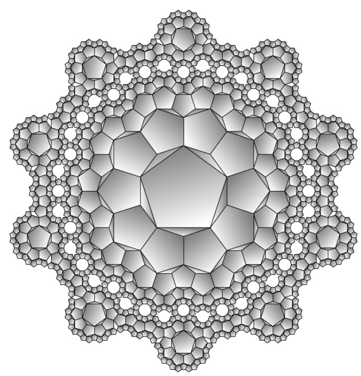
XXVIII OLIMPIADA COSTARRICENSE DE MATEMÁTICA

UNA - UCR - TEC - UNED - MEP - MICITT

SOLUCIÓN
SEGUNDA ELIMINATORIA NACIONAL



I Nivel

7°

2016

Estimado estudiante:

La Comisión Organizadora de las Olimpiadas Costarricenses de Matemáticas le saluda y felicita por haber clasificado a la segunda eliminatoria nacional de estas justas académicas. La prueba consta de dos partes: una primera parte de 12 preguntas de selección única, ponderadas con dos puntos cada respuesta correcta, y una segunda parte con 3 preguntas de desarrollo, con un valor de 7 puntos cada solución correcta.

Los resultados de esta eliminatoria se publicarán a partir del viernes 30 de setiembre, en la siguiente dirección electrónica:

www.olcoma.com

INDICACIONES GENERALES

- Debe trabajar en forma individual.
- Las respuestas a las preguntas que se le formulan, deben ser consignadas ÚNICAMENTE en la hoja de respuestas que se le ha entregado.
- Los dibujos que aparecen en la prueba no están hechos a escala.
- El formulario de preguntas es suyo, por lo que puede realizar en él todas las anotaciones, cálculos o dibujos que le sean necesarios para resolver satisfactoriamente la prueba.
- No se permite el uso de hojas adicionales.
- Los únicos instrumentos cuyo uso se permite son los necesarios para escribir y dibujar. Se prohíbe el uso de libros, libretas de notas, tablas y calculadora.
- El examen tiene una duración máxima de tres horas.
- Escriba claramente los datos que se le solicitan en la hoja de respuestas.

SIMBOLOGÍA

$\overline{AB}$	segmento de extremos A y B	$\angle ABC \cong \angle DEF$	congruencia de ángulos
AB	medida de $\overline{AB}$	$\triangle ABC \cong \triangle DEF$	congruencia de triángulos
$\overrightarrow{AB}$	rayo de extremo A y que contiene a B	$ABC \leftrightarrow DEF$	correspondencia respectiva entre puntos
$\overleftrightarrow{AB}$	recta que contiene los puntos A y B	$\triangle ABC \sim \triangle DEF$	semejanza de triángulos
$\angle ABC$	ángulo de rayos $\overrightarrow{BA}$ y $\overrightarrow{BC}$	$\overline{AB} \cong \overline{CD}$	congruencia de segmentos
$m\angle ABC$	medida de $\angle ABC$	$\widehat{AB}$	arco de extremos A y B
$\triangle ABC$	triángulo de vértices A, B, C	$m\widehat{AB}$	medida de $\widehat{AB}$
$\square ABCD$	cuadrilátero de vértices A, B, C, D	(ABC)	área de ΔABC
$\parallel$	paralelismo	$(ABCD)$	área de $\square ABCD$
$\perp$	perpendicularidad	$P-Q-R$	P, Q, R puntos colineales, con Q entre los puntos P y R

I Parte: Selección única **Valor 24 puntos, 2 pts c/u**

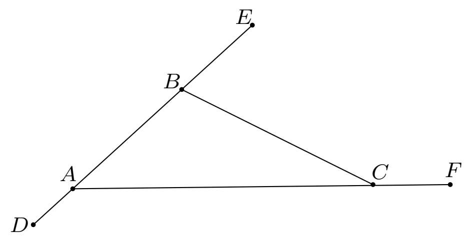
1. En la figura adjunta se tiene que $m\angle EBC$ es $20°$ menor que $m\angle DAC$. Si $m\angle BCF = 120°$, entonces $m\angle BAC$ es

   (a) $50°$

   (b) $60°$

   (c) $70°$

   (d) $80°$



- Opción correcta: $a)$
- Solución:

  Llamemos $m\angle EBC = \alpha$, entonces $m\angle DAC = \alpha + 20°$ y $m\angle ABC = 180° - \alpha$

  Como $m\angle BCF = 120°$, se tiene que $m\angle BCA = 60°$.

