XXXI Olimpiada Costarricense de Matemáticas

MEP–UNA–UCR–MICITT–UNED–ITCR

Solución
II Eliminatoria

Nivel II
(8° – 9°)

2019

Estimado estudiante:

La Comisión Organizadora de las Olimpiadas Costarricenses de Matemáticas le saluda y felicita por haber clasificado a la segunda eliminatoria nacional de estas justas académicas. La prueba consta de dos partes: una primera parte de 10 preguntas de selección única, ponderadas con dos puntos cada respuesta correcta, y una segunda parte con dos preguntas de desarrollo, con un valor de siete puntos cada solución correcta.

Los resultados de esta eliminatoria se publicarán a partir del viernes 4 de octubre, en la siguiente dirección electrónica:

www.olcoma.com

INDICACIONES GENERALES

- Debe trabajar en forma individual.
- Las respuestas a las preguntas que se le formulan, deben ser consignadas ÚNICAMENTE en las hojas de respuestas que se le han entregado.
- Los dibujos que aparecen en la prueba no están hechos a escala.
- El formulario de preguntas es suyo, por lo que puede realizar en él todas las anotaciones, cálculos o dibujos que le sean necesarios para resolver satisfactoriamente la prueba.
- Los únicos instrumentos cuyo uso se permite son los necesarios para escribir y dibujar. Se prohíbe el uso de libros, libretas de notas, tablas y calculadora.
- El examen tiene una duración máxima de tres horas.
- Escriba claramente los datos que se le solicitan en las hojas de respuestas.

SIMBOLOGÍA

$\overline{AB}$	segmento de extremos A y B	$\angle ABC \cong \angle DEF$	congruencia de ángulos
AB	medida de $\overline{AB}$	$\triangle ABC \cong \triangle DEF$	congruencia de triángulos
$\overrightarrow{AB}$	rayo de extremo A y que contiene a B	$ABC \leftrightarrow DEF$	correspondencia respectiva entre puntos
$\overleftrightarrow{AB}$	recta que contiene los puntos A y B	$\triangle ABC \sim \triangle DEF$	semejanza de triángulos
$\angle ABC$	ángulo de rayos $\overrightarrow{BA}$ y $\overrightarrow{BC}$	$\overline{AB} \cong \overline{CD}$	congruencia de segmentos
$m\angle ABC$	medida de $\angle ABC$	$\widehat{AB}$	arco de extremos A y B
$\triangle ABC$	triángulo de vértices A, B, C	$m\widehat{AB}$	medida de $\widehat{AB}$
$\square ABCD$	cuadrilátero de vértices A, B, C, D	(ABC)	área de ΔABC
$\parallel$	paralelismo	$(ABCD)$	área de $\square ABCD$
$\perp$	perpendicularidad	$P-Q-R$	P, Q, R puntos colineales, con Q entre los puntos P y R

I Parte: Selección única **Valor 20 puntos, 2 pts c/u**

1. Se disponen los números naturales según la siguiente figura. Decimos que las coordenadas de un número son (n, m) si dicho número está en la fila n y columna m, por ejemplo, el número 22 tiene coordenadas $(4, 5)$, pues está en la cuarta fila y quinta columna. Las coordenadas del número 2019 en la disposición corresponden a

   (a) $(7, 45)$

   (b) $(19, 45)$

   (c) $(19, 44)$

   (d) $(83, 44)$

$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	
36	35	34	33	32	31	$\cdots$	
17	18	19	20	21	30	$\cdots$	
16	15	14	13	22	29	$\cdots$	
5	6	7	12	23	28	$\cdots$	
4	3	8	11	24	27	$\cdots$	
1	2	9	10	25	26	$\cdots$	

- Opción correcta: (a)
- **Solución:**

  Se pueden notar varios patrones en la distribución, el primero es que el cuadrado de un impar k se encuentra en posición $(1, k)$.
  El cuadrado de un par k se encuentra en posición $(k, 1)$

  Observe además que, en el caso de los cuadrados de números impares, a partir de dicho cuadrado, los números van en orden decreciente cuando se mantiene la columna y se aumentan las filas.

  El cuadrado más cercano a 2019 es $45^2 = 2025$, el cual tendrá corodenadas $(1, 45)$. A partir de aquí, los números que están en la columna 45, aumentando las filas, serán 2024, 2023, 2022, 2021, 2020, 2019; es decir, 2019 estará en la columna 45 y fila 7.

