XXXI Olimpiada Costarricense de Matemáticas

MEP–UNA–UCR–MICITT–UNED–ITCR

Solución

II Eliminatoria

Nivel III

$(10^\circ - 11^\circ - 12^\circ)$

2019

Estimado estudiante:

La Comisión Organizadora de las Olimpiadas Costarricenses de Matemáticas le saluda y felicita por haber clasificado a la segunda eliminatoria nacional de estas justas académicas. La prueba consta de dos partes: una primera parte de 10 preguntas de selección única, ponderadas con dos puntos cada respuesta correcta, y una segunda parte con dos preguntas de desarrollo, con un valor de siete puntos cada solución correcta.

Los resultados de esta eliminatoria se publicarán a partir del viernes 4 de octubre, en la siguiente dirección electrónica:

www.olcoma.com

INDICACIONES GENERALES

- Debe trabajar en forma individual.
- Las respuestas a las preguntas que se le formulan, deben ser consignadas ÚNICAMENTE en las hojas de respuestas que se le han entregado.
- Los dibujos que aparecen en la prueba no están hechos a escala.
- El formulario de preguntas es suyo, por lo que puede realizar en él todas las anotaciones, cálculos o dibujos que le sean necesarios para resolver satisfactoriamente la prueba.
- Los únicos instrumentos cuyo uso se permite son los necesarios para escribir y dibujar. Se prohíbe el uso de libros, libretas de notas, tablas y calculadora.
- El examen tiene una duración máxima de tres horas.
- Escriba claramente los datos que se le solicitan en las hojas de respuestas.

SIMBOLOGÍA

$\overline{AB}$	segmento de extremos A y B	$\angle ABC \cong \angle DEF$	congruencia de ángulos
AB	medida de $\overline{AB}$	$\triangle ABC \cong \triangle DEF$	congruencia de triángulos
$\overrightarrow{AB}$	rayo de extremo A y que contiene a B	$ABC \leftrightarrow DEF$	correspondencia respectiva entre puntos
$\overleftrightarrow{AB}$	recta que contiene los puntos A y B	$\triangle ABC \sim \triangle DEF$	semejanza de triángulos
$\angle ABC$	ángulo de rayos $\overrightarrow{BA}$ y $\overrightarrow{BC}$	$\overline{AB} \cong \overline{CD}$	congruencia de segmentos
$m\angle ABC$	medida de $\angle ABC$	$\widehat{AB}$	arco de extremos A y B
$\triangle ABC$	triángulo de vértices A, B, C	$m\widehat{AB}$	medida de $\widehat{AB}$
$\square ABCD$	cuadrilátero de vértices A, B, C, D	(ABC)	área de ΔABC
$\parallel$	paralelismo	$(ABCD)$	área de $\square ABCD$
$\perp$	perpendicularidad	$P-Q-R$	P, Q, R puntos colineales, con Q entre los puntos P y R

I Parte: Selección única **Valor 20 puntos, 2 pts c/u**

1. La cantidad de números enteros mayores que 99 pero menores que 1000, que cumplen la condición de que el cubo de las decenas más el doble de las unidades más 100 veces las centenas es igual a dicho número corresponde a

   (a) 12

   (b) 18

   (c) 20

   (d) 24

   Pregunta eliminada debido a que la solución correcta es 27, la cual no estaba entre las opciones

- Opción correcta: NINGUNA

- **Solución:**

  Como los números son de tres dígitos se tiene que son de la forma $100a + 10b + c$ y por las condiciones del problema

$$b^3 + 2c + 100a = 100a + 10b + c$$
$$b^3 + 2c = 10b + c$$
$$10b - b^3 = c$$

  Considerando casos:

  Si $b = 0$ entonces $0 = c$ con lo que se tiene los números $100, 200, \cdots, 900$.
  Si $b = 1$ entonces $10 - 1^3 = 9 = c$ con lo que se tiene los números $119, 219, \cdots, 919$.
  Si $b = 2$ entonces $20 - 2^3 = 12 = c$ que no corresponde a un dígito.
  Si $b = 3$ entonces $30 - 3^3 = 3 = c$ con lo que se tiene los números $133, 233, \cdots, 933$.
  Si $b \geq 4$ el valor de c es negativo. Por tanto hay 27 números que cumplen la condición.

