XXXI Olimpiada Costarricense de Matemáticas

MEP–UNA–UCR–MICITT–UNED–ITCR

II Eliminatoria

Nivel III

$(10^\circ - 11^\circ - 12^\circ)$

2019

Estimado estudiante:

La Comisión Organizadora de las Olimpiadas Costarricenses de Matemáticas le saluda y felicita por haber clasificado a la segunda eliminatoria nacional de estas justas académicas. La prueba consta de dos partes: una primera parte de 10 preguntas de selección única, ponderadas con dos puntos cada respuesta correcta, y una segunda parte con dos preguntas de desarrollo, con un valor de siete puntos cada solución correcta.

Los resultados de esta eliminatoria se publicarán a partir del viernes 4 de octubre, en la siguiente dirección electrónica:

www.olcoma.com

INDICACIONES GENERALES

- Debe trabajar en forma individual.
- Las respuestas a las preguntas que se le formulan, deben ser consignadas ÚNICAMENTE en las hojas de respuestas que se le han entregado.
- Los dibujos que aparecen en la prueba no están hechos a escala.
- El formulario de preguntas es suyo, por lo que puede realizar en él todas las anotaciones, cálculos o dibujos que le sean necesarios para resolver satisfactoriamente la prueba.
- Los únicos instrumentos cuyo uso se permite son los necesarios para escribir y dibujar. Se prohíbe el uso de libros, libretas de notas, tablas y calculadora.
- El examen tiene una duración máxima de tres horas.
- Escriba claramente los datos que se le solicitan en las hojas de respuestas.

SIMBOLOGÍA

$\overline{AB}$	segmento de extremos A y B	$\angle ABC \cong \angle DEF$	congruencia de ángulos
AB	medida de $\overline{AB}$	$\triangle ABC \cong \triangle DEF$	congruencia de triángulos
$\overrightarrow{AB}$	rayo de extremo A y que contiene a B	$ABC \leftrightarrow DEF$	correspondencia respectiva entre puntos
$\overleftrightarrow{AB}$	recta que contiene los puntos A y B	$\triangle ABC \sim \triangle DEF$	semejanza de triángulos
$\angle ABC$	ángulo de rayos $\overrightarrow{BA}$ y $\overrightarrow{BC}$	$\overline{AB} \cong \overline{CD}$	congruencia de segmentos
$m\angle ABC$	medida de $\angle ABC$	$\widehat{AB}$	arco de extremos A y B
$\triangle ABC$	triángulo de vértices A, B, C	$m\widehat{AB}$	medida de $\widehat{AB}$
$\square ABCD$	cuadrilátero de vértices A, B, C, D	(ABC)	área de ΔABC
$\parallel$	paralelismo	$(ABCD)$	área de $\square ABCD$
$\perp$	perpendicularidad	$P-Q-R$	P, Q, R puntos colineales, con Q entre los puntos P y R

I Parte: Selección única **Valor 20 puntos, 2 pts c/u**

1. La cantidad de números enteros mayores que 99 pero menores que 1000, que cumplen la condición de que el cubo de las decenas más el doble de las unidades más 100 veces las centenas es igual a dicho número corresponde a

   (a) 12

   (b) 18

   (c) 20

   (d) 24

   Pregunta eliminada debido a que la solución correcta es 27, la cual no está entre las opciones

2. Considere cierto entero positivo n. Si n tiene exactamente ocho divisores positivos, entonces la máxima cantidad de divisores positivos que puede tener n^3 corresponde a

   (a) 40

   (b) 64

   (c) 126

   (d) 512

3. Una solución de la ecuación

$$x\sqrt{2}+\sqrt{6-2\sqrt{5}}=\sqrt{6+2\sqrt{5}}$$

   es

   (a) 0.

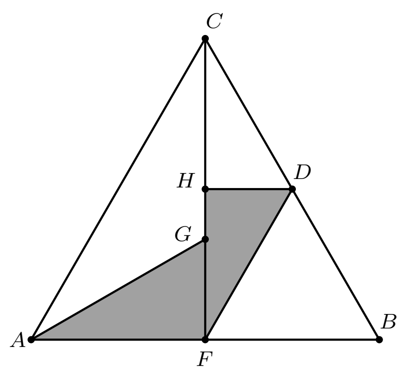
   (b) 1.

   (c) 2.

   (d) $\sqrt{2}$.

