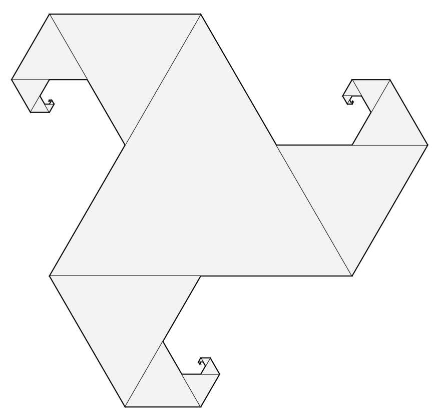
XXXII OLIMPIADA COSTARRICENSE DE MATEMÁTICAS

MEP - UNA - UCR - MICITT - UNED - TEC

SOLUCIÓN
SEGUNDA ELIMINATORIA



Nivel III
$(10^\circ - 11^\circ - 12^\circ)$

2020

Estimado estudiante:

La Comisión de las Olimpiadas Costarricenses de Matemáticas 2020 le saluda y le da la más cordial bienvenida a la Segunda Eliminatoria Nacional de estas justas académicas, deseándole los mayores éxitos.
La prueba consta de un total de 20 preguntas de selección única.

Puede consultar la lista de estudiantes clasificados a partir del XXX, en la siguiente dirección electrónica:

www.olcoma.com

INDICACIONES GENERALES

- Debe trabajar en forma individual.
- Las respuestas a las preguntas que se le formulan, deben ser consignadas ÚNICAMENTE en la hoja de respuestas que se le ha entregado.
- Los dibujos que aparecen en la prueba no necesariamente están hechos a escala.
- El formulario de preguntas es suyo, por lo que puede realizar en él todas las anotaciones, cálculos o dibujos que le sean necesarios para resolver satisfactoriamente la prueba.
- No se permite el uso de hojas adicionales.
- Los únicos instrumentos cuyo uso se permite son los necesarios para escribir y dibujar. Se prohíbe el uso de libros, libretas de notas, tablas y calculadora.
- El examen tiene una duración máxima de tres horas.
- Escriba claramente los datos que se le solicitan en la hoja de respuestas.

SIMBOLOGÍA

$\overline{AB}$	segmento de extremos A yB	$\angle ABC \approx \angle DEF$	congruencia de ángulos
AB	medida de $\overline{AB}$	$\triangle ABC \cong \triangle DEF$	congruencia de triángulos
$\overrightarrow{AB}$	rayo de extremo A y que contiene a B	$ABC \leftrightarrow DEF$	correspondencia respectiva entre puntos
$\overleftrightarrow{AB}$	recta que contiene los puntos A y B	$\triangle ABC \sim \triangle DEF$	semejanza de triángulos
$\angle ABC$	ángulo de rayos $\overrightarrow{BA}$ y $\overrightarrow{BC}$	$\overline{AB} \cong \overline{CD}$	congruencia de segmentos
$m\angle ABC$	medida de $\angle ABC$	$\widehat{AB}$	arco de extremos A y B
$\triangle ABC$	triángulo de vértices A, B, C	$m\widehat{AB}$	medida de $\widehat{AB}$
$\square ABCD$	cuadrilátero de vértices A, B, C, D	(ABC)	área de ΔABC
$\parallel$	paralelismo	$(ABCD)$	área de $\square ABCD$
$\perp$	perpendicularidad	$P-Q-R$	P, Q, R puntos colineales, con Q entre los puntos P y R