2. Considere cierto entero positivo n. Si n tiene exactamente ocho divisores positivos, entonces la máxima cantidad de divisores positivos que puede tener n^3 corresponde a

   (a) 40

   (b) 64

   (c) 126

   (d) 512

- Opción correcta: (b)

- **Solución:**

  Sabemos, para encontrar la descomposicion en primos de un entero n es

$p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \cdot p_3^{\alpha_3} \cdot \ldots \cdot p_k^{\alpha_k}$, donde este número tendrá $(\alpha_1+1)(\alpha_2+1)(\alpha_3+1)\ldots(\alpha_k+1)$ divisores. Por lo anterior, se puede observar que hay únicamente tres casos para la descomposición en primos de n: p^7, p^3q y pqr (donde p, q y r son primos diferentes).

Veamos cada caso:

Caso I: $n = p^7$. En este caso se tiene que la descomposición en primos de n^3 es p^{21}, por lo que tiene 22 divisores.

Caso II: $n = p^3q$. Se tiene $n^3 = p^9q^3$, por lo que tiene 40 divisores.

Caso III: $n = pqr$. Se tiene $n^3 = p^3q^3r^3$, por lo que tiene 64 divisores.

Por la tanto, la cantidad máxima de divisores positivos que puede tener n^3 es 64.

3. Una solución de la ecuación

$$x\sqrt{2} + \sqrt{6 - 2\sqrt{5}} = \sqrt{6 + 2\sqrt{5}}$$

es

(a) 0.

(b) 1.

(c) 2.

(d) $\sqrt{2}$.

- Opción correcta: (d)
- **Solución:**

Observe que

$$\begin{aligned}
x\sqrt{2} + \sqrt{6 - 2\sqrt{5}} = \sqrt{6 + 2\sqrt{5}} \quad \Rightarrow \quad x\sqrt{2} &= \sqrt{6+2\sqrt{5}} - \sqrt{6-2\sqrt{5}} \\
\Rightarrow \quad \left(x\sqrt{2}\right)^2 &= \left(\sqrt{6+2\sqrt{5}} - \sqrt{6-2\sqrt{5}}\right)^2 \\
\Rightarrow \quad 2x^2 &= 6 + 2\sqrt{5} + 6 - 2\sqrt{5} - 2\sqrt{6^2 - (2\sqrt{5})^2} \\
\Rightarrow \quad 2x^2 &= 12 - 2\sqrt{16} \\
\Rightarrow \quad 2x^2 &= 4 \\
\Rightarrow \quad x^2 &= 2 \\
\Rightarrow \quad x &= \pm\sqrt{2}
\end{aligned}$$

4. La suma de cinco enteros consecutivos es 10^{2019}. El número de en medio, corresponde a

(a) 2^{2018}

(b) 5^{2018}

(c) 10^{2018}

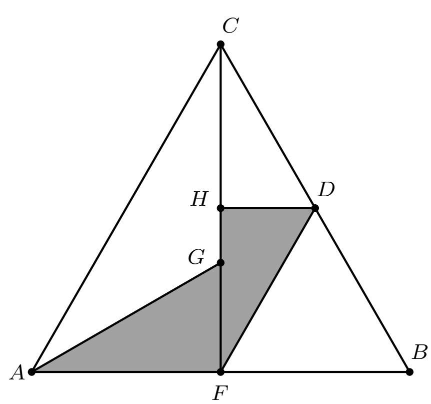
(d) $2 \cdot 10^{2018}$

- Opción correcta: (d)
- **Solución:**

  Cinco números consecutivos pueden expresarse de la forma $n-2, n-1, n, n+1, n+2$, cuya suma es $5n$ y el número de en medio es n.
  Como la suma de todos ellos es 10^{2019} entonces se tiene $5n = 10^{2019}$, por lo que

$$n = \frac{10^{2019}}{5} = 2 \cdot \frac{10^{2019}}{2 \cdot 5} = 2 \cdot 10^{2018}$$

