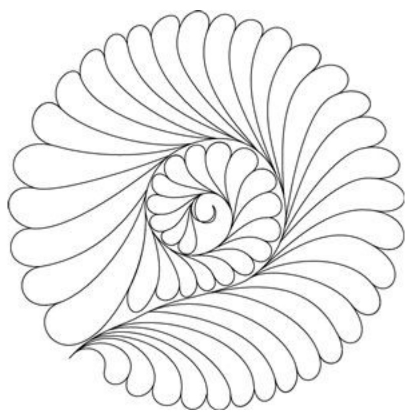
XXXI Olimpiada Costarricense de Matemáticas

MEP–UNA–UCR–MICITT–UNED–ITCR

II Eliminatoria



Nivel II

$(8^\circ - 9^\circ)$

2019

Estimado estudiante:

La Comisión Organizadora de las Olimpiadas Costarricenses de Matemáticas le saluda y felicita por haber clasificado a la segunda eliminatoria nacional de estas justas académicas. La prueba consta de dos partes: una primera parte de 10 preguntas de selección única, ponderadas con dos puntos cada respuesta correcta, y una segunda parte con dos preguntas de desarrollo, con un valor de siete puntos cada solución correcta.

Los resultados de esta eliminatoria se publicarán a partir del viernes 4 de octubre, en la siguiente dirección electrónica:

www.olcoma.com

INDICACIONES GENERALES

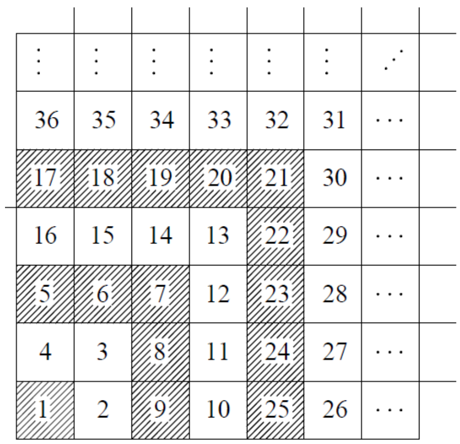
- Debe trabajar en forma individual.
- Las respuestas a las preguntas que se le formulan, deben ser consignadas ÚNICAMENTE en las hojas de respuestas que se le han entregado.
- Los dibujos que aparecen en la prueba no están hechos a escala.
- El formulario de preguntas es suyo, por lo que puede realizar en él todas las anotaciones, cálculos o dibujos que le sean necesarios para resolver satisfactoriamente la prueba.
- Los únicos instrumentos cuyo uso se permite son los necesarios para escribir y dibujar. Se prohíbe el uso de libros, libretas de notas, tablas y calculadora.
- El examen tiene una duración máxima de tres horas.
- Escriba claramente los datos que se le solicitan en las hojas de respuestas.

SIMBOLOGÍA

$\overline{AB}$	segmento de extremos A y B	$\angle ABC \cong \angle DEF$	congruencia de ángulos
AB	medida de $\overline{AB}$	$\triangle ABC \cong \triangle DEF$	congruencia de triángulos
$\overrightarrow{AB}$	rayo de extremo A y que contiene a B	$ABC \leftrightarrow DEF$	correspondencia respectiva entre puntos
$\overleftrightarrow{AB}$	recta que contiene los puntos A y B	$\triangle ABC \sim \triangle DEF$	semejanza de triángulos
$\angle ABC$	ángulo de rayos $\overrightarrow{BA}$ y $\overrightarrow{BC}$	$\overline{AB} \cong \overline{CD}$	congruencia de segmentos
$m\angle ABC$	medida de $\angle ABC$	$\widehat{AB}$	arco de extremos A y B
$\triangle ABC$	triángulo de vértices A, B, C	$m\widehat{AB}$	medida de $\widehat{AB}$
$\square ABCD$	cuadrilátero de vértices A, B, C, D	(ABC)	área de ΔABC
$\parallel$	paralelismo	$(ABCD)$	área de $\square ABCD$
$\perp$	perpendicularidad	$P - Q - R$	P, Q, R puntos colineales, con Q entre los puntos P y R

I Parte: Selección única **Valor 20 puntos, 2 pts c/u**

1. Se disponen los números naturales según la siguiente figura. Decimos que las coordenadas de un número son (n, m) si dicho número está en la fila n y columna m, por ejemplo, el número 22 tiene coordenadas $(4, 5)$, pues está en la cuarta fila y quinta columna. Las coordenadas del número 2019 en la disposición corresponden a



   (a) $(7, 45)$

   (b) $(19, 45)$

   (c) $(19, 44)$

   (d) $(83, 44)$

2. Las medidas de los lados de un triángulo rectángulo son los números positivos a, $a - b$ y $a + b$, con a y b enteros positivos. El perímetro del triángulo de menor área que cumple esta propiedad es

   (a) 6

   (b) 8

   (c) 12

   (d) 24

3. El menor número entero positivo que tiene residuo 4 cuando se divide por 8 y residuo 5 cuando se divide por 13 está entre

   (a) 0 y 20.

