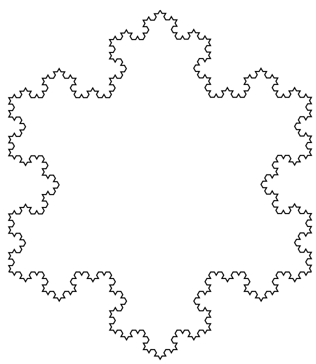
XXXII OLIMPIADA COSTARRICENSE DE MATEMÁTICAS

MEP - UNA - UCR - MICITT - UNED - TEC

SOLUCIÓN
SEGUNDA ELIMINATORIA



Nivel II
$(8^\circ - 9^\circ)$

2020

Estimado estudiante:

Puede consultar la lista de estudiantes clasificados a partir del XXX, en la siguiente dirección electrónica: **www.olcoma.com**

La Comisión de las Olimpiadas Costarricenses de Matemáticas 2020 le saluda y le da la más cordial bienvenida a la Segunda Eliminatoria Nacional de estas justas académicas, deseándole los mayores éxitos.
La prueba consta de un total de 20 preguntas de selección única.

INDICACIONES GENERALES

- Debe trabajar en forma individual.
- Las respuestas a las preguntas que se le formulan, deben ser consignadas ÚNICAMENTE en la hoja de respuestas que se le ha entregado.
- Los dibujos que aparecen en la prueba no necesariamente están hechos a escala.
- El formulario de preguntas es suyo, por lo que puede realizar en él todas las anotaciones, cálculos o dibujos que le sean necesarios para resolver satisfactoriamente la prueba.
- No se permite el uso de hojas adicionales.
- Los únicos instrumentos cuyo uso se permite son los necesarios para escribir y dibujar. Se prohíbe el uso de libros, libretas de notas, tablas y calculadora.
- El examen tiene una duración máxima de tres horas.
- Escriba claramente los datos que se le solicitan en la hoja de respuestas.

SIMBOLOGÍA

$\overline{AB}$	segmento de extremos A yB	$\angle ABC \approx \angle DEF$	congruencia de ángulos
AB	medida de $\overline{AB}$	$\triangle ABC \cong \triangle DEF$	congruencia de triángulos
$\overrightarrow{AB}$	rayo de extremo A y que contiene a B	$ABC \leftrightarrow DEF$	correspondencia respectiva entre puntos
$\overleftrightarrow{AB}$	recta que contiene los puntos A y B	$\triangle ABC \sim \triangle DEF$	semejanza de triángulos
$\angle ABC$	ángulo de rayos $\overrightarrow{BA}$ y $\overrightarrow{BC}$	$\overline{AB} \cong \overline{CD}$	congruencia de segmentos
$m\angle ABC$	medida de $\angle ABC$	$\widehat{AB}$	arco de extremos A y B
$\triangle ABC$	triángulo de vértices A, B, C	$m\widehat{AB}$	medida de $\widehat{AB}$
$\square ABCD$	cuadrilátero de vértices A, B, C, D	(ABC)	área de ΔABC
$\parallel$	paralelismo	$(ABCD)$	área de $\square ABCD$
$\perp$	perpendicularidad	$P-Q-R$	P, Q, R puntos colineales, con Q entre los puntos P y R

I Parte: Selección única **Valor 24 puntos, 2 pts c/u**

1. Suponga que los cuatro números enteros a, b, $a+b$ y $a-b$ son primos. Con certeza, la suma de estos cuatro números es
   (a) múltiplo de 2

   (b) múltiplo de 3

   (c) múltiplo de 5

   (d) un número primo

- Opción correcta: (d)
- Solución: Claramente a o b deben ser alguno de los dos igual a dos, pues en caso contrario ambos serían primos impares y $a+b$ sería un número par mayor que 2 y no sería primo. En este caso, como $a-b$ debe ser primo, entonces necesariamente $b=2$. Luego, los números $a-2, a, a+2$ deben ser primos. En cuyo caso, la única posibilidad es que sean $3, 5, 7$ respectivamente. Entonces $a=5$, y los números $a, b, a+b, a-b$ son $5, 2, 7, 3$, cuya suma es $5+2+7+3=17$, que es primo.