  Por teorema del ángulo externo:

  $m\angle DAC = m\angle ABC + m\angle BCA \Rightarrow \alpha + 20° = 180° - \alpha + 60° \Rightarrow 2\alpha = 220° \Rightarrow \alpha = 110°$

  Luego, $m\angle DAC = 130°$ y $m\angle BAC = 50°$.

2. En una caja hay bolas iguales de cuatro colores distintos: azul, blanco, rojo y verde. Si se extrae una bola al azar, la probabilidad de extraer una azul es el doble que la de extraer una blanca; la probabilidad de extraer una blanca es el doble que la de extraer una roja; y la de extraer una roja es el doble que la de extraer una verde. La probabilidad de que al extraer una bola de la caja esta NO sea azul o verde es

   (a) $\frac{1}{5}$

   (b) $\frac{2}{5}$

   (c) $\frac{3}{5}$

   (d) $\frac{4}{5}$

- Opción correcta: $b)$
- Solución:

  Sin pérdida de generalidad, se puede considerar que hay una bola verde, dos bolas rojas, cuatro bolas blancas y ocho bolas azules.

Se desea que al extraer la bola de la caja esta no sea azul o verde, es decir, la bola extraída debe ser blanca o roja. De acuerdo con las cantidades supuestas al inicio, los casos totales son 15 y los casos favorables son seis. De esta manera, la probabilidad en cuestión es $\dfrac{6}{15} = \dfrac{2}{5}$.

3. En un cuadrado $ABCD$, E es un punto en $\overline{BC}$, tal que $m\angle BAE$ es la mitad de $m\angle DAE$. Si F es el punto de intersección de $\overline{AE}$ con $\overline{DB}$ y G es el pie de la perpendicular a $\overline{DC}$ desde F, entonces la medida de $\angle GFE$ es

   (a) 40°

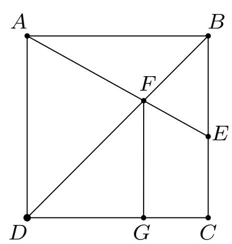
   (b) 45°

   (c) 60°

   (d) 70°

- Opción correcta: c)
- Solución:

  Consideremos la siguiente figura



Como $m\angle BAD = 90°$ y $m\angle BAE$ es la mitad de $m\angle DAE$, se tiene que $m\angle BAE = 30°$ y $m\angle DAE = 60°$.

Por otro lado, como $\overline{FG} \perp \overline{DC}$, entonces$\overline{FG} \| \overline{AD}$ y entonces $\angle DAF$ y $\angle GFE$ son congruentes por ser correspondientes entre paralelas. Por lo tanto $m\angle GFE = 60°$.

4. Se dice que un número natural es *capicua* si al escribirlo se puede leer de igual forma de izquierda a derecha como de derecha a izquierda; por ejemplo, 23 432 es *capicua*. La cantidad de *capicuas* de 7 dígitos que tienen 4 dígitos diferentes es

   (a) 3024

   (b) 4536

   (c) 5040

   (d) 6561

- Opción correcta: b)
- Solución:

  Los números son de la forma $abcdcba$ con $a \in \{1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$, $b,c,d \in \{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$ y a,b,c,d dígitos distintos.

  Así, existen 9 posibilidades para el dígito a, 9 posibilidades distintas para b (todas las 10 iniciales menos el dígito que fue escogido para a), 8 posibilidades para c (todas las 10 iniciales menos los dos que fueron utilizadas para a y b) y 7 posibilidades para d (por las mismas razones anteriores).