5. En el triángulo equilátero $\triangle ABC$, los puntos A, G, D son colineales, con D punto medio del $\overline{BC}$, además el $\overline{CF}$ es una altura del $\triangle ABC$ y $\overline{HD}$ es perpendicular a $\overline{CF}$. Si el trapecio $\square ACDF$ tiene un área de $18cm^2$ entonces el área, en cm^2, del polígono $AFDHG$ corresponde a



(a) 9

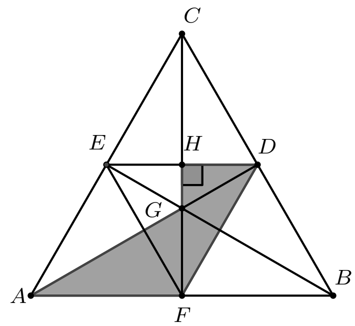
(b) 8

(c) 7

(d) 6

- Opción correcta: (c)
- **Solución:**

  Completando la figura como se muestra a continuación, se observa que el trapecio $ACDF$ es formado por tres triángulos equiláteros de área $6cm^2$, además el triángulo EFD es formado por 6 triángulos de área $1cm^2$ y el triángulo AFE es formado por 2 triángulos de área $3cm^2$. Por tanto el área del poligono $AFDHG$ es $7cm^2$



6. En un tablero cuadrado de tamaño 9×9 se pintan dos casillas de color rojo, y el resto de color azul. Dos de estas formas de pintar se dicen equivalentes si se puede obtener una rotando la otra $90°$. La cantidad de formas **NO** equivalentes de pintar el tablero es

   (a) 800

   (b) 810

   (c) 816

   (d) 820

- Opción correcta: (d)
- **Solución:**

  Hay $\binom{81}{2} = 3240$ formas de escoger dos casillas. Ahora cuando las casillas rojas no están pintadas diametralmente opuestas hay 4 configuraciones equivalentes a esa forma de pintar, cuando están diametralmente opuestas hay 2. Hay $\frac{81-1}{2} = 40$ parejas de casillas diametralmente opuestas. Así la cantidad de formas no equivalentes de pintar el tablero es

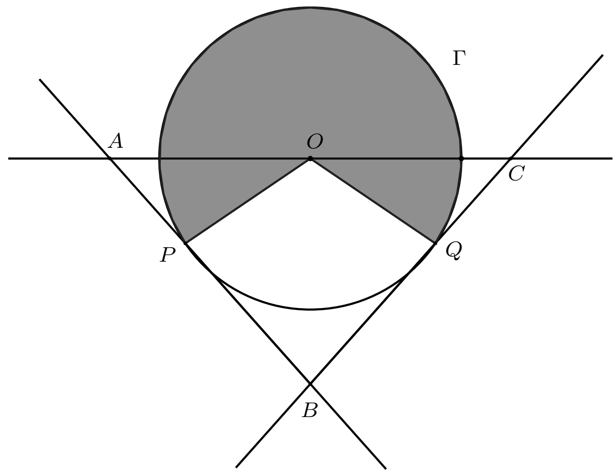
$$\frac{3240 - 40}{4} + \frac{40}{2} = 820.$$

7. En una de las finales de OLCOMA participaron 100 estudiantes y se hospedaron en un hotel que tiene 100 habitaciones, cada uno en una habitación. Los estudiantes para divertirse inventan un juego. Todos ellos realizan este proceso: el primer estudiante abre todas las puertas de las habitaciones. El segundo de los estudiantes cierra sólo las que sean múltiplos de 2. El tercero abre o cierra, según corresponda, las puertas de las habitaciones que son múltimplo de 3 (las puertas que encuentre cerradas las abrirá y las que estén abiertas las cerrará). El cuarto estudiante hará lo mismo con las puertas que son múltimplo de 4. Continúan así hasta el estudiante que está en la habitación 100. Al finalizar el último estudiante, la cantidad de puertas que quedan abiertas es
   (a) 0
   (b) 10
   (c) 16
   (d) 25

- Opción correcta: (b)
- **Solución:**

  El estudiante n solo puede abrir o cerrar las puertas $n, n+1, \cdots, 100$, por lo cual las puertas $1, 2, 3, \cdots, n-1$ ya habrán quedado determinadas. Si una puerta queda abierta o cerrada dependerá de los divisores que posea, pues sus divisores serán múltiplos. Así si la cantidad de divisores es par entonces la puerta está cerrada y si la cantidad de divisores es impar la puerta estará abierta. Luego los únicos números que tienen una cantidad impar de divisores son los cuadrados perfectos. De esta forma las puertas que estarán abiertas son la 1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64, 81 y 100, en total 10 puertas.