   (b) 21 y 40.

   (c) 41 y 60.

   (d) 61 y 80.

4. Considere el número de 800 cifras de la forma $201920192019\cdots 2019$. La máxima cantidad de cifras que deben ser borradas de manera que la suma de las cifras restantes sea 2019 es

   (a) 490

   (b) 491

   (c) 492

   (d) 493

5. Considere cierto entero positivo n. Si n tiene exactamente ocho divisores positivos, entonces la mínima cantidad de divisores positivos que puede tener n^3 corresponde a

   (a) 8

   (b) 16

   (c) 21

   (d) 22

6. La cantidad de números n, $1 \leq n \leq 1000$ que cumplen con que su sucesor o antecesor es múltiplo de 3 o de 5 es

   (a) 798

   (b) 799

   (c) 800

   (d) 801

7. La cantidad de pares ordenados (x, y), con x, y enteros positivos para los cuales $23x + 92y$ es un cuadrado perfecto menor que 2392 corresponde a

   (a) 5

   (b) 22

   (c) 25

   (d) 27

8. Los dígitos a, b y c son las cifras del número abc; con $a, b, c \neq 0$.Considere las siguientes condiciones:

   I La ecuación $ax^2+bx+c=0$ tiene dos soluciones reales distintas.

   II La ecuación $bx^2+cx+a=0$ tiene una única solución real.

   III La ecuación $cx^2+ax+b=0$ no tiene soluciones reales.

   La cantidad de números abc que cumplen las condiciones anteriores es

   (a) 0

   (b) 1

   (c) 2

   (d) 3

9. Sea $D(n)$ la cantidad de divisores positivos de un numero entero n, por ejemplo $D(24)=8$ ya que 24 tiene 8 divisores positivos $\{1,2,3,4,6,8,12,24\}$. De los números $D(25), D(26), D(27), \cdots, D(256)$, la cantidad de ellos que son pares corresponde a

   (a) 218

   (b) 219

   (c) 220

   (d) 221

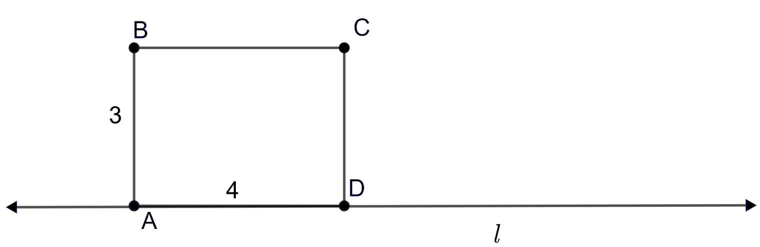
10. En la siguiente figura el rectángulo de dimensiones 3 y 4 se hace rodar en una misma dirección (rotar con respecto a sus vértices) sobre la recta l hasta que el vértice A quede nuevamente sobre la recta. La longitud de la trayectoria que sigue el vértice A corresponde a

   (a) 5π

   (b) 6π

   (c) 7π

   (d) $\frac{11\pi}{2}$



II Parte: Desarrollo **Valor 14 puntos, 7 pts c/u**

Instrucciones: Los siguientes ejercicios deben ser resueltos en las hojas adicionales que se le entregaron. **Debe responder cada pregunta en hojas separadas**. Conteste en forma ordenada, completa y clara. Se califica procedimientos y respuesta.

1. Sea N un número de tres cifras tales que las centenas, decenas y unidades corresponden a los términos consecutivos de una progresión aritmética. El número N es divisible por la suma de sus dígitos y su cociente es 48. Además, si a N se le resta 198, el resultado es un número que posee los mismos dígitos de N pero en orden inverso. Determine el valor numérico de N.

   Nota: Una progresión aritmética es una secuencia de números en la cual, si se toman dos números consecutivos cualesquiera, la diferencia entre ellos siempre es una constante. Por ejemplo, 4, 7, 10, 13, 16 están en progresión aritmética, pues la diferencia entre dos consecutivos siempre es 3

2. Sean $\square ABDC$, $\square CDFE$ y $\square BGHD$ tres cuadrados congruentes tales que $A-C-E$, $B-D-F$ y $A-B-G$. Si P es el punto de intersección de $\overline{AH}$ con $\overline{BE}$, determine $\dfrac{(\triangle APB)}{(\triangle AEP)}$.