  Por lo tanto, existen $9 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 = 4536$ capicuas de siete dígitos con 4 dígitos distintos.

5. Un juego consiste de una cuadrícula de 4×4 y fichas de dos formas (triángulos y cuadrados). Un jugador escoge un tipo de ficha y se la da al segundo jugador quien la coloca en cualquiera de las 16 casillas disponibles, luego el segundo jugador escoge un tipo de ficha y se la da al primero quien la coloca donde quiera (de los cuadros que están libres), continúan de este modo y gana el que logre formar una línea con tres fichas de la misma forma (horizontal, vertical o diagonal).
   Antonio y Berta juegan una partida. Primero Antonio toma un cuadrado y se lo da a Berta, quien lo coloca en la casilla 6 (considere la imagen adjunta). Berta le da un triángulo a Antonio y este lo coloca en la casilla 7. Antonio le da otro cuadrado a Berta y ella lo coloca en la casilla 10. Ella le da un triángulo a Antonio y él lo coloca en la casilla 14. Ahora Antonio le da un triángulo a Berta. La cantidad de casillas donde Berta puede colocar ese triángulo de modo que no pierda en la siguiente jugada es

   (a) 4

   (b) 5

   (c) 6

   (d) 7

1	2	3	4
5	6	7	8
9	10	11	12
13	14	15	16

- Opción correcta: b)
- Solución:

  Si coloca el triángulo en cualquiera de las casillas 3, 8, 11, 12, 13, 15, 16, en la siguiente jugada Antonio ganará, sin importar el tipo de ficha que ella le dé. Por ejemplo, si coloca el triángulo en la casilla 11 y le da a Antonio un cuadrado, este ganará colocándolo en la casilla 2, si le da un triángulo, este ganará colocándolo en la casilla 3 o 15. Si lo coloca en la 8 y le da un triángulo, Antonio ganará colocándolo en la casilla 11 y si le da un cuadrado gana colocándolo en la 2.

Si lo coloca en cualquiera de las restantes 5 casillas puede evitar perder en la siguiente jugada. Si lo coloca en las casillas 1, 4, 5, 9 y le da a Antonio un triángulo, entonces este no puede ganar. Si lo coloca en la casilla 2, puede evitar perder dándole a Antonio un cuadrado.

6. Sea el $\triangle ABC$, tal que $m\angle CAB = 84°$ y $AB = AC$. Si los puntos D, E y F están sobre los lados $\overline{BC}$, $\overline{CA}$ y $\overline{AB}$, respectivamente, tales que $CE = CD$ y $BF = BD$, entonces $m\angle EDF$ es

   (a) $48°$

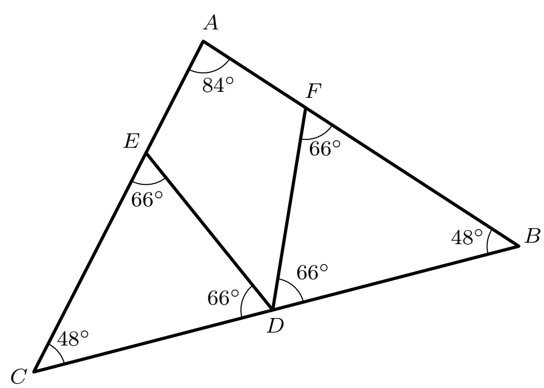
   (b) $66°$

   (c) $84°$

   (d) $98°$

- Opción correcta: $a)$
- Solución:

  Dado que dos de los lados del $\triangle ABC$ son de igual medida, dicho triángulo es un triángulo isósceles. De esta manera, $m\angle ACB = m\angle ABC = 48°$, pues el otro ángulo de este triángulo mide $84°$.



  Luego, como en el $\triangle CDE$ se tiene que $CD = CE$, entonces este también es isósceles y $m\angle CDE = 66°$.

  En forma análoga, en el $\triangle BDF$ se tiene que $BD = BF$, por lo que $\triangle BDF$ es un triángulo isósceles y $m\angle BDF = 66°$.