8. Considere el triángulo rectángulo $\triangle ABC$, recto en B. Sea O un punto tal que $A - O - C$ y Γ un círculo centrado en O y tangente a $\overline{AB}$ y a $\overline{BC}$ en los puntos P y Q respectivamente.



Si $AC = 2\sqrt{2}$ y $m\angle ACB = 45°$, el área de la región sombreada corresponde a

(a) $\frac{3\pi}{4}$

(b) $\frac{3\pi}{2}$

(c) $2 - \frac{\pi}{4}$

(d) $2 - \frac{\pi}{2}$

- Opción correcta: (a)
- **Solución:**

  Como P y Q son puntos de tangencia entonces $m\angle OPB = m\angle OQB = 90°$. Como además $m\angle ABC = 90°$ entonces $m\angle POQ = 90°$.

  Como $m\angle ACB = 45°$ entoncs $m\angle CAB = 45°$; así $\triangle ABC$ es un triángulo isósceles y por ende $AB = BC = 2$, por lo que el área del $\triangle ABC$ es 2.

  Considere ahora los triángulos $\triangle AOB$ y $\triangle COB$, tomando como bases $\overline{AB}$ y $\overline{BC}$ respectivamente. Entonces

  $$(ABC) = (AOB) + (COB) \Rightarrow 2 = \frac{AB \cdot OP}{2} + \frac{BC \cdot OQ}{2} \Rightarrow 2 = OP + OQ = 2 \cdot OP \Rightarrow OP = 1.$$

  Por lo tanto el radio de la circunferencia mide 1.

  El área sombreada corresponde a un sector circular de ángulo $270° = \frac{3\pi}{2}$ y radio 1, que es igual a $A = \frac{\pi \cdot r^2 \cdot \alpha}{2\pi} = \frac{3\pi}{4}$.

9. Considere la ecuación $2x^2 + bx + c = 0$, con $b, c \in \mathbb{Z}$ y sean x_1 y x_2, con $x_2 > x_1$, sus raíces. Si $x_1 + x_2 = 4$ y $x_1 x_2 = \frac{1}{2}$ entonces el cociente $\frac{x_1}{x_2}$ es un número

(a) irracional
(b) natural
(c) entero no natural
(d) racional no entero

- Opción correcta: (a)
- **Solución:**
Como x_1 y x_2 son las soluciones de la ecuación, se puede expresar como $2(x-x_1)(x-x_2)=0$. Desarrollando se obtiene

$$2\left[x^2 - x(x_1+x_2) + x_1\cdot x_2\right] = 2\left(x^2 - 4x + \frac{1}{2}\right) = 2x^2 - 8x + 1 = 0$$

Aplicando fórmula general se tiene $x_1 = \dfrac{4-\sqrt{14}}{2}$, $x_2 = \dfrac{4+\sqrt{14}}{2}$, por lo que

$$\frac{x_1}{x_2} = \frac{4-\sqrt{14}}{4+\sqrt{14}} = 15 - 4\sqrt{14}$$

Lo cual es un número irracional.