I Parte: Selección única **Valor 24 puntos, 2 pts c/u**

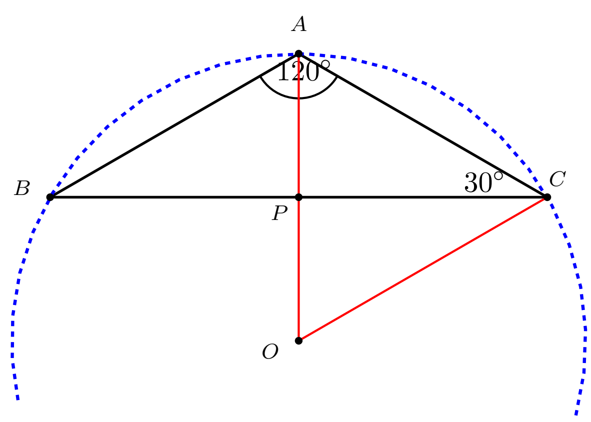
1. Galilea visita a su amigo Bruno y le plantea un juego para salir de la rutina. Cada uno da 25 monedas de 100 colones, el juego consiste en que cada jugador extrae, alternadamente, una, dos, tres o cuatro monedas del montón y gana quién hace la última extracción.
   Al analizar el juego, con certeza se tiene que:
   (a) El jugador que inicie puede establecer la estrategia para ganar.
   (b) El jugador que haga el segundo turno puede establecer la estrategia para ganar.
   (c) No es posible plantear una estrategia ganadora.
   (d) El juego puede acabar en empate.

- Opción correcta: (b)
- Solución: La cantidad de monedas son 50, el cual es múltiplo de 5. Por lo tanto, el jugador que realice el segundo turno puede establecer la estrategia ganadora, asegurándose que la cantidad de monedas restantes sea múltiplo de 5.

2. Considere un triángulo $\triangle ABC$ con $AB = AC$, $m\angle BAC = 120°$ y $BC = 2$. La medida del radio de la circunferencia circunscrita al triángulo corresponde a
   (a) $\frac{2}{3}\sqrt{3}$
   (b) $\frac{\sqrt{3}}{3}$
   (c) $2\sqrt{3}$
   (d) $\sqrt{3}$

- Opción correcta: (a)
- Solución:
  Primero notemos que $m\angle ABC = m\angle ACB = 30°$. Sea O el centro de la circunferencia y P la intersección de $\overline{OA}$ con $\overline{BC}$. Vemos que $\triangle APC$ es semiequilátero y $PC = 1$, por lo que, por las relaciones entre los lados de un triángulo especial $(30°, 60°, 90°)$ se puede obtener que $AC = \frac{2\sqrt{3}}{3}$.

  Por otro lado, en $\triangle OAC$ se tiene $OA = OC$, pues ambos son radios, por lo que $m\angle OCA = m\angle OAC = 60°$. Entonces $\triangle OAC$ es equilátero y $OA = AC = \frac{2\sqrt{3}}{3}$



3. Sean a, b y c números reales positivos tales que $a+b+c=10$ y $a^2+b^2+c^2=99$. El valor de $ab+bc+ca$ corresponde a:

   (a) 10
   (b) 1
   (c) 2
   (d) $\frac{1}{2}$

- Opción correcta: (d)
- Solución: Basta notar que $(a+b+c)^2 = a^2+b^2+c^2+2(ab+ac+bc)$, por lo que

$$100 = 99 + 2(ab+ac+bc) \implies ab+ac+bc = \frac{100-99}{2} = \frac{1}{2}.$$

4. La cantidad de números enteros n tales que $\frac{2n-1}{n+7}$ sea un número entero corresponde a:

   (a) 1
   (b) 2
   (c) 4
   (d) 8

- Opción correcta: (d)
- Solución: Note que

$$\frac{2n-1}{n+7} = \frac{n+7+n-8}{n+7} = 1 + \frac{n-8}{n+7} = 1 + \frac{n+7-15}{n+7} = 2 - \frac{15}{n+7},$$

por lo que el problema se reduce a determinar los $n \in \mathbb{Z}$ tales que $n+7$ divida a 15. Como 15 posee 8 divisores enteros, hay un total de 8 valores de n que satisfacen lo pedido.

5. En un torneo de boliche jugarán 9 equipos; cada equipo jugará una vez contra cada uno de los otros 8 equipos y no se permiten empates. En cada juego, al ganador se le otorgará 1 punto y al perdedor 0 puntos. Si se eliminan todos los equipos que al final del torneo hayan acumulado 2 puntos o menos, la máxima cantidad de equipos que podrán quedar eliminados corresponde a:

   (a) 3
   (b) 4
   (c) 5
   (d) 6

- Opción correcta: (c)
- Solución: Esto ocurre si, por ejemplo, 4 de los equipos ganan todos sus juegos contra los otros 5 (obteniendo así, al menos 5 puntos cada uno), y entre los 5 restantes cada uno gana 2 juegos (esto es posible si, digamos que son a, b, c, d y e y cada uno gana al que le sigue en las listas a, b, c, d, e, a y a, c, e, b, d, a (que son los 10 juegos posibles entre ellos).

