 10^2 = 5^2 + r^2 \Rightarrow r^2 = 75$. El área del círculo es $\pi \cdot r^2 = 75\pi$.

Por lo tanto, el área de la región sombreada en gris es $75\pi - 25\sqrt{3}$ cm^2.

2. Se tiene un cubo de tamaño $10 \times 10 \times 10$ donde cada cara está partida en 10×10 cuadrados de mismo tamaño (cada uno de tamaño 1×1). Su superficie es cubierta por 300 tiras de tamaño 2×1, sin que ninguno de los cuadrados 1×1 sea cubierto por dos o más tiras. Se dice que una tira está doblada si no está en solo una cara. Pruebe que el número de tiras dobladas es par.

Solución

Pinte cada casilla de blanco y negro alternadamente, y de tal forma que las casillas negras y blancas de los bordes sean del mismo color que las casillas de la otra cara con la que comparten lado; así, si una tira está doblada, está sobre dos casillas del mismo color, de lo contrario, no está doblada.

Sean x la cantidad de tiras que cubren dos casillas negras, y la cantidad de tiras que cubren dos casillas blancas, y z la cantidad de tiras que cubren una casilla blanca y una negra. Así, la cantidad de tiras dobladas es $x + y$.

Como hay 300 casillas blancas y 300 casillas negras, se tiene que $2x + z = 300$ y $2y + z = 300$, restando ambas ecuaciones se tiene que $x - y = 0 \Rightarrow x + y = 2y$, por lo que la cantidad de tiras dobladas es par.

3. Sean $a, b, c \in \mathbb{R}$. Considere los polinomios

$$p(x) = x^3 + ax^2 + x + 10$$

y

$$q(x) = x^4 + 7x^3 + bx^2 + 9x + c$$

Se sabe que $p(x)$ tiene tres raíces distintas y que cada una de las raíces de $p(x)$ es también raíz de $q(x)$. Determine los posibles valores de a, b y c.

Solución

Sea r la otra raíz de $q(x)$. Entonces se cumple que

$$\begin{aligned} q(x) &= (x-r)\,p(x) \\ &= x \cdot p(x) - r \cdot p(x) \\ &= x^4 + ax^3 + x^2 + 10x - rx^3 + rax^2 + rx + 10r \\ &= x^4 + (a-r)\,x^3 + (1-ra)\,x^2 + (10-r)\,x - 10r \end{aligned}$$

Igualando las dos expresiones para $q(x)$ se obtiene:

$$\begin{cases} 1 = 1 \\ a - r = 7 \\ 1 - ra = b \\ 10 - r = 9 \\ -10r = c \end{cases}$$

Así, $10 - r = 9 \Rightarrow r = 1$. Sustituyendo en la ecuación del término constante se obtiene que $c = -10$. Luego, $a - r = 7 \Rightarrow a - 1 = 7 \Rightarrow a = 8$. Finalmente, $b = -7$.