2. Benancio está incursionando en la crianza de vacas lecheras, para ello, compra vacas de la finca de Pancracio y vacas de la finca de Casimiro. Si sabe que en cinco días, cuatro vacas de Pancracio y tres vacas de Casimiro dan la misma cantidad de leche que tres vacas de Pancracio y cinco vacas de Casimiro en cuatro días, entonces se puede afirmar que
   (a) Las vacas de Pancracio y las vacas de Casimiro dan la misma cantidad de leche por día

   (b) Las vacas de Pancracio dan más leche por día que las vacas de Casimiro

   (c) Las vacas de Pancracio dan el doble de leche por día que las vacas de Casimiro

   (d) Las vacas de Casimiro dan más leche por día que las vacas de Pancracio

- Opción correcta: (d)
- Solución: Sea x la cantidad de leche que da una vaca de Pancracio en un día y y la cantidad de leche que da una vaca de Casimiro en un día. De acuerdo con los datos se tiene que $5(4x+3y) = 4(3x+5y)$.

  Simplificando para ver la relación entre x y y se tiene

  $$5(4x+3y) = 4(3x+5y) \Rightarrow 20x+15y = 12x+20y \Rightarrow 8x = 5y \Rightarrow x = \frac{5}{8}y$$

  Lo que significa que una vaca de Pancracio solo da $\frac{5}{8}$ de lo que da una vaca de Casimiro.

3. La cantidad de divisores del número 2020^{2020} corresponde a

   (a) 2021^2

   (b) $4041 \cdot 2020^2$

   (c) $4041 \cdot 2021^2$

   (d) $4041^2 \cdot 2021$

- Opción correcta: (c)
- Solución: Como $2020 = 2^2 \cdot 5 \cdot 101$ entonces $2020^{2020} = 2^{4040}5^{2020}101^{2020}$, por lo que la cantidad de divisores corresponde a

$$(4040+1)(2020+1)(2020+1) = 4041 \cdot 2021^2.$$

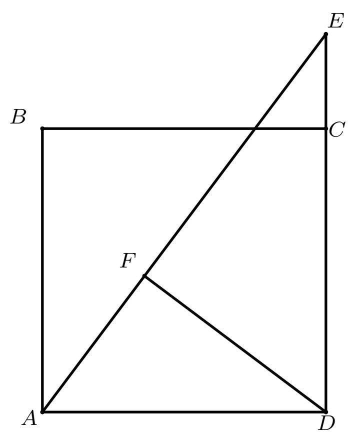
4. En la siguiente figura, $\square ABCD$ es un cuadrado de lado con medida igual a 3 cm. Si $A-F-E$, $D-C-E$, $\overline{DF} \perp \overline{AE}$ y $CE = 1$ cm, la medida, en centímetros, de $\overline{DF}$ es

   (a) $\dfrac{12}{5}$

   (b) $\dfrac{15}{4}$

   (c) $\dfrac{5}{2}$

   (d) $\dfrac{3}{5}$



- Opción correcta: (a)
- Solución: Sea G el punto de intersección de $\overline{AE}$ con $\overline{BC}$. Vemos que $\triangle AGB \sim \triangle ECG$ pues $\angle AGB \cong \angle EGC$, por ser opuestos por el vértice, y $\angle ABG \cong \angle ECG$ pues ambos son rectos. Entonces

$$\frac{AB}{EC} = \frac{GB}{GC} \Rightarrow \frac{3}{1} = \frac{GB}{GC} \Rightarrow GB = 3GC$$

Como $BG + GC = BC = 3$ se tiene que $3GC + GC = 3$ y de aquí $GC = \dfrac{3}{4}$. Ahora, por el teorema de Pitágoras en $\triangle EGC$ se puede obtener $GE = \dfrac{5}{4}$.

Por otro lado, $\triangle DFE \sim \triangle GCE$, pues comparten un ángulo y ambos tienen un ángulo recto. Entonces

$$\frac{DF}{GC} = \frac{DE}{GE} \Rightarrow DF = \frac{DE \cdot GC}{GE} = \frac{4 \cdot \frac{3}{4}}{\frac{5}{4}} = \frac{12}{5}$$

5. Se reúnen 15 personajes de la Tierra Media, que provienen de las aldeas de Hobbits, Elfos, Humanos y Enanos. Si se sabe que cada aldea manda un número diferente de representantes (al menos uno), entre Elfos y Hobbits hay 6 representantes, entre Elfos y Enanos hay 7 representantes, y en la reunión hay más Enanos que Humanos, la aldea que envió exactamente 6 representantes es la de los
   (a) Elfos
   (b) Enanos
   (c) Humanos
   (d) Hobbits

- Opción correcta: (b)
- Solución: Observe que no pueden ser los Elfos ni los Hobbits, pues entre ambos hay 6 representantes y debe haber al menos uno de cada uno. Tampoco pueden ser los Humanos, porque esto obligaría a que hayan al menos 7 Enanos y contradice el hecho de que entre Elfos y Enanos hay 7 representantes. Vemos que la única posibilidad es que sean los Enanos, en cuyo caso se tendría un Elfo, cinco Hobbits y tres Humanos, cumpliéndose todas las condiciones del enunciado.

6. Un mensajero debe repartir tres paquetes a tres lugares diferentes. Si lo hace al azar, es decir, elige el paquete y la dirección aleatoriamente, entonces la probabilidad de que al menos uno de los paquetes llegue a su destino correcto es
   (a) 0
   (b) $\frac{1}{3}$
   (c) $\frac{2}{3}$
   (d) 1

- Opción correcta: (c)
- Solución: Hay seis maneras de hacer la entrega. Si abc indica que al primer destino se le ha entragado el paquete a, al segundo destino el paquete b y al tercer destino el paquete c. El número de paquetes que llegan al destino correcto es, respectivamente, 3, 1, 1, 0, 0, 1.
  Por lo que se ve que en 4 de los 6 casos posibles hay al menos un paquete que llega a su destino correcto. Por lo tanto, la probabilidad está dada por $P = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$.

7. Sean a y b dígitos. Si el número $7a93141b$ es divisible por 72, entonces el dígito a es
   (a) 1
   (b) 3
   (c) 5
   (d) 8

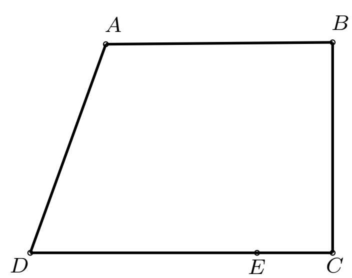
- Opción correcta: (c)
- Solución: Como a y b son dígitos, sus valores están entre 0 y 9.

  Se tiene que $7a93141b$ es divisible por 72, observe que $72 = 8 \cdot 9$, entonces $7a93141b$ es divisible por 8 y 9.

  Veamos primero que $7a93141b$ es divisible por 8, esto nos dice que las últimas tres cifras de dicho número es divible por 8. En este caso, se tiene que $41b$ es divisible por 8. Observe que entre 410 y 419 solamente existe un número que es divisible por 8, el número es 416. Por lo tanto el valor de $b = 6$ y el número es $7a931416$.

  Luego, $7a931416$ es divisible por 9, esto nos dice que la suma de sus cifras es divisible por 9. Entonces, $7+a+9+3+1+4+1+6 = 31+a$ es divisible por 9, de donde el único valor posible de a es 5.