6. La cantidad de pares ordenados (x, y) de números enteros positivos tales que $(x+y)^2 - 13 = (xy-6)^2$ corresponde a

   (a) 0

   (b) 1

   (c) 2

   (d) 4

- Opción correcta: (c)

- Solución: La ecuación se puede escribir como

  $$(xy-6)^2+13 = (x+y)^2 \iff (xy-6)^2-(x+y)^2 = -13 \iff [xy-6+(x+y)][xy-6-(x+y)] = -13.$$

  Llamenos $a = xy$, $b = x+y$. Como 13 es un número primo entonces podemos tener los siguientes casos:

  I) $\begin{cases} a-6+b &= -13 \\ a-6-b &= 1 \end{cases} \Rightarrow 2a-12 = -12 \Rightarrow a = 0 \Rightarrow xy = 0.$
  Como los números son positivos no se generan soluciones.

  II) $\begin{cases} a-6+b &= 1 \\ a-6-b &= -13 \end{cases} \Rightarrow 2a-12 = -12 \Rightarrow a = 0 \Rightarrow xy = 0.$
  Vemos que es igual al caso anterior.

  III) $\begin{cases} a-6+b &= -1 \\ a-6-b &= 13 \end{cases} \Rightarrow 2a-12 = 12 \Rightarrow a = 12 \Rightarrow 12-6+b = -1 \Rightarrow b = -7.$
  Es decir, $x+y = -7$ y como los números son positivos no se generan soluciones.

  IV) $\begin{cases} a-6+b &= 13 \\ a-6-b &= -1 \end{cases} \Rightarrow 2a-12 = 12 \Rightarrow a = 12 \Rightarrow 12-6+b = 13 \Rightarrow b = 7$
  Es decir, $xy = 12$ y $x+y = 7$, de donde se obtienen las soluciones $(x, y) \in \{(3,4), (4,3)\}$.

7. La cantidad de números menores a 30 000, de cinco cifras, con la forma $a2ba0$, con a y b dígitos, que son divisibles por los cuatro primeros números primos es

   (a) 0

   (b) 1

   (c) 2

   (d) 3

- Opción correcta: (b)

- Solución: El número $a2ba0$ debe ser divisible por 2,3,5, y 7. Como termina en 0, es divisible por 2 y 5 sin importar los valores de a y b. Debemos analizar únicamente las divisibilidades por 3 y 7.
  Para ser divisible por 3 debe suceder que $a+2+b+a+0 = 2a+2+b$ sea múltiplo de 3. Para que sea divisible por 7 se tiene que $a2ba$ sea múltiplo de 7, lo que nos lleva a que $a2b-2a$ sea

múltiplo de 7
Como debe ser de 5 cifras y menor a 30 000, se tienen únicamente dos posibilidades para a: $a = 1$ o $a = 2$

Analicemos ambos casos:

I) $a = 1 \Rightarrow 2a + 2 + b = 4 + b$. Para que esto sea múltiplo de 3 debe ocurrir que $b \in \{2, 5, 8\}$.
$b = 2 \Rightarrow a2b - 2a = 122 - 2 = 120$ NO es múltiplo de 7.
$b = 5 \Rightarrow a2b - 2a = 125 - 2 = 123$ NO es múltiplo de 7.
$b = 8 \Rightarrow a2b - 2a = 128 - 2 = 126$ Sí es múltiplo de 7.

II) $a = 2 \Rightarrow 2a + 2 + b = 6 + b$. Para que esto sea múltiplo de 3 debe ocurrir que $b \in \{0, 3, 6, 9\}$.
$b = 0 \Rightarrow a2b - 2a = 220 - 4 = 216$ NO es múltiplo de 7.
$b = 3 \Rightarrow a2b - 2a = 223 - 4 = 219$ NO es múltiplo de 7.
$b = 6 \Rightarrow a2b - 2a = 226 - 4 = 222$ NO es múltiplo de 7.
$b = 9 \Rightarrow a2b - 2a = 229 - 4 = 225$ NO es múltiplo de 7.