2. Las medidas de los lados de un triángulo rectángulo son los números positivos a, $a-b$ y $a+b$, con a y b enteros positivos. El perímetro del triángulo de menor área que cumple esta propiedad es

   (a) 6

   (b) 8

   (c) 12

   (d) 24

- Opción correcta: (c)
- **Solución:**

  Dado que son las medidas de un triángulo rectángulo, de acuerdo con el Teorema de Pitágoras se cumple que:

$$
\begin{aligned}
& (a+b)^2 = a^2 + (a-b)^2 \\
\Rightarrow\ & a^2 + 2ab + b^2 = a^2 + a^2 - 2ab + b^2 \\
\Rightarrow\ & 2ab = a^2 - 2ab \\
\Rightarrow\ & 2ab - a^2 + 2ab = 0 \\
\Rightarrow\ & 4ab - a^2 = 0 \\
\Rightarrow\ & a\,(4b - a) = 0
\end{aligned}
$$

  De la ecuación anterior, $a = 0$ se descarta pues no se tendría triángulo alguno; así, debe cumplirse $a = 4b$ y las medidas del triángulo rectángulo serían $3b$, $4b$ y $5b$.

  El área de dichos triángulos es $\dfrac{3b \cdot 4b}{2} = 6b^2$ y el menor valor para esta es cuando $b = 1$. Luego, para este triángulo rectángulo de menor área en el que $b = 1$, las medidas de los lados son, respectivamente, 3, 4 y 5. Por lo tanto, el perímetro es $3 + 4 + 5 = 12$.

3. El menor número entero positivo que tiene residuo 4 cuando se divide por 8 y residuo 5 cuando se divide por 13 está entre

   (a) 0 y 20.

   (b) 21 y 40.

   (c) 41 y 60.

   (d) 61 y 80.

- Opción correcta: (c)
- **Solución:**

  Dado que el número tiene residuo 5 cuando se divide entre 13, entonces tiene la forma $13n + 5$. Por otro lado, $13n+5 = 8n+5n+5 = 8n+5(n+1)$. Esto significa que el residuo de la división por 8 del número, debe ser el mismo que el de $5(n+1)$, que es 4. El menor entero positivo n tal que

$5(n+1)$ tiene residuo 4 cuando se divide entre 8 es $n = 3$, en cuyo caso el número es $13\cdot 3+5 = 44$.

4. Considere el número de 800 cifras de la forma $201920192019\cdots 2019$. La máxima cantidad de cifras que deben ser borradas de manera que la suma de las cifras restantes sea 2019 es

   (a) 490

   (b) 491

   (c) 492

   (d) 493

- Opción correcta: (a)
- **Solución:**

  Si el número tiene 800 cifras, entonces las cifras del número 2019 se repiten 200 veces, es decir, habrá 200 cifras del 2, 200 cifras 0, 200 cifras del 1 y 200 cifras del 9. Primeramente se borran los ceros que no aportan a la suma, los nueves se deben dejar todos, que suman 1800, luego alcanzar la suma de 2019 hace falta 219, por lo cual se ocupan 109 cifras del 2 y una del 1. Así se deben borrar 200 ceros, 199 unos y 91 dos, para un total de 490 cifras.

5. Considere cierto entero positivo n. Si n tiene exactamente ocho divisores positivos, entonces la mínima cantidad de divisores positivos que puede tener n^3 corresponde a

   (a) 8

   (b) 16

   (c) 21

   (d) 22

- Opción correcta: (d)
- **Solución:**

  Sabemos que si un entero n se expresa en su descomposición en primos de de la forma $p_1^{\alpha_1}\cdot p_2^{\alpha_2}\cdot p_3^{\alpha_3}\cdot\ldots\cdot p_k^{\alpha_k}$, la cantidad de divisores de este número será $(\alpha_1+1)(\alpha_2+1)(\alpha_3+1)\ldots(\alpha_k+1)$. Por lo anterior, se puede observar que hay únicamente tres casos para la descomposición en primos de n: p^7, p^3q y pqr (donde p, q y r son primos diferentes).

  Veamos cada caso:

  Caso I: $n = p^7$. En este caso se tiene que la descomposición en primos de n^3 es p^{21}, por lo que tiene 22 divisores.

  Caso II: $n = p^3q$. Se tiene $n^3 = p^9q^3$, por lo que tiene 40 divisores.

  Caso III: $n = pqr$. Se tiene $n^3 = p^3q^3r^3$, por lo que tiene 64 divisores.

Por lo tanto, n^3 tendrá como mínimo 22 divisores positivos.