4. La suma de cinco enteros consecutivos es 10^{2019}. El número de en medio, corresponde a
   (a) 2^{2018}
   (b) 5^{2018}
   (c) 10^{2018}
   (d) $2 \cdot 10^{2018}$

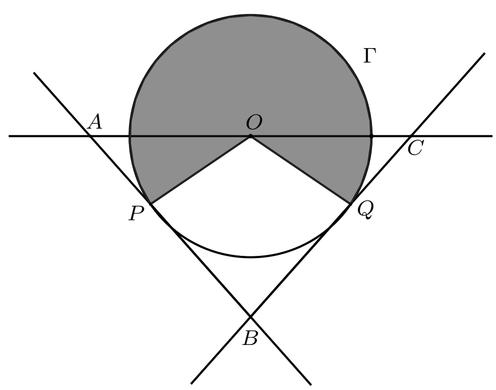
5. En el triángulo equilátero $\triangle ABC$, los puntos A, G, D son colineales, con D punto medio del $\overline{BC}$, además el $\overline{CF}$ es una altura del $\triangle ABC$ y $\overline{HD}$ es perpendicular a $\overline{CF}$. Si el trapecio $\square ACDF$ tiene un área de $18cm^2$ entonces el área, en cm^2, del polígono $AFDHG$ corresponde a
   (a) 9
   (b) 8
   (c) 7
   (d) 6



6. En un tablero cuadrado de tamaño 9×9 se pintan dos casillas de color rojo, y el resto de color azul. Dos de estas formas de pintar se dicen equivalentes si se puede obtener una rotando la otra $90°$. La cantidad de formas **NO** equivalentes de pintar el tablero es
   (a) 800
   (b) 810
   (c) 816
   (d) 820

7. En una de las finales de OLCOMA participaron 100 estudiantes y se hospedaron en un hotel que tiene 100 habitaciones, cada uno en una habitación. Los estudiantes para divertirse inventan un juego. Todos ellos realizan este proceso: el primer estudiante abre todas las puertas de las habitaciones. El segundo de los estudiantes cierra sólo las que sean múltiplos de 2. El tercero abre o cierra, según corresponda, las puertas de las habitaciones que son múltimplo de 3 (las puertas que encuentre cerradas las abrirá y las que estén abiertas las cerrará). El cuarto estudiante hará lo mismo con las puertas que son múltimplo de 4. Continúan así hasta el estudiante que está en la habitación 100. Al finalizar el último estudiante, la cantidad de puertas que quedan abiertas es
   (a) 0
   (b) 10
   (c) 16
   (d) 25

8. Considere el triángulo rectángulo $\triangle ABC$, recto en B. Sea O un punto tal que $A - O - C$ y Γ un círculo centrado en O y tangente a $\overline{AB}$ y a $\overline{BC}$ en los puntos P y Q respectivamente.



Si $AC = 2\sqrt{2}$ y $m\angle ACB = 45°$, el área de la región sombreada corresponde a

   (a) $\dfrac{3\pi}{4}$
   (b) $\dfrac{3\pi}{2}$
   (c) $2 - \dfrac{\pi}{4}$
   (d) $2 - \dfrac{\pi}{2}$

9. Considere la ecuación $2x^2 + bx + c = 0$, con $b, c \in \mathbb{Z}$ y sean x_1 y x_2, con $x_2 > x_1$, sus raíces. Si $x_1 + x_2 = 4$ y $x_1 x_2 = \dfrac{1}{2}$ entonces el cociente $\dfrac{x_1}{x_2}$ es un número

   (a) irracional
   (b) natural
   (c) entero no natural
   (d) racional no entero

10. Considere el rombo $\square ABCD$ de lado ℓ. Sea P el punto de intersección de las diagonales de $ABCD$ y sea M el punto medio de $\overline{BC}$. Si G es el punto de intersección de $\overline{AM}$ y $\overline{BP}$ y H es el punto de intersección de $\overline{DM}$ y $\overline{AC}$ entonces la longitud del segmento $\overline{GH}$ corresponde a

   (a) $\dfrac{\ell}{5}$
   (b) $\dfrac{\ell}{4}$
   (c) $\dfrac{\ell}{3}$
   (d) $\dfrac{\ell}{2}$

II Parte: Desarrollo **Valor 14 puntos, 7 pts c/u**

Instrucciones: Los siguientes ejercicios deben ser resueltos en las hojas adicionales que se le entregaron. **Debe responder cada pregunta en hojas separadas**. Conteste en forma ordenada, completa y clara. Se califica procedimientos y respuesta.

1. En un conjunto B que contiene siete números enteros consecutivos, se cumple que la suma de los cuadrados de los cuatro números más pequeños es igual a la suma de los cuadrados de los tres más grandes. Determine todos los posibles conjuntos B que cumplen con lo enunciado.

2. Considere la siguiente suma:
$$1^1 + 2^2 + 3^3 + ... + 100^{100}$$
Determine el dígito de las unidades de dicha suma.