XXV OLIMPIADA COSTARRICENSE DE MATEMÁTICA
PROYECTO INTERINSTITUCIONAL
MEP – UCR – ITCR – UNA – UNED - MICITT

PRIMER NIVEL (7°)

SEGUNDA ELIMINATORIA

23 de agosto de 2013

Nombre completo del estudiante:

____

Nombre completo del colegio

____

Código: _______________

Estimado/a estudiante:

La Comisión Organizadora de las Olimpiadas Costarricenses de Matemática le saluda y felicita por haber clasificado a la s*egunda eliminatoria nacional* de estas justas académicas. La prueba consta de dos partes: una primera parte de doce preguntas de selección única, ponderadas con 2 puntos cada respuesta correcta, y una segunda parte con tres preguntas de desarrollo, con un valor de 7 puntos cada solución correcta.

Los resultados de esta eliminatoria se publicarán a partir del viernes 27 de setiembre en las páginas de OLCOMA:

www.olcoma.org

www.facebook.com/Olcoma

INSTRUCCIONES GENERALES

1. Debe trabajar en forma individual.
2. Las respuestas a las preguntas que se le formulan, deben ser consignadas ÚNICAMENTE en las hojas para respuestas que se le han entregado.
3. Los dibujos que aparecen en la prueba no están hechos a escala.
4. El formulario de preguntas de selección única es suyo, por lo que puede realizar en él todas las anotaciones, cálculos o dibujos que le sean necesarios para resolver satisfactoriamente la prueba.
5. NO se permite el uso de hojas adicionales no entregadas oficialmente.
6. Los únicos instrumentos cuyo uso se permite son los necesarios para escribir y dibujar. Se prohíbe el uso de libros, libretas de notas, tablas y calculadora.
7. Para resolver el examen dispone de un máximo de tres horas.
8. Escriba claramente los datos que se le solicitan en la hoja de respuestas.
9. En la parte de desarrollo deben aparecer con detalle todos los pasos y justificaciones que permiten obtener la respuesta a los ejercicios planteados.

SIMBOLOGÍA

$\overline{AB}$: segmento de recta de extremos *A* y *B*.

AB : medida del segmento $\overline{AB}$.

$\overrightarrow{AB}$: rayo de extremo *A* y que contiene a *B*.

$\overleftrightarrow{AB}$: recta que contiene los puntos *A* y *B*.

$\angle ABC$: ángulo de lados $\overrightarrow{BA}$ y $\overrightarrow{BC}$.

$\mathrm{m}\angle ABC$: medida del ángulo *ABC*.

ΔABC: triángulo de vértices *A*, *B* y *C*.

ABCD: cuadrilátero de vértices *A*, *B*, *C* y *D*.

$||$: paralelismo.

$\perp$: perpendicularidad.

$\angle ABC \cong \angle DEF$: congruencia de ángulos.

$\Delta ABC \cong \Delta DEF$: congruencia de triángulos.

$ABC \leftrightarrow DEF$: correspondencia respectiva entre puntos.

$\Delta ABC \sim \Delta DEF$: semejanza de triángulos.

$\overline{AB} \cong \overline{CD}$: congruencia de segmentos.

$\widehat{AB}$: arco de extremos *A* y *B*.

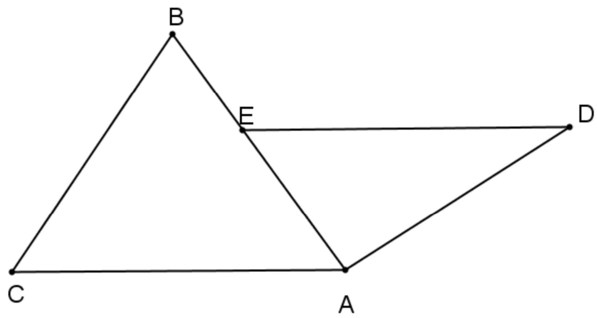
$\mathrm{m}\widehat{AB}$: medida del arco $\widehat{AB}$.

(*ABC*): área del triángulo *ABC*.

(*ABCD*): área del cuadrilátero *ABCD*.

P–*Q*–*R*: puntos colineales, con *Q* entre *P* y *R*.

1. En la siguiente figura $\overline{DE} \parallel \overline{AC}$, AB = BC, $m\angle ABC$ es dos veces la suma de las medidas de los ángulos $\angle BCA$ y $\angle BAC$



Si la medida del $\angle ADE$ es igual a la tercera parte de la medida del $\angle BED$, entonces la medida, en grados, del $\angle EAD$ corresponde a

(A) 30

(B) 50

(C) 100

(D) 130

2. Del conjunto $\{1,2,3,4,5\}$ se extraen 3 números aleatoriamente y sin reemplazo. La probabilidad de que los números extraídos correspondan a las medidas de los lados de un triángulo es

(A) $\frac{1}{10}$

(B) $\frac{3}{10}$

(C) $\frac{3}{5}$

(D) $\frac{4}{5}$

3. El tren CONEJOS tiene siete vagones en donde cada vagón está identificado con cada una de las letras C, O, N, E, J, O, S en el orden de la palabra. Este tren traslada las letras del abecedario (en orden), llevando una letra por vagón, de la ciudad Letras a la ciudad Diccionario. Si al terminar un abecedario inmediatamente empieza con el otro, ¿en cual viaje el vagón identificado con la letra J, llevará a la letra J?

Nota: considere el abecedario así, con 27 letras: a, b, c, d, e, f, g, h, i, j, k, l, m, n, ñ, o, p, q, r, s, t, u, v, w, x, y, z

(A) 6

(B) 20

(C) 21

(D) 145

4. En la selva se realiza una reunión entre cinco animales salvajes, un elefante, un leopardo, un avestruz, una jirafa y una serpiente. Se sabe que todos los animales son mentirosos (nunca dicen la verdad). Si se ubican en una mesa circular y dicen lo siguiente:
   - El avestruz dice: a la par de la serpiente está el elefante.
   - La jirafa dice: de los animales a mi lado, al menos uno camina en cuatro patas.

¿Qué animales están a la par del leopardo?

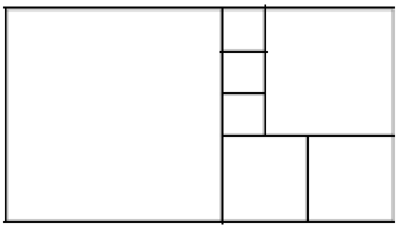
(A) Elefante y jirafa

(B) Avestruz y jirafa

(C) Elefante y serpiente

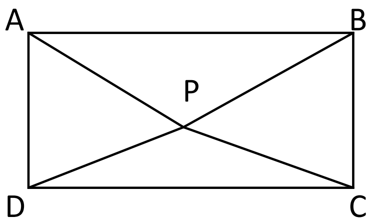
(D) Serpiente y avestruