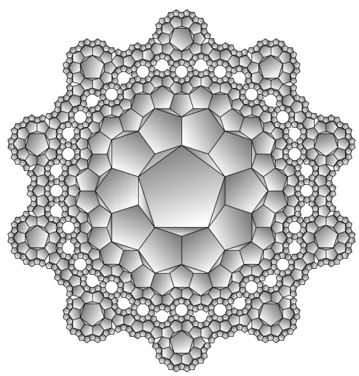
XXVIII OLIMPIADA COSTARRICENSE DE MATEMÁTICA

UNA - UCR - TEC - UNED - MEP - MICITT

SEGUNDA ELIMINATORIA NACIONAL



I Nivel

7°

2016

Estimado estudiante:

La Comisión Organizadora de las Olimpiadas Costarricenses de Matemáticas le saluda y felicita por haber clasificado a la segunda eliminatoria nacional de estas justas académicas. La prueba consta de dos partes: una primera parte de 12 preguntas de selección única, ponderadas con dos puntos cada respuesta correcta, y una segunda parte con 3 preguntas de desarrollo, con un valor de 7 puntos cada solución correcta.

Los resultados de esta eliminatoria se publicarán a partir del viernes 30 de setiembre, en la siguiente dirección electrónica:

www.olcoma.com

INDICACIONES GENERALES

- Debe trabajar en forma individual.
- Las respuestas a las preguntas que se le formulan, deben ser consignadas ÚNICAMENTE en la hoja de respuestas que se le ha entregado.
- Los dibujos que aparecen en la prueba no están hechos a escala.
- El formulario de preguntas es suyo, por lo que puede realizar en él todas las anotaciones, cálculos o dibujos que le sean necesarios para resolver satisfactoriamente la prueba.
- No se permite el uso de hojas adicionales.
- Los únicos instrumentos cuyo uso se permite son los necesarios para escribir y dibujar. Se prohíbe el uso de libros, libretas de notas, tablas y calculadora.
- El examen tiene una duración máxima de tres horas.
- Escriba claramente los datos que se le solicitan en la hoja de respuestas.

SIMBOLOGÍA

$\overline{AB}$	segmento de extremos A y B	$\angle ABC \cong \angle DEF$	congruencia de ángulos
AB	medida de $\overline{AB}$	$\triangle ABC \cong \triangle DEF$	congruencia de triángulos
$\overrightarrow{AB}$	rayo de extremo A y que contiene a B	$ABC \leftrightarrow DEF$	correspondencia respectiva entre puntos
$\overleftrightarrow{AB}$	recta que contiene los puntos A y B	$\triangle ABC \sim \triangle DEF$	semejanza de triángulos
$\angle ABC$	ángulo de rayos $\overrightarrow{BA}$ y $\overrightarrow{BC}$	$\overline{AB} \cong \overline{CD}$	congruencia de segmentos
$m\angle ABC$	medida de $\angle ABC$	$\widehat{AB}$	arco de extremos A y B
$\triangle ABC$	triángulo de vértices A, B, C	$m\widehat{AB}$	medida de $\widehat{AB}$
$\square ABCD$	cuadrilátero de vértices A, B, C, D	(ABC)	área de ΔABC
$\parallel$	paralelismo	$(ABCD)$	área de $\square ABCD$
$\perp$	perpendicularidad	$P - Q - R$	P, Q, R puntos colineales, con Q entre los puntos P y R

I Parte: Selección única **Valor 24 puntos, 2 pts c/u**

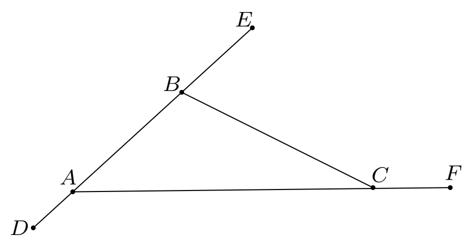
1. En la figura adjunta se tiene que $m\angle EBC$ es 20° menor que $m\angle DAC$. Si $m\angle BCF = 120^\circ$, entonces $m\angle BAC$ es

   (a) 50°

   (b) 60°

   (c) 70°

   (d) 80°



2. En una caja hay bolas iguales de cuatro colores distintos: azul, blanco, rojo y verde. Si se extrae una bola al azar, la probabilidad de extraer una azul es el doble que la de extraer una blanca; la probabilidad de extraer una blanca es el doble que la de extraer una roja; y la de extraer una roja es el doble que la de extraer una verde. La probabilidad de que al extraer una bola de la caja esta NO sea azul o verde es

   (a) $\frac{1}{5}$

   (b) $\frac{2}{5}$

   (c) $\frac{3}{5}$

   (d) $\frac{4}{5}$

3. En un cuadrado $ABCD$, E es un punto en $\overline{BC}$, tal que $m\angle BAE$ es la mitad de $m\angle DAE$. Si F es el punto de intersección de $\overline{AE}$ con $\overline{DB}$ y G es el pie de la perpendicular a $\overline{DC}$ desde F, entonces la medida de $\angle GFE$ es

