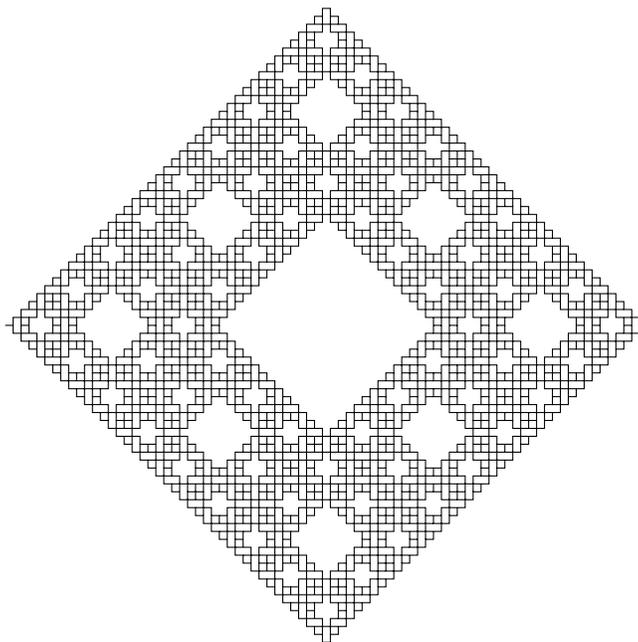


# XXX Olimpiada Costarricense de Matemáticas

MEP-UNA-UCR-MICITT-UNED-ITCR



## EXAMEN II Eliminatoria



Nivel III

(10° – 11° – 12°)

2018

Estimado estudiante:

La Comisión Organizadora de las Olimpiadas Costarricenses de Matemáticas le saluda y felicita por haber clasificado a la segunda eliminatoria nacional de estas justas académicas. La prueba consta de dos partes: una primera parte de 12 preguntas de selección única, ponderadas con dos puntos cada respuesta correcta, y una segunda parte con tres preguntas de desarrollo, con un valor de siete puntos cada solución correcta.

Los resultados de esta eliminatoria se publicarán a partir del viernes 5 de octubre, en la siguiente dirección electrónica:

[www.olcoma.com](http://www.olcoma.com)

### INDICACIONES GENERALES

- Debe trabajar en forma individual.
- Las respuestas a las preguntas que se le formulan, deben ser consignadas ÚNICAMENTE en las hojas de respuestas que se le han entregado.
- Los dibujos que aparecen en la prueba no están hechos a escala.
- El formulario de preguntas es suyo, por lo que puede realizar en él todas las anotaciones, cálculos o dibujos que le sean necesarios para resolver satisfactoriamente la prueba.
- Los únicos instrumentos cuyo uso se permite son los necesarios para escribir y dibujar. Se prohíbe el uso de libros, libretas de notas, tablas y calculadora.
- El examen tiene una duración máxima de tres horas.
- Escriba claramente los datos que se le solicitan en las hojas de respuestas.

### SIMBOLOGÍA

$\overline{AB}$	segmento de extremos $A$ y $B$	$\angle ABC \cong \angle DEF$	congruencia de ángulos
$AB$	medida de $\overline{AB}$	$\triangle ABC \cong \triangle DEF$	congruencia de triángulos
$\overrightarrow{AB}$	rayo de extremo $A$ y que contiene a $B$	$ABC \leftrightarrow DEF$	correspondencia respectiva entre puntos
$\overleftrightarrow{AB}$	recta que contiene los puntos $A$ y $B$	$\triangle ABC \sim \triangle DEF$	semejanza de triángulos
$\angle ABC$	ángulo de rayos $\overrightarrow{BA}$ y $\overrightarrow{BC}$	$\overline{AB} \cong \overline{CD}$	congruencia de segmentos
$m\angle ABC$	medida de $\angle ABC$	$\widehat{AB}$	arco de extremos $A$ y $B$
$\triangle ABC$	triángulo de vértices $A, B, C$	$m\widehat{AB}$	medida de $\widehat{AB}$
$\square ABCD$	cuadrilátero de vértices $A, B, C, D$	$(ABC)$	área de $\triangle ABC$
$\parallel$	paralelismo	$(ABCD)$	área de $\square ABCD$
$\perp$	perpendicularidad	$P - Q - R$	$P, Q, R$ puntos colineales, con $Q$ entre los puntos $P$ y $R$

**I Parte: Selección única****Valor 24 puntos, 2 pts c/u**

1. Si  $a$ ,  $b$  y  $c$  son números enteros positivos, tales que  $ab - 1$  es par, entonces con certeza  $7^{b+c}a + (b - 3)^2 c$  es
  - (a) par
  - (b) impar
  - (c) par únicamente si  $c$  es impar
  - (d) impar únicamente si  $c$  es par
  
2. Sea  $N$  el menor entero positivo con exactamente 11 divisores primos positivos. Al dividir  $N$  entre 11 el residuo corresponde a
  - (a) 0
  - (b) 1
  - (c) 3
  - (d) 5
  
3. Se lanza una moneda al aire en 10 oportunidades. La probabilidad de que caigan exactamente tres escudos es
  - (a)  $\frac{15}{128}$
  - (b)  $\frac{15}{64}$
  - (c)  $\frac{1}{32}$
  - (d)  $\frac{1}{10}$

4. Se construye una secuencia  $a_n$  de números como sigue:

- Se empieza con  $a_1 = 123$ .
- $a_2$  se forma escribiendo 123 entre todos los dígitos de  $a_1$ , por lo que  $a_2 = \mathbf{1\ 123\ 2\ 123\ 3}$ .
- Para  $a_3$  se inserta como antes 123 entre todos los dígitos de  $a_2$ ; así:

$$a_3 = \mathbf{1\ 123\ 1\ 123\ 2\ 123\ 3\ 123\ 2\ 123\ 1\ 123\ 2\ 123\ 3\ 123\ 3}$$

- Se continúa de la misma forma en cada paso siguiente para obtener cada término  $a_n$  que se desee.