8. La figura adjunta $\square ABCD$ es un trapecio con $\overline{AB} \parallel \overline{DC}$. Si E es un punto en $\overline{DC}$, tal que $\overline{EB} \parallel \overline{AD}$, $\overline{AC}$ interseca a $\overline{BE}$ en P y $AP = 3PC$, entonces la razón $\dfrac{(EAC)}{(ABCD)}$ corresponde a
   (a) $\dfrac{1}{4}$
   (b) $\dfrac{1}{6}$
   (c) $\dfrac{1}{7}$
   (d) $\dfrac{1}{8}$



- Opción correcta: (c)
- Solución: Al trazar $\overline{AC}$ se observa que $\angle APB \cong \angle CPE$, por ser opuestos por el vértice y que $\angle PBA \cong \angle PEC$ por ser alternos internos entre paralelas, por lo que $\triangle APB \sim \triangle CPE$. Se tiene entonces $\dfrac{AB}{CE} = \dfrac{AP}{CP} = \dfrac{3PC}{PC} = 3$, de donde $AB = 3CE$.

  Como $\square ADEB$ es un paralelogramo, $DE = AB = 3CE$, por lo que $DC = DE + EC = 3EC + EC = 4EC$. Además, $\square ABCD$ y $\triangle EAC$ tienen la misma altura h. Entonces

  $$\frac{(EAC)}{(ABCD)} = \frac{\frac{1}{2} \cdot h \cdot EC}{\frac{1}{2} \cdot h \cdot (DC + AB)} = \frac{EC}{4EC + 3EC} = \frac{1}{7}$$

9. Diana y Maricela están escribiendo y jugando por un chat. Diana le escribe $\heartsuit\heartsuit\diamondsuit\heartsuit\heartsuit\diamondsuit\heartsuit$. Maricela copia el mensaje dos veces y se lo envía, es decir $\heartsuit\heartsuit\diamondsuit\heartsuit\heartsuit\diamondsuit\heartsuit\heartsuit\heartsuit\diamondsuit\heartsuit\heartsuit\diamondsuit\heartsuit$. Diana copia, dos veces, el mensaje recibido y se lo envía a Maricela, y así siguen hasta que cada una envía 20 mensajes. La cantidad de corazones que envía Diana en su último mensaje es
   (a) $2^{40} \cdot 5$
   (b) $2^{19} \cdot 10$
   (c) $2^{38} \cdot 5$
   (d) $2^{38} \cdot 10$

- Opción correcta: (c)
- Solución: Basta ver que el primer mensaje tiene 5 corazones, y en cada mensaje se duplica la cantidad de corazones. Esto significa que Diana envía el cuádruple de corazones al siguiente mensaje, es decir, envía $2^{2\cdot 0} \cdot 5$, $2^{2\cdot 1} \cdot 5$, $2^{2\cdot 2} \cdot 5$, $\ldots, 2^{2\cdot 19} \cdot 5$. Es decir, en su último mensaje envía $2^{2\cdot 19} \cdot 5$.

10. Los perímetros de dos cuadrados C_1 y C_2 suman 20 cm. Se forman dos nuevos cuadrados C_3 y C_4, de modo que la medida del lado del cuadrado C_3 es una unidad menor que la medida del lado del cuadrado C_1, y la medida del lado del cuadrado C_4 es el doble de la medida del lado del cuadrado C_2. Si la suma de los perímetros de los cuadrados C_3 y C_4 es 30 cm, entonces la suma de las áreas de los cuadrados C_1 y C_3, en cm^2, es
    (a) $\dfrac{5}{2}$
    (b) $\dfrac{29}{2}$
    (c) $\dfrac{25}{2}$
    (d) $\dfrac{197}{4}$

- Opción correcta: (a)
- Solución: Sea x la medida del lado del cuadrado C_1 y y la medida del lado del cuadrado C_2. Entonces la medida del lado del cuadrado C_3 es $x-1$ y la del cuadrado C_4 es $2y$.