6. La cantidad de números n, $1 \leq n \leq 1000$ que cumplen con que su sucesor o antecesor es múltiplo de 3 o de 5 es
   (a) 798
   (b) 799
   (c) 800
   (d) 801

- Opción correcta: (d)
- **Solución:**

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
991	992	993	994	995	996	997	998	999	1000					

Si se ordena los números en orden creciente en filas con 15 números se puede observar que sólamente los multiplos de 3 no tienen como antencesos o sucesor un múltiplo de tres.
Así, todos los números que no son múltiplos de 3 son parte del conjunto que estamos contando.

Además se observa que de los múltiplos de 3 los que terminan en 1, 6 (múltiplos de 3 de la forma $5k+1$), 9 y 4 (múltiplos de 3 de la forma $5k+4$) tiene un antecesor o sucesor múltiplo de 5, por lo que son parte del conjunto que estamos contando.
La tabla tiene 66 filas enteras y la última fila con 10 números.
Por cada fila completa se seleccionan 12 y en la última fila se seleccionan 9, en total hay $12 \times 66 + 9 = 801$ números que cumplen la condición.

7. La cantidad de pares ordenados (x, y), con x, y enteros positivos para los cuales $23x + 92y$ es un cuadrado perfecto menor que 2392 corresponde a
   (a) 5
   (b) 22
   (c) 25
   (d) 27

- Opción correcta: (d)
- **Solución:**

Como $23x + 92y = 23(x + 4y)$ y $23(x + 4y) < 2392$ entonces $x + 4y < 104$
Como $23(x+4y)$ es un cuadrado perfecto y 23 es primo, entonces $x+4y = 23z$ en el cual z debe ser un cuadrado perfecto
Luego $23z < 104$ implica que $z < \dfrac{104}{23}$, pero como z es cuadrado perfecto, entonces z es 1 o 4.

Luego $x + 4y = 23$ o $x + 4y = 92$
De la primera ecuación se tiene que y debe tomar los valores de 1 a 5, pues de los contrario x sería cero o negativo, por lo que hay 5 pares ordenados que satisfacen las condiciones iniciales.
De la segunda ecuación se sabe que y debe tomar los valores de 1 a 22, pues de los contrario x sería cero o negativo, por lo que hay 22 pares ordenados que satisfacen las condiciones iniciales
En total 27 pares ordenados satisfacen las condiciones iniciales.

8. Los dígitos a, b y c son las cifras del número abc; con $a, b, c \neq 0$.Considere las siguientes condiciones:

   I La ecuación $ax^2+bx+c=0$ tiene dos soluciones reales distintas.

   II La ecuación $bx^2 + cx + a = 0$ tiene una única solución real.

   III La ecuación $cx^2 + ax + b = 0$ no tiene soluciones reales.

   La cantidad de números abc que cumplen las condiciones anteriores es

   (a) 0

   (b) 1

   (c) 2

   (d) 3

- Opción correcta: (b)
- **Solución:**

  Al establecer las condiciones del discriminante para cada una de las ecuaciones se obtiene que

  I La ecuación $ax^2 + bx + c$ tiene dos soluciones $\Rightarrow b^2 - 4ac > 0 \Rightarrow b^2 > 4ac$.
  II La ecuación $bx^2 + cx + a$ tiene una única solución $\Rightarrow c^2 - 4ba = 0 \Rightarrow c^2 = 4ba$.
  III La ecuación $cx^2 + ax + b$ no tiene soluciones. $\Rightarrow a^2 - 4cb < 0 \Rightarrow a^2 < 4cb$.

  De la condición I se obtiene que $b > 2$ De la condición II se obtiene que c es par y como $b > 2$, c puede ser 4, 6 o 8. Si $c = 4$ sustituyendo en II se obtiene que $ab = 4$ por lo que $a = 1$ y $b = 4$, la otro combinación no es posible por las restricciones de b. Pero $c = 4$, $a = 1$ y $b = 4$ no satifacen la condición I.