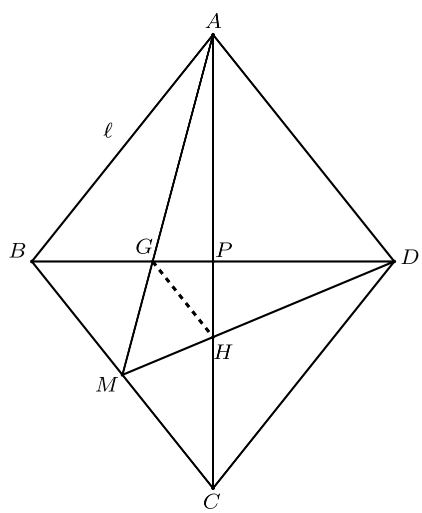
10. Considere el rombo $\square ABCD$ de lado ℓ. Sea P el punto de intersección de las diagonales de $ABCD$ y sea M el punto medio de $\overline{BC}$. Si G es el punto de intersección de $\overline{AM}$ y $\overline{BP}$ y H es el punto de intersección de $\overline{DM}$ y $\overline{AC}$ entonces la longitud del segmento $\overline{GH}$ corresponde a

    (a) $\dfrac{\ell}{5}$

    (b) $\dfrac{\ell}{4}$

    (c) $\dfrac{\ell}{3}$

    (d) $\dfrac{\ell}{2}$



- Opción correcta: $c)$

- **Solución:**

  Como $\overline{BD}$ y $\overline{AC}$ son las diagonales del rombo, entonces $BP = PD$ y $AP = PC$. Así $\overline{AM}$ y $\overline{BP}$ son medianas del triángulo $\triangle ABC$, por lo que G es el baricentro del $\triangle ABC$ y en consecuencia $\dfrac{MG}{MA} = \dfrac{1}{3}$. Análogamente se deduce que H es el baricentro del triángulo $\triangle BDC$, por lo que $\dfrac{MH}{MD} = \dfrac{1}{3}$. Y como $\angle GMH \cong \angle AMD$ entonces $\triangle GMH \sim \triangle AMD$ (criterio lado-ángulo-lado), con razón de proporción $\dfrac{1}{3}$. Por ende $\dfrac{GH}{AD} = \dfrac{1}{3} \Rightarrow \dfrac{GH}{\ell} = \dfrac{1}{3} \Rightarrow GH = \dfrac{\ell}{3}$.

II Parte: Desarrollo **Valor 14 puntos, 7 pts c/u**

Instrucciones: Los siguientes ejercicios deben ser resueltos en las hojas adicionales que se le entregaron. Conteste en forma ordenada, completa y clara. Se califica procedimientos y respuesta.

1. En un conjunto B que contiene siete números enteros consecutivos, se cumple que la suma de los cuadrados de los cuatro números más pequeños es igual a la suma de los cuadrados de los tres más grandes. Determine todos los posibles conjuntos B que cumplen con lo enunciado.

   Solución:

   Si x es el menor de los enteros, se debe cumplir que

   $$x^2 + (x+1)^2 + (x+2)^2 + (x+3)^2 = (x+4)^2 + (x+5)^2 + (x+6)^2$$

   Desarrollando las potencias se tiene:

   $$x^2 + (x+1)^2 + (x+2)^2 + (x+3)^2 = (x+4)^2 + (x+5)^2 + (x+6)^2$$

   $$\Rightarrow x^2 + x^2 + 2x + 1 + x^2 + 4x + 4 + x^2 + 6x + 9 = x^2 + 8x + 16 + x^2 + 10x + 25 + x^2 + 12x + 36$$

   $$\Rightarrow x^2 + 12x + 14 = 30x + 77$$

   $$\Rightarrow x^2 - 18x - 63 = 0 \Rightarrow (x-21)(x+3) = 0$$

   Los posibles conjuntos son $B = \{-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3\}$ y $B = \{21, 22, 23, 24, 25, 26, 27\}$.

2. Considere la siguiente suma:

$$1^1 + 2^2 + 3^3 + ... + 100^{100}$$

Determine el dígito de las unidades de dicha suma.