   (a) 40°

   (b) 45°

   (c) 60°

   (d) 70°

4. Se dice que un número natural es *capicua* si al escribirlo se puede leer de igual forma de izquierda a derecha como de derecha a izquierda; por ejemplo, 23 432 es *capicua*. La cantidad de *capicuas* de 7 dígitos que tienen 4 dígitos diferentes es

   (a) 3024
   (b) 4536
   (c) 5040
   (d) 6561

5. Un juego consiste de una cuadrícula de 4×4 y fichas de dos formas (triángulos y cuadrados). Un jugador escoge un tipo de ficha y se la da al segundo jugador quien la coloca en cualquiera de las 16 casillas disponibles, luego el segundo jugador escoge un tipo de ficha y se la da al primero quien la coloca donde quiera (de los cuadros que están libres), continúan de este modo y gana el que logre formar una línea con tres fichas de la misma forma (horizontal, vertical o diagonal).
   Antonio y Berta juegan una partida. Primero Antonio toma un cuadrado y se lo da a Berta, quien lo coloca en la casilla 6 (considere la imagen adjunta). Berta le da un triángulo a Antonio y este lo coloca en la casilla 7. Antonio le da otro cuadrado a Berta y ella lo coloca en la casilla 10. Ella le da un triángulo a Antonio y él lo coloca en la casilla 14. Ahora Antonio le da un triángulo a Berta. La cantidad de casillas donde Berta puede colocar ese triángulo de modo que no pierda en la siguiente jugada es

   (a) 4
   (b) 5
   (c) 6
   (d) 7

1	2	3	4
5	6	7	8
9	10	11	12
13	14	15	16

6. Sea el $\triangle ABC$, tal que $m\angle CAB = 84°$ y $AB = AC$. Si los puntos D, E y F están sobre los lados $\overline{BC}$, $\overline{CA}$ y $\overline{AB}$, respectivamente, tales que $CE = CD$ y $BF = BD$, entonces $m\angle EDF$ es

   (a) $48°$

   (b) $66°$

   (c) $84°$

   (d) $98°$

7. En un tren hay 60 personas distribuidas en tres vagones distintos. Al realizar una parada en una estación se bajan 6 personas del primer vagón, 8 personas del segundo vagón y 4 personas del tercer vagón. De los que no se bajaron del tren, hay el doble de personas en el segundo vagón que en el primero, y el doble en el tercer vagón que en el segundo. La cantidad de personas que habían al principio en el segundo vagón corresponde a

   (a) 11
   (b) 15
   (c) 20
   (d) 24

8. Si Fátima utiliza 192 dígitos para numerar las páginas de su diario, entonces el número de páginas de su diario es un número divisible por

   (a) 3
   (b) 5
   (c) 7
   (d) 11

9. Considere un $\triangle ABC$ isósceles con $AB = BC$, donde E es un punto en $\overline{AB}$ y D un punto en $\overline{BC}$, tales que $\overline{ED} \perp \overline{BC}$. Si $AE = DE$, entonces $m\angle DAC$ es

   (a) 30^o
   (b) 45^o
   (c) 60^o
   (d) 75^o

10. Juan lanza un dado con seis caras numeradas del 1 al 6 y José un dado con ocho caras numeradas del 1 al 8. La probabilidad de que el producto de los dos números obtenidos sea un múltiplo de 3 es

    (a) $\frac{1}{2}$
    (b) $\frac{2}{5}$
    (c) $\frac{3}{5}$
    (d) $\frac{7}{10}$

11. Sean $\square ABCD$ un cuadrado, E y F puntos en $\overline{AB}$, tales que $AE = EF = FB$. La razón entre el área de $\square ABCD$ y el área de $\square EDCF$ es

    (a) $\frac{4}{3}$
    (b) $\frac{3}{2}$
    (c) 2
    (d) $\frac{5}{2}$

12. La cantidad de números de tres dígitos (donde todos sus dígitos son distintos de cero) que satisfacen que al cambiar de cualquier manera el orden de sus dígitos se obtiene un número divisible por 4 es

    (a) 6
    (b) 8
    (c) 10
    (d) 12

II Parte: Desarrollo **Valor 21 puntos, 7 pts c/u**

Instrucciones: Los siguientes ejercicios deben ser resueltos en las hojas adicionales que se le entregaron. Conteste en forma ordenada, completa y clara. Se califica procedimientos y respuesta.

1. Considere una secuencia de números donde el primer término es 1 y el segundo 3; a partir de aquí, cada término se obtiene realizando la resta entre los términos anterior y trasanterior, por ejemplo, el tercer término se obtiene realizando la resta del segundo menos el primero. Determine la suma de los primeros 1821 términos.

2. Determine el menor número y el mayor número de cuatro dígitos distintos que son divisibles por cada uno de sus dígitos respectivos.

3. Considere un círculo de centro O. Sean A y B dos puntos sobre la circunferencia, tales que $m\angle AOB = 60°$. Sea M un punto cualquiera sobre la circunferencia (distinto de A y B). Sean P, Q, R y S los puntos medios de $\overline{AO}$, $\overline{AM}$, $\overline{MB}$ y $\overline{OB}$, respectivamente. Determine $m\angle QTR$, donde T es el punto de intersección entre $\overline{PR}$ y $\overline{QS}$.