  De acuerdo con la información del problema y lo anterior, se tiene el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\left\{\begin{array}{rcl} 4x+4y & = & 20 \\ \\ 4(x-1)+4\cdot 2y & = & 30 \end{array}\right. \Rightarrow \left\{\begin{array}{rcl} -4x-4y & = & -20 \\ \\ 4x+8y & = & 34 \end{array}\right.$$

  Al sumar ambos lados de las ecuaciones, se obtiene: $4y = 14 \Rightarrow y = \dfrac{7}{2}$

De la primera ecuación se obtiene que $x = \dfrac{20-4y}{4} = \dfrac{20-4\cdot\frac{7}{2}}{4} = \dfrac{6}{4} = \dfrac{3}{2}$. La medida del lado del cuadrado C_1 es $\dfrac{3}{2}$ cm.

La medida del lado del cuadrado C_3 es $x-1 = \dfrac{3}{2} - 1 = \dfrac{1}{2}$ cm.

Por lo tanto, la suma de las áreas del cuadrado C_1 y C_3 es $\left(\dfrac{3}{2}\right)^2 + \left(\dfrac{1}{2}\right)^2 = \dfrac{9}{4} + \dfrac{1}{4} = \dfrac{10}{4} = \dfrac{5}{2}$ cm^2.

11. Sea a un dígito. El número n es el resultado de multiplicar el número $2a7$ por 39. Si el dígito de las decenas del número n es igual a 9, entonces la suma de los dígitos de n corresponde a
    (a) 5
    (b) 10
    (c) 15
    (d) 20

- Opción correcta: (c)
- Solución: Observe que

$$n = 2a7 \cdot 39 = 2a7 \cdot (30+9) = 2a7 \cdot 30 + 2a7 \cdot 9.$$

El dígito de las unidades de $2a7 \cdot 30$ es 0, y el de las decenas es 1. Por otro lado, el dígito de las decenas de $2a7 \cdot 9$ es el dígito de las unidades de $1+6+9\cdot a$. Luego, el dígito de las unidades de $1+6+9\cdot a$ debe ser igual a 9. En cuyo caso, la única solución es $a=8$.

De donde $2a7 \cdot 39 = 287 \cdot 39 = 11\,193$ y la suma de los dígitos es 15.

12. Sean x y y, con $x > y$, dos números positivos. Si $x^2+y^2 = 12$ y $xy = 4$ entonces el valor numérico de $x^2 - y^2$ corresponde a
    (a) $2\sqrt{5}$
    (b) $4\sqrt{5}$
    (c) $6 + 2\sqrt{5}$
    (d) $48\sqrt{5}$

- Opción correcta: (b)
- Solución: Al multiplicar $xy = 4$ por 2 se obtiene $2xy = 8$, así;

$$x^2 + y^2 + 2xy = 12 + 8 \Rightarrow x^2 + 2xy + y^2 = 20 \Rightarrow (x + y)^2 = 20 \Rightarrow x + y = 2\sqrt{5}$$

Al multiplicar $xy = 4$ por -2 se obtiene $-2xy = -8$, así;

$$x^2 + y^2 - 2xy = 12 - 8 \Rightarrow x^2 - 2xy + y^2 = 4 \Rightarrow (x - y)^2 = 4 \Rightarrow x - y = 2$$

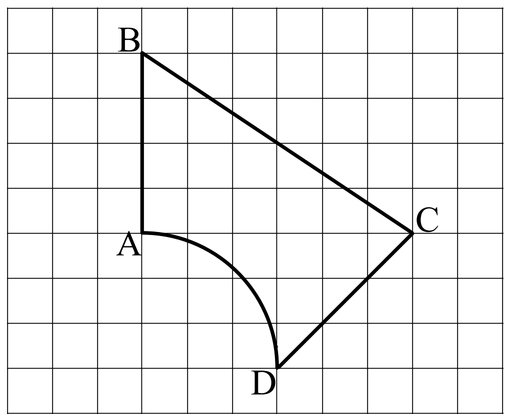
De esta forma

$$x^2 - y^2 = (x - y)(x + y) = 2 \cdot 2\sqrt{5} = 4\sqrt{5}$$

II Parte: Desarrollo **Valor 14 puntos, 7 pts c/u**

Instrucciones: Los siguientes ejercicios deben ser resueltos en hojas adicionales. **Debe responder cada pregunta en hojas separadas**. Conteste en forma ordenada, completa y clara. Se califica procedimientos y respuesta.