Solución:

Primero es necesario conocer las unidades de las primeras 10 potencias de los números del 1 a 10. Se resume en el siguiente cuadro:

n=	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Unidades de 1^n	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
Unidades de 2^n	2	4	8	6	2	4	8	6	2	4
Unidades de 3^n	3	9	7	1	3	4	7	1	7	9
Unidades de 4^n	4	6	4	6	4	6	4	6	4	6
Unidades de 5^n	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5
Unidades de 6^n	6	6	6	6	6	6	6	6	6	6
Unidades de 7^n	7	9	3	1	7	9	3	1	7	9
Unidades de 8^n	8	4	2	6	8	4	2	6	8	4
Unidades de 9^n	9	1	9	1	9	1	9	1	9	1
Unidades de 10^n	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

Es importante conocer que la unidades de un producto es el resultado de multiplicar las unidades del los factores.
Así 11^{11} tiene las mismas unidades que 1^{11} que es 1.
Luego $1^1 + 11^{11} + 21^{21} + ... + 91^{91}$ es la suma de 10 número con unidad 1, por tanto las unidades de esa suma es 0.

Luego 12^{12} tiene las mismas unidades que 2^{12}, además $2^{12} = 2^{10}2^2$, y esa unidad es 6. De igual manera 22^{22} tiene las mismas unidades que 2^{22}, además $2^{22} = 2^{10}2^{12}$, y esa unidad es 4. Con el mismo razonamiento se tiene que la unidades de 32^{32} son 6, las de 42^{42} son 4.

Luego $2^2 + 12^{12} + 22^{22} + ... + 92^{92}$ son 5 términos con 4 en el dígito de las unidades y 5 términos con 6 como dígito de las unidades, por los que $2^2 + 12^{12} + 22^{22} + ... + 92^{92}$ tiene como dígito de las unidades a 0.

De igual manera 13^{13} tiene las mismas unidades que 3^{13}, además $3^{13} = 3^{10}3^3$, y esa unidad es 3. Además 23^{23} tiene las mismas unidades que 3^{23}, además $3^{23} = 3^{10}3^{13}$, y esa unidad es 7.Las unidades para estas potencias son 3 y 7

Luego $3^3 + 13^{13} + 23^{23} + ... + 93^{93}$ son 5 términos con 3 en el dígito de las unidades y 5 términos con 7 como dígito de las unidades, por los que $3^3 + 13^{13} + 23^{23} + ... + 93^{93}$ tiene como dígito de las unidades a 0.

Aplicando el mismo razonamiento para las demás potencias se tiene:

- $4^4 + 14^{14} + 24^{24} + ... + 94^{94}$ son 10 términos con 6 como dígito de las unidades, por los que $4^4 + 14^{14} + 24^{24} + ... + 94^{94}$ tiene como dígito de las unidades a 0.
- $5^5 + 15^{15} + 25^{25} + ... + 95^{95}$ son 10 términos con 5 como dígito de las unidades, por los que $5^5 + 15^{15} + 25^{25} + ... + 95^{95}$ tiene como dígito de las unidades a 0.
- $6^6 + 16^{16} + 26^{26} + ... + 96^{96}$ son 10 términos con 6 como dígito de las unidades, por los que $4^4 + 14^{14} + 24^{24} + ... + 94^{94}$ tiene como dígito de las unidades a 0.
- $7^7 + 17^{17} + 27^{27} + ... + 97^{97}$ son 5 términos con 7 en el dígito de las unidades y 5 términos con 3 como dígito de las unidades, por los que $7^7 + 17^{17} + 27^{27} + ... + 97^{97}$ tiene como dígito de las unidades a 0.
- $8^8 + 18^{18} + 28^{28} + ... + 98^{98}$ son 5 términos con 6 en el dígito de las unidades y 5 términos con 4 como dígito de las unidades, por los que $8^8 + 18^{18} + 28^{28} + ... + 98^{98}$ tiene como dígito de las unidades a 0.
- $9^9 + 19^{19} + 29^{29} + ... + 99^{99}$ son 10 términos con 9 como dígito de las unidades, por los que $9^9 + 19^{19} + 29^{29} + ... + 99^{99}$ tiene como dígito de las unidades a 0.
- $10^{10} + 20^{20} + 30^{30} + ... + 100^{100}$ son 10 términos con 0 como dígito de las unidades, por los que $10^{10} + 20^{20} + 30^{30} + ... + 100^{100}$ tiene como dígito de las unidades a 0.

Para finalizar $1^1 + 2^2 + 3^3 + ... + 100^{100}$ se compone por 10 término con 0 unidades, por lo que sus unidades son 0.