Podemos ver que el único número que cumple todos estos requisitos es 12 810

8. Considere un reloj con agujas que marcan las horas y los minutos. ¿A qué hora entre las 4 y las 5 la aguja del minutero y la aguja de la hora forman por primera vez un ángulo de 45°?.

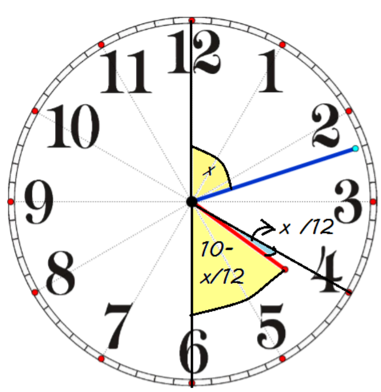
(a) 4 con 13 minutos.

(b) 4 con $\dfrac{148}{11}$ minutos.

(c) 4 con $\dfrac{150}{11}$ minutos.

(d) 4 con $\dfrac{152}{11}$ minutos.

- Opción correcta: (c)
- Solución:



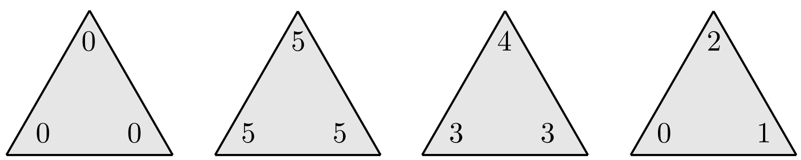
Cuando la aguja del minutero hace una vuelta entera (60 minutos) la aguja de la hora transcurre el equivalente a 5 minutos. Así, si el minutero avanza x minutos, la aguja de las horas avanza $\dfrac{x}{12}$.

De la marca 4 a 6 hay 10 minutos, de esos la aguja de las horas habrá avanzado $\frac{x}{12}$. Por lo que para llegar a la marca de 6 haría falta $10 - \frac{x}{12}$.

Ahora bien. El ángulo entre la marca 12 y el 6 es de 180°. Así 180° grados equivalen al transcurso de los 30 minutos.
Como el ángulo entre las agujas es 45° y el ángulo extra es 135°, entonces de los 135° tiene su equivalente en minutos como $\frac{45}{2}$ minutos.
Por tanto el avance del minutero, más lo que le falta a la aguja de la hora para llegar a la marca de 6 equivale a 135° , es decir.

$$x + 10 - \frac{x}{12} = \frac{45}{2} \Rightarrow \frac{11x}{12} = \frac{25}{2} \Rightarrow x = \frac{25}{2} \cdot 1211 \Rightarrow x = \frac{150}{11}$$

9. Un juego tiene fichas triangulares con números del 0 al 5 en cada esquina. Las fichas incluyen todas las combinaciones desde 0, 0, 0 hasta 5, 5, 5 y no importa el orden. Algunas posibles fichas se muestran en la figura. La cantidad total de fichas que tiene el juego es
   (a) 55
   (b) 56
   (c) 59
   (d) 60



- Opción correcta: (b)
- Solución: Observe que hay 6 fichas de la forma (k, k, k), una para cada uno de los valores $k \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$. Hay 30 fichas de la forma (k, k, x) con $x \neq k$, cinco para cada uno de los 6 posibles valores de k. Además, hay 20 fichas con los tres valores diferentes, pues para eso se deben tomar 3 números de 6 posibles: $\binom{6}{3} = \frac{6!}{3!(6-3!)} = 20$
  En total hay $6 + 30 + 20 = 56$ fichas.

  Otra forma de ordenar las fichas para hacer el conteo es el siguiente:
  Para cada k, con $k \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$, hay 6 fichas que tienen dos (o tres) números k: desde $(k, k, 0)$ hasta $(k, k, 5)$. Eso da un total de 36 fichas.