  En las últimas conclusiones se usa el hecho que en todo triángulo la suma de las medidas de los ángulos iternos es $180°$ y que las medidas de los ángulos de la base de todo triángulo isósceles son iguales.

  Para determinar la medida del $\angle EDF$ note que $66° + m\angle EDF + 66° = 180° \Rightarrow m\angle EDF = 48°$.

7. En un tren hay 60 personas distribuidas en tres vagones distintos. Al realizar una parada en una estación se bajan 6 personas del primer vagón, 8 personas del segundo vagón y 4 personas del tercer vagón. De los que no se bajaron del tren, hay el doble de personas en el segundo vagón que en el primero, y el doble en el tercer vagón que en el segundo. La cantidad de personas que habían al principio en el segundo vagón corresponde a

   (a) 11
   (b) 15
   (c) 20
   (d) 24

- Opción correcta: *c*)
- Solución:

  Después de que se bajaron las personas en la estación, quedaron $60 - 6 - 8 - 4 = 42$ personas en el tren. Si x es la cantidad de personas en el primer vagón entonces $x + 2x + 2 \cdot 2x = 42$, por lo que $x = 6$ y así habían $8 + 2 \cdot 6 = 20$ personas al principio en el segundo vagón.

8. Si Fátima utiliza 192 dígitos para numerar las páginas de su diario, entonces el número de páginas de su diario es un número divisible por

   (a) 3
   (b) 5
   (c) 7
   (d) 11

- Opción correcta: *b*)
- Solución:

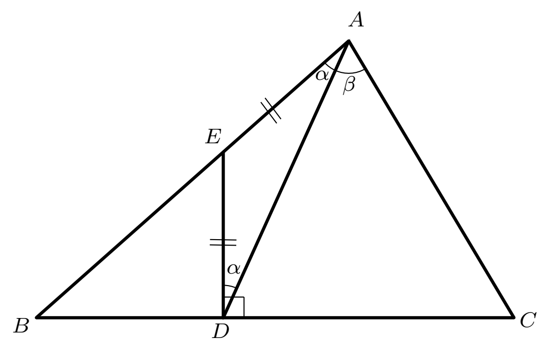
  Para numerar las primeras nueve páginas utiliza 9 dígitos. Para numerar las páginas de la 10 a la 99 utiliza $90 \cdot 2 = 180$ dígitos.

  Así, quedan tres dígitos, que corresponden a la página 100 ($100 = 10 \cdot 10 = 2^2 \cdot 5^2$).

9. Considere un $\triangle ABC$ isósceles con $AB = BC$, donde E es un punto en $\overline{AB}$ y D un punto en $\overline{BC}$, tales que $\overline{ED} \perp \overline{BC}$. Si $AE = DE$, entonces $m\angle DAC$ es

   (a) 30º
   (b) 45º
   (c) 60º
   (d) 75º

- Opción correcta: $b)$
- Solución:



Como $AE = DE$ entonces $m\angle EDA = m\angle EAD = \alpha$.
Sea $m\angle DAC = \beta$, así $m\angle EAC = m\angle ACD = \alpha + \beta$
$m\angle ADC = 90^\circ - m\angle EDA = 90^\circ - \alpha$.
En el $\triangle ADC$ tenemos:
$m\angle ACD + m\angle ADC + m\angle DAC = 180^\circ$
$\alpha + \beta + 90^\circ - \alpha + \beta = 180^\circ$
$2\beta = 90^\circ$
$\beta = 45^\circ$
Por lo tanto, $m\angle DAC = 45^\circ$

10. Juan lanza un dado con seis caras numeradas del 1 al 6 y José un dado con ocho caras numeradas del 1 al 8. La probabilidad de que el producto de los dos números obtenidos sea un múltiplo de 3 es

   (a) $\dfrac{1}{2}$
   (b) $\dfrac{2}{5}$
   (c) $\dfrac{3}{5}$
   (d) $\dfrac{7}{10}$

- Opción correcta: $a)$
- Solución:

En total hay 48 posibles eventos. De ellos, el producto de ambos resultados es múltiplo de 3 si Juan lanza un 3 o 6, o si José lanza un 3 o 6. El número de tales eventos es $8+8+6+6-4 = 24$, ya que estamos contando los resultados $(3,3), (3,6), (6,3), (6,6)$ dos veces. Por lo tanto, la probabilidad es $24/48 = 1/2$.