La cantidad de dígitos que tendrá  $a_{2018}$  corresponde a

- (a)  $2^{2018} + 1$
- (b)  $2^{2019} + 1$
- (c)  $2^{4035} + 1$
- (d)  $2^{4037} + 1$

5. Una familia quiere ponerle a su hijo un nombre de tres letras, con las 27 letras que componen el alfabeto, las cuales quieren que estén en el orden usual y estas se pueden repetir; por ejemplo, si fueran las letras  $A$ ,  $A$  y  $B$ , el único nombre posible sería  $AAB$ . La cantidad de nombres con estas características corresponde a

- (a) 2925
- (b) 3276
- (c) 3303
- (d) 3654

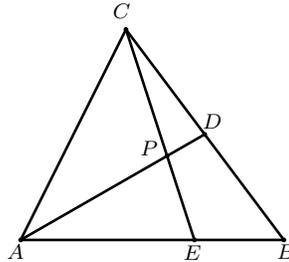
6. La cantidad de pares  $(x, y)$  de enteros que cumplen  $x \leq y$  y que satisfacen que su producto sea igual a 5 veces su suma corresponde a
- (a) 4
  - (b) 5
  - (c) 6
  - (d) 7
7. Rolando tiene en su alcancía un total de 2018 monedas de todas las denominaciones (500, 100, 50, 25, 10 y 5 colones, respectivamente). La cantidad de monedas de una denominación menor es mayor que la cantidad de monedas de una denominación mayor, en todos los casos. La cantidad máxima de dinero, en colones, que puede tener Rolando corresponde a
- (a) 230 350
  - (b) 230 300
  - (c) 203 050
  - (d) 230 350
8. Considere el conjunto  $F = \{1, 2, 3, \dots, 50\}$  y sea  $S$  subconjunto de  $F$ , que contiene la mayor cantidad de elementos posibles entre los cuales no existen dos elementos cuya suma sea divisible por 7. La cantidad de elementos de  $S$  corresponde a
- (a) 14
  - (b) 22
  - (c) 23
  - (d) 25

9. Considere las igualdades  $r - q = 2p$  y  $rq + p^2 = 676$ , donde  $p$ ,  $q$  y  $r$  son primos. El producto de  $p$ ,  $q$  y  $r$  corresponde a
- (a) 2018
  - (b) 2015
  - (c) 2001
  - (d) 1998
10. Dos circunferencias son tangentes exteriormente en el punto  $C$ ,  $\overleftrightarrow{AB}$  es una tangente común que no contiene a  $C$ , con  $A$  y  $B$  puntos de tangencia. Si se tiene que  $AC = 8$  y  $BC = 6$ , entonces la medida de uno de los radios de las circunferencias corresponde a
- (a)  $\frac{5}{6}$
  - (b)  $\frac{5}{8}$
  - (c)  $\frac{3}{20}$
  - (d)  $\frac{15}{4}$
11. Se calcula el producto de los dígitos de todos los números de cuatro dígitos. La suma de todos los productos obtenidos corresponde a
- (a)  $3^{45}$
  - (b)  $4^{45}$
  - (c)  $45^3$
  - (d)  $45^4$
12. Sean  $\square ABCD$  un cuadrado y  $M$  el punto de intersección de sus diagonales. Si la bisectriz del  $\angle BAC$  interseca a  $\overline{BD}$  en  $E$  y a  $\overline{BC}$  en  $F$ , entonces la razón  $CF : ME$  corresponde a
- (a) 2
  - (b) 3
  - (c)  $\frac{5}{2}$
  - (d)  $\frac{3}{2}$

**II Parte: Desarrollo****Valor 21 puntos, 7 pts c/u**

**Instrucciones:** Los siguientes ejercicios deben ser resueltos en las hojas adicionales que se le entregaron. Conteste en forma ordenada, completa y clara. Se califica procedimientos y respuesta.

1. Determine el número natural  $N$  más grande, en el que todos sus dígitos son distintos, tal que  $N$  es múltiplo de 8, 11 y 15 de manera simultánea.
2. El profesor Rolando soñó anoche que un antepasado suyo lo visitó y le dijo: "si tomo el año en que yo nací, escrito como un número de cuatro dígitos, invierto las cifras y al número mayor le resto el número menor se obtiene 2018". Cuando despertó pensó que lo que le dijo su antepasado era imposible. Indique, justificando su respuesta, si el profesor Rolando tiene razón.
3. Considere la figura siguiente en la que  $A - E - B$ ,  $C - D - B$  y  $P$  es el punto de intersección de  $\overline{CE}$  y  $\overline{AD}$ .



Si  $\frac{CD}{DB} = \frac{3}{1}$  y  $\frac{AE}{EB} = \frac{3}{2}$ , determine  $\frac{CP}{PE}$ .