  Las que contienen un solo 0, y que no se hayan contado en el caso anterior:
  Hay 4 que contienen 0 y 1: $(0, 1, 2)$, $(0, 1, 3)$, $(0, 1, 4)$, $(0, 1, 5)$
  Tres que contienen 0 y 2: $(0, 2, 3)$, $(0, 2, 4)$, $(0, 2, 5)$
  Dos que contienen 0 y 3: $(0, 3, 4)$, $(0, 3, 5)$
  Una que contiene 0 y 4: $(0, 4, 5)$
  En este caso se tienen $1 + 2 + 3 + 4 = 10$

  Las que contienen un solo 1, y que no se hayan contado en los casos anteriores:
  Hay tres que contienen 1 y 2: $(1, 2, 3)$, $(1, 2, 4)$, $(1, 2, 5)$
  Dos que contienen 1 y 3: $(1, 3, 4)$, $(1, 3, 5)$
  Una que contiene 1 y 4: $(1, 4, 5)$

En este caso se tienen $1 + 2 + 3 = 6$

Las que contienen un solo 2, y que no se hayan contado en los casos anteriores:
Hay dos que contienen 2 y 3: $(2, 3, 4)$, $(2, 3, 5)$
Una que contiene 2 y 4: $(2, 4, 5)$
En este caso se tienen $1 + 2 = 3$

Finalmente hay una ficha que contiene un solo 3, y que no se ha contado en los casos anteriores: $(3, 4, 5)$
En total hay $36 + 10 + 6 + 3 + 1 = 56$ fichas.

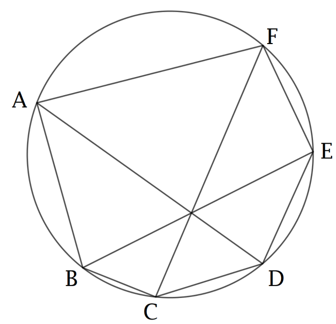
10. Un hexágono $ABCDEF$ satisface que se puede inscribir en un círculo y que las tres diagonales AD, BE y CF pasan por un mismo punto (la figura es ilustrativa y las longitudes no corresponden al problema). Si las medidas de los lados AB, BC, CD, DE y EF son 1, 2, 4, 8 y 16, en ese orden, entonces la longitud de FA es igual a:

(a) 4

(b) 8

(c) 16

(d) 32



- Opción correcta: (a)

- Solución: Sea P el punto de intersección de las tres diagonales. Los ángulos $\angle BAD$ y $\angle BED$ son congruentes porque subtienden el arco $\widehat{BD}$. Por lo tanto los triángulos $\triangle BAP$ y $\triangle DEP$ son semejantes (criterio AA), y así obtenemos que

$$\frac{AB}{DE} = \frac{AP}{EP}.$$

Análogamente,

$$\frac{CD}{FA} = \frac{CP}{AP}, \quad \frac{EF}{BC} = \frac{EP}{CP}.$$

De esta manera, multiplicando las tres expresiones obtenemos que

$$\frac{AB \cdot CD \cdot EF}{DE \cdot FA \cdot BC} = \frac{AP \cdot CP \cdot EP}{EP \cdot AP \cdot CP} = 1,$$

de donde concluimos que

$$FA = \frac{AB \cdot CD \cdot EF}{DE \cdot BC} = \frac{1 \cdot 4 \cdot 16}{2 \cdot 8} = 4.$$

11. Sea $N = 12345678910111213\cdots525354$ el número de 99 dígitos formado al escribir todos los números enteros desde 1 hasta 54 en orden creciente. El residuo de la división de N entre 45 es

    (a) 1

    (b) 4

    (c) 9

    (d) 18

- Opción correcta: (c)

- Solución: Primero, observe que $45 = 5 \cdot 9$. El residuo de la división de N entre 5 claramente es 4. Por otro lado, al sumar los dígitos de N se tiene que

  $$s(N) = 5(0+1+1\cdots+9)+1\cdot10+2\cdot10+3\cdot10+4\cdot10+(5+0)+(5+1)+(5+2)+(5+3)+(5+4) = 360$$

  que es divisible por 9, es decir, N es divisible por 9. Claramente $N-9$ también es divisible por 9, y termina en 5, de donde $N-9$ es divisible por 9 y por 5, y por ende, es divisible por 45. Luego, el residuo de la división de N entre 45 es 9.