  Si $c = 6$ sustituyendo en II se obtiene que $ab = 9$ por lo que $a = 3$ y $b = 3$ o $a = 1$ y $b = 9$. Pero $c = 6$, $a = 3$ y $b = 3$ no satifacen la condición I. Por su parte $c = 6$, $a = 1$ y $b = 9$ sí satisfacen las tres condiciones por lo que 196 es un número que satisface las condiciones

  Si $c = 8$ sustituyendo en II se obtiene que $ab = 16$ por lo que $a = 4$ y $b = 4$ o $a = 2$ y $b = 8$. Pero $c = 8$, $a = 4$ y $b = 4$ no satifacen la condición I. Por su parte $c = 8$, $a = 2$ y $b = 8$ tampoco satisface la I condición

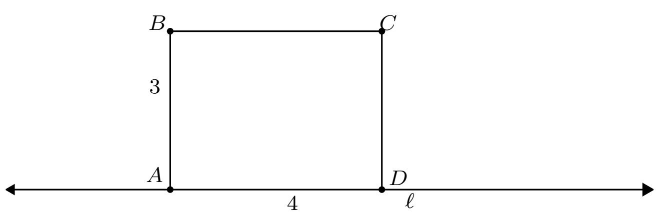
9. Sea $D(n)$ la cantidad de divisores positivos de un numero entero n, por ejemplo $D(24) = 8$ ya que 24 tiene 8 divisores positivos $\{1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 24\}$. De los números $D(25), D(26), D(27), \cdots, D(256)$, la cantidad de ellos que son pares corresponde a
   (a) 218
   (b) 219
   (c) 220
   (d) 221

- Opción correcta: (c)
- **Solución:**

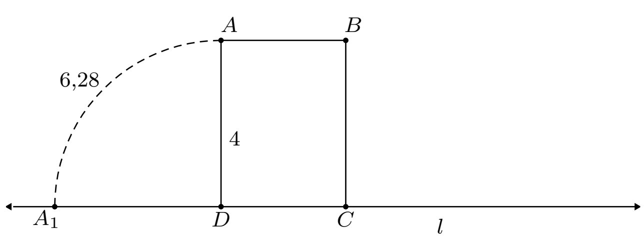
  Para un entero n que no sea cuadrado perfecto los divisores ocurren en parejas, es decir si a es divisor de n existe un entero b tal que $ab = n$, luego b es otro divisor de n. Mientras que si n que es cuadrado perfecto hay un divisor $\sqrt{n}$ tal que $\sqrt{n} \cdot \sqrt{n} = n$, lo que significa que la cantidad de divisores será impar.

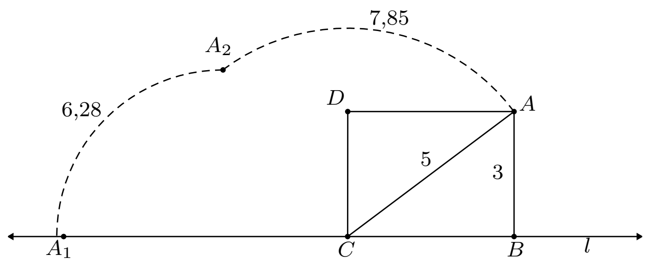
  Por otra parte de los 232 números $D(25), D(26), D(27), \cdots D(256)$ tenemos que $25 = 5^2$ y $256 = 16^2$ lo que significa que hay $16 - 5 + 1 = 12$ cuadrados perfectos, por lo tanto hay 12 números impares y $232 - 12 = 220$ números pares.

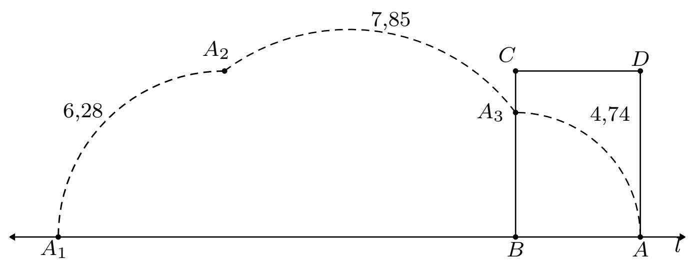
10. En la siguiente figura el rectángulo de dimensiones 3 y 4 se hace rodar en una misma dirección (rotar con respecto a sus vértices) sobre la recta l hasta que el vértice A quede nuevamente sobre la recta. La longitud de la trayectoria que sigue el vértice A corresponde a
    (a) 5π
    (b) 6π
    (c) 7π
    (d) $\dfrac{11\pi}{2}$



- Opción correcta: (b)
- **Solución:**







En cada una de las rotaciones el punto A es rotado con respecto a un punto. En cada una de ellas se forma cuartos de circunferencia de radios 4, 5 y 3 respectivamente.