11. Sean $\square ABCD$ un cuadrado, E y F puntos en $\overline{AB}$, tales que $AE = EF = FB$. La razón entre el área de $\square ABCD$ y el área de $\square EDCF$ es

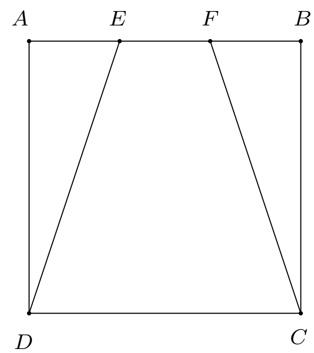
    (a) $\frac{4}{3}$

    (b) $\frac{3}{2}$

    (c) 2

    (d) $\frac{5}{2}$

- Opción correcta: *b*)
- Solución:

  Si x es la medida del lado del cuadrado, su área es x^2, mientras que $\square EDCF$ como es un trapecio su área corresponde a $x\dfrac{\left(x+\frac{x}{3}\right)}{2} = x^2\dfrac{\left(1+\frac{1}{3}\right)}{2} = \dfrac{\frac{4}{3}x^2}{2} = \dfrac{2}{3}x^2$. Por lo tanto, la razón de las áreas es
  $$\frac{x^2}{\frac{2}{3}x^2} = \frac{3}{2}$$

12. La cantidad de números de tres dígitos (donde todos sus dígitos son distintos de cero) que satisfacen que al cambiar de cualquier manera el orden de sus dígitos se obtiene un número divisible por 4 es

    (a) 6

    (b) 8

    (c) 10

    (d) 12

- Opción correcta: *b*)
- Solución:

  Todos los dígitos de tales números deben ser pares. Como un número es divisible por 4 si, y solo si, los últimos dos dígitos son divisibles por 4, no podemos considerar los dígitos 2 o 6 (para que sea divisible por 4 se tendría alguna de las siguientes terminaciones: $12, 32, \ldots 92$ o $16, 36, \ldots, 96$, todas con un dígito impar).

  Por lo tanto, el número consiste solo de dígitos 4 y 8; así, hay 8 opciones: 444, 888, 448, 484, 844, 884, 848 y 488.

II Parte: Desarrollo **Valor 21 puntos, 7 pts c/u**

Instrucciones: Los siguientes ejercicios deben ser resueltos en las hojas adicionales que se le entregaron. Conteste en forma ordenada, completa y clara. Se califica procedimientos y respuesta.

1. Considere una secuencia de números donde el primer término es 1 y el segundo 3; a partir de aquí, cada término se obtiene realizando la resta entre los términos anterior y trasanterior, por ejemplo, el tercer término se obtiene realizando la resta del segundo menos el primero. Determine la suma de los primeros 1821 términos.

- Solución:

Se obtienen algunos términos de la secuencia numérica:

a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6
1	3	2	-1	-3	-2

a_7	a_8	a_9	$\cdots$
1	3	$\cdots$	

Se observa que los seis primeros términos se repiten en la sucesión (pues los términos a_7 y a_8 son exactamente los dos primeros términos de la sucesión).

Además, si s representa la suma de cada período de seis términos de la sucesión, se tiene que $s = 1 + 3 + 2 - 2 - 3 - 2 = 0$.

Como se pide la suma de los primeros 1821 primeros términos y se tiene que $1821 = 1818 + 3 = 303 \cdot 6 + 3$; por lo que la suma de los primeros 1818 términos es cero y, por lo tanto, la suma de los 1821 primeros términos será la suma de los tres primeros términos de la sucesión: $1 + 3 + 2 = 6$.