12. Considere los números 222^{333} y 333^{222}, ¿cuál de las siguientes afirmaciones es correcta?

    (a) $222^{333} = 333^{222}$

    (b) $2 \cdot 222^{333} = 333^{222}$

    (c) $222^{333} > 333^{222}$

    (d) $222^{333} < 333^{222}$

- Opción correcta: (c)

- Solución: Para poder responder la pregunta planteada se desarrolla cada número de manera que sea evidente la relación entre ellos, veamos:

$$
\begin{array}{l|l}
222^{333} & 333^{222} \\
= (2\cdot111)^{333} & = (3\cdot111)^{222} \\
= (2\cdot111)^{333} & = (3\cdot111)^{222} \\
= 2^{333}\cdot111^{333} & = 3^{222}\cdot111^{222} \\
= 2^{3\cdot111}\cdot111^{333} & = 3^{2\cdot111}\cdot111^{222} \\
= (2^3)^{111}\cdot111^{333} & = (3^2)^{111}\cdot111^{222} \\
= 8^{111}\cdot111^{333} & = 9^{111}\cdot111^{222} \\
= 8^{111}\cdot111^{111+222} & \\
= 8^{111}\cdot111^{111}\cdot111^{222} & \\
= (8\cdot111)^{111}\cdot111^{222} & \\
= (8\cdot111)^{111}\cdot111^{222} & \\
= 888^{111}\cdot111^{222} &
\end{array}
$$

  Aquí se puede observer que $222^{333} = 888^{111}\cdot111^{222}$ y $333^{222} = 9^{111}\cdot111^{222}$, por lo tanto la relación que es verdadera corresponde a $222^{333} > 333^{222}$.

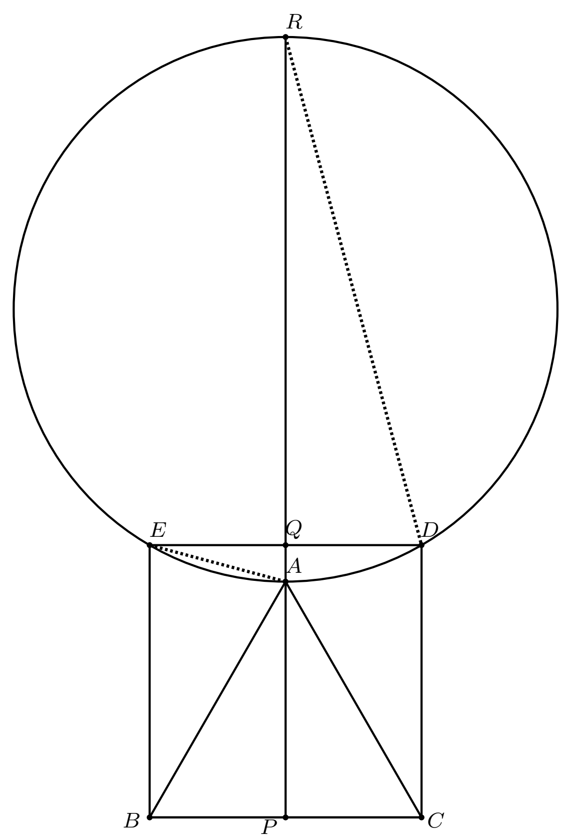
II Parte: Desarrollo **Valor 14 puntos, 7 pts c/u**

Instrucciones: Los siguientes ejercicios deben ser resueltos en hojas adicionales. **Debe responder cada pregunta en hojas separadas**. Conteste en forma ordenada, completa y clara. Se califica procedimientos y respuesta.

1. Sea $\triangle ABC$ un triángulo equilátero de lado 2 y $\square BCDE$ un cuadrado que contiene al punto A en su interior. Determine el área de la circunferencia que contiene los puntos A, D y E.