1. En la imagen adjunta se sabe que el área del triángulo rectángulo $\triangle ABC$ es $\dfrac{\pi^2}{3}$. Si la figura de vértices A, B, C y D está creada por tres segmentos y una cuarta parte de una circunferencia, tal y como se muestra en la imagen, determine el valor exacto (sin decimales) del perímetro de la región delimitada por los puntos A, B, C y D.



Solución:

Sea x la medida de cada uno de los lados de los cuadrados pequeños que forman la cuadrícula.

En el $\triangle ABC$ sus catetos miden $4x$ y $6x$ respectivamente. Como el área de este triángulo es $\dfrac{\pi^2}{3}$, se cumple que $\dfrac{4x \cdot 6x}{2} = \dfrac{\pi^2}{3} \Rightarrow x^2 = \dfrac{\pi^2}{36} \Rightarrow x = \dfrac{\pi}{6}$.

Ahora se calcula la longitd de cada segmento y la longitud de la cuarta parte de la circunferencia que está presente.

$AB = 4x = \dfrac{2\pi}{3} = a$. Para determinar BC se necesita $AC = 6x = \pi$; con el teorema de Pitágoras se obtiene que $BC^2 = \left(\dfrac{2\pi}{3}\right)^2 + \pi^2 \Rightarrow BC = \sqrt{\dfrac{4\pi^2}{9} + \pi^2} = \dfrac{\pi\sqrt{13}}{3} = b$.

Para el $\overline{CD}$ se considera el triángulo rectángulo isósceles de catetos con medida $3x = \dfrac{\pi}{2}$; así, con el teorema de Pitágoras se obtiene que $CD = \dfrac{\pi\sqrt{2}}{2} = c$.

La sección curva corresponde con la cuatra parte de la longitud de la circunferencia de radio $3x = \dfrac{\pi}{2}$. Así, la longitud de esa parte de circunferencia es $\dfrac{2\pi \cdot \pi/2}{4} = \dfrac{\pi^2}{4} = d$.

Por lo tanto, el perímetro de la figura es $a + b + c + d = \dfrac{2\pi}{3} + \dfrac{\pi\sqrt{13}}{3} + \dfrac{\pi\sqrt{2}}{2} + \dfrac{\pi^2}{4}$

2. Diana y Adrián juegan el siguiente juego por turnos, comenzando con una torre de n monedas, donde $n \geq 3$. En cada turno, un jugador selecciona una torre de monedas, y la divide en dos torres de monedas. Gana el primero que logre en su turno que todas las torres tenga como máximo dos monedas. Diana empieza. Dependiendo de n, determine cuál jugador tiene una estrategia ganadora.

Solución:

Si $n \leq 4$ entonces Diana gana en el primer turno. Si $n \geq 5$, y es impar, entonces Adrián gana. En este caso, Diana comienza por separar la torre, de modo que necesariamente una de las dos torres resultantes tiene una cantidad par de monedas.

En el siguiente movimiento, Adrián separa la pila con una cantidad par de monedas en dos pilas, una que tiene una moneda, y la otra las restantes, que es una cantidad impar. En el siguiente movimiento Diana tiene que formar una torre con una cantidad par de monedas, y Adrián vuelve a hacer el mismo movimiento.

El juego puede terminar de dos formas: Diana deja una torre con dos monedas, una con tres, y todas las demás con una moneda, en este caso, Adrián gana al separar la torre que tiene tres monedas, o Diana deja una torre con cuatro monedas, y todas las demás con una moneda, y en este caso Adrián gana al separar la torre de cuatro monedas en dos torres de dos monedas.

Si $n \geq 6$ y es par, entonces Diana separa la torre en una torre con una moneda y la otra con $n-1$, que es impar, y sigue aplicando la estrategia planteada anteriormente, en este caso Diana es la ganadora.