2. Determine el menor número y el mayor número de cuatro dígitos distintos que son divisibles por cada uno de sus dígitos respectivos.

- Solución:

En ambos casos (menor y mayor) debemos descartar el dígito 0, pues ningún número no nulo es múltiplo de 0.

El menor número de cuatro dígitos distintos es 1234, sin embargo, este número no es múltiplo de 3 pues sus dígitos suman 10, ni múltiplo de 4.

El 1235 tampoco cumple, pues no es divisible ni por 2 ni 3. Podemos ver que 1236 sí es divisible por 3 pues sus dígitos suman 12, es par por lo que es divisible por 2, y al ser divisible por 2 y 3 es también múltiplo de 6; además, todo número es múltiplo de 1. Con esto, 1236 es el menor número de cuatro dígitos distintos que es divisible por cada uno de sus dígitos.

Para hallar el mayor número, podemos asumir, inicialmente, que existe uno de la forma $98ab$, con $9 + 8 + a + b$ múltiplo de 9. Como $9 + 8 = 17$, se debe tener $a + b = 10$, pues $a + b = 1$ y $a + b = 19$ son casos imposibles con a y b dígitos distintos no nulos.

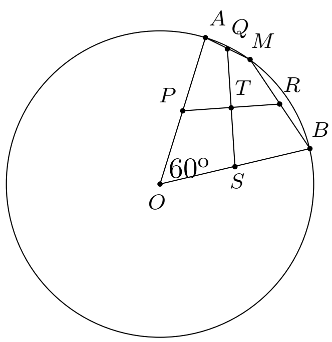
El primer candidato sería 9873, pero no es múltiplo de 8.

Vemos que 9864 sí cumple las condiciones: $9 + 8 + 6 + 4 = 27$ por lo que es divisible por 9, 864 es múltiplo de 8, por lo que es divisible por 8 y en consecuencia también por 4, al ser divisible por 9 y 8 también lo es por 3 y 2, es decir, también por 6, y con esto 9864 es el mayor número de cuatro dígitos distintos que es divisible por cada uno de sus dígitos.

3. Considere un círculo de centro O. Sean A y B dos puntos sobre la circunferencia, tales que $m\angle AOB = 60°$. Sea M un punto cualquiera sobre la circunferencia (distinto de A y B). Sean P, Q, R y S los puntos medios de $\overline{AO}$, $\overline{AM}$, $\overline{MB}$ y $\overline{OB}$, respectivamente. Determine $m\angle QTR$, donde T es el punto de intersección entre $\overline{PR}$ y $\overline{QS}$.

- Solución:

En la siguiente figura se presentan los datos del problema.



Dado que P y Q son los puntos medios de $\overline{AO}$ y $\overline{AM}$ se tiene que $\overline{PQ} \parallel \overline{OM}$ y $PQ = \frac{1}{2}OM$. De forma análoga se concluye que $\overline{SR} \parallel \overline{OM}$ y $SR = \frac{1}{2}OM$. Así $PQ = SR$ y $\overline{PQ} \parallel \overline{SR}$.

Por otra parte, se tiene que P y S son los puntos medios de $\overline{AO}$ y $\overline{BO}$ respectivamente, por lo que $\overline{PS} \parallel \overline{AB}$ y $PS = \frac{1}{2}AB$. De igual forma se concluye que $\overline{QR} \parallel \overline{AB}$ y $QR = \frac{1}{2}AB$. Así $PS = QR$ y $\overline{PS} \parallel \overline{QR}$

Pero $AB = OM$ dado que $AB = AO$ (esto porque $\triangle AOB$ es equilátero) y $\overline{AO}$ y $\overline{OM}$ son radios del círculo. Por lo tanto $PS = PQ = SR = QR$.

Debido a que todos los lados son congruentes y los lados opuestos son paralelos se tiene que $\square PQRS$ es un rombo. En un rombo las diagonales son perpendiculares, por lo tanto $m\angle QTR = 90º$.