- Solución:

Considere el diámetro $\overline{AR}$ y sean P y Q los puntos de intersección de $\overleftrightarrow{AR}$ con $\overline{BC}$ y $\overline{DE}$, respectivamente. La altura del $\triangle ABC$ es $AP = \sqrt{2^2 - 1^2} = \sqrt{3}$, por lo que $AQ = 2 - \sqrt{3}$. Sea $x = RQ$.



Trace los segmentos $\overline{AE}$ y $\overline{RD}$.
Observe que $\triangle EAQ \sim \triangle RDQ$. Esto porque $m\angle EQA = m\angle RQD = 90°$ y $m\angle EAQ = m\angle RDQ$ porque ambos subtienden el mismo arco $\widehat{ER}$.

Se tiene entonces que $\dfrac{EQ}{RQ} = \dfrac{AQ}{DQ}$, es decir, $\dfrac{1}{x} = \dfrac{2-\sqrt{3}}{1}$, de donde se obtiene que $x = \dfrac{1}{2-\sqrt{3}}$ y racionalizando $x = 2 + \sqrt{3}$.

Así

$$AR = AQ + QR = (2 - \sqrt{3}) + (2 + \sqrt{3}) = 4,$$

por lo que el radio de la circunferencia es 2 y su área es $A = 2^2\pi = 4\pi$.

2. Determine la mayor suma posible S de enteros positivos $S = x + y$ que satisfacen la ecuación $x^2 - 5 \cdot 2^y = 9$.

- Solución:

Si $y = 1$, se tiene $x^2 - 5 \cdot 2 = 9 \Rightarrow x^2 = 19 \Rightarrow x \notin \mathbb{Z}^+$.

Si $y \geq 2$, entonces $x^2 - 5 \cdot 2^y = 9 \Rightarrow x^2 = 9 + 5 \cdot 2^y$; así, como 2^y es múltiplo de 4, $5 \cdot 2^y$ es múltiplo de 4 y $9 + 5 \cdot 2^y$ es impar. Con lo anterior, $x^2 = 9 + 5 \cdot 2^y$ es impar; luego, x es impar.

Si $x = 2k + 1$, con k no negativo, entonces

$$\begin{aligned}
& x^2 - 5 \cdot 2^y = 9 \\
\Rightarrow \quad & (2k+1)^2 - 3^2 = 5 \cdot 2^y \\
\Rightarrow \quad & (2k+1+3)(2k+1-3) = 5 \cdot 2^y \\
\Rightarrow \quad & 2(k+2) \cdot 2(k-1) = 5 \cdot 2^y \\
\Rightarrow \quad & (k+2)(k-1) = 5 \cdot 2^{y-2}
\end{aligned}$$

Si $y = 2$, se tiene $(k+2)(k-1) = 5$ y como no es posible para $k \in \mathbb{Z}$, necesariamente, debe cumplirse $y \geq 3$.

Para $y \geq 3$, en la expresión $(k+2)(k-1) = 5 \cdot 2^{y-2}$ se analizan las dos situaciones siguientes:

a) Si $k + 2$ es par, entonces $k - 1$ es impar y debe cumplirse que $k - 1$ divida a 5; así, $k = 2$ o $k = 6$.

Si $k = 2$, $4 \cdot 1 = 5 \cdot 2^{y-2} \Rightarrow 4 = 5 \cdot 2^{y-2} \Rightarrow k = 2$ no permite soluciones.

Si $k = 6$, $8 \cdot 5 = 5 \cdot 2^{y-2} \Rightarrow 8 = 2^{y-2} \Rightarrow y = 5$.

Además, $x = 2k + 1 \Rightarrow x = 13$ y $S = x + y = 13 + 5 = 18$.

b) Si $k + 2$ es impar, entonces $k - 1$ es par y debe cumplirse que $k + 2$ divida a 5; así, $k = 3$.

Si $k = 3$, $5 \cdot 2 = 5 \cdot 2^{y-2} \Rightarrow 2 = 2^{y-2} \Rightarrow y = 3$.

Además, $x = 2k + 1 \Rightarrow x = 7$ y $S = x + y = 7 + 3 = 10$.

Por lo tanto, la mayor suma posible de enteros que satisfacen $x^2 - 5 \cdot 2^y = 9$ es 18, cuando $x = 13$ y $y = 5$.