Es por esto que cada una de las trayectorias se calcula como el cuarto de la longitud de la circunferencia, es decir:

Trayectoria en la rotación 1: $\frac{2\pi r}{4} = \frac{2\pi 4}{4} = 2\pi$

Trayectoria en la rotación 2: $\frac{2\pi 5}{4} = \frac{5\pi}{2}$

Trayectoria en la rotación 2: $\frac{2\pi 3}{4} = \frac{3\pi}{2}$

Por lo que la trayectoria total del punto A es $2\pi + \frac{5\pi}{2} + \frac{3\pi}{2} = 6\pi$

II Parte: Desarrollo **Valor 14 puntos, 7 pts c/u**

Instrucciones: Los siguientes ejercicios deben ser resueltos en las hojas adicionales que se le entregaron. Conteste en forma ordenada, completa y clara. Se califica procedimientos y respuesta.

1. Sea N un número de tres cifras tales que las centenas, decenas y unidades corresponden a los términos consecutivos de una progresión aritmética. El número N es divisible por la suma de sus dígitos y su cociente es 48. Además, si a N se le resta 198, el resultado es un número que posee los mismos dígitos de N pero en orden inverso. Determine el valor numérico de N.

   Nota: Una progresión aritmética es una secuencia de números en la cual, si se toman dos números consecutivos cualesquiera, la diferencia entre ellos siempre es una constante. Por ejemplo, 4, 7, 10, 13, 16 están en progresión aritmética, pues la diferencia entre dos consecutivos siempre es 3

   Solución:

   Sea $N = 100a+10b+c$, como los dígitos de N son términos de una progresión aritmética llamemos d a la diferencia entre dos términos consecutivos. Entonces podemos expresar $a = b-d$ y $c = b+d$

   Así $N = 100(b-d) + 10b + (b+d) = 111b - 99d$.

   Por otro lado, de acuerdo con la segunda parte del enunciado tenemos que $N = 3b \cdot 48$ de donde $111b - 99d = 3b \cdot 48$ con lo que $b = -3d$.

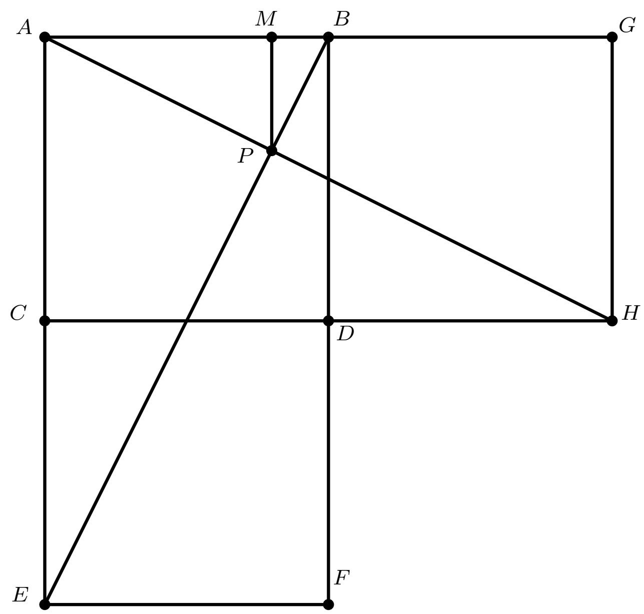
   Por la última parte del problema, se tiene $N - 198 = 100c + 10b + a$, es decir; $111b - 99d - 198 = 111b + 99d \Rightarrow -198 = 198d \Rightarrow d = -1$ y $b = 3$.

   Por lo tanto, el valor numérico de $N = 432$.

2. Sean $\square ABDC$, $\square CDFE$ y $\square BGHD$ tres cuadrados congruentes tales que $A-C-E$, $B-D-F$ y $A-B-G$. Si P es el punto de intersección de $\overline{AH}$ con $\overline{BE}$, determine $\dfrac{(\triangle APB)}{(\triangle AEP)}$.

Solución:

Sea M el pie de la altura desde P a $\overline{AB}$.



Se tiene entonces

$$\frac{(\triangle APB)}{(\triangle APE)} = \frac{\frac{1}{2}(AB \cdot MP)}{\frac{1}{2}(AE \cdot AM)} = \frac{AB \cdot MP}{2 \cdot AB \cdot AM} = \frac{MP}{2 \cdot AM}$$

Además $\triangle AMP \sim \triangle AGH$ por el criterio A-A-A, por lo que

$$\frac{MP}{AM} = \frac{GH}{AG} = \frac{1}{2}$$

Luego

$$\frac{(\triangle APB)}{(\triangle APE)} = \frac{MP}{2AM} = \frac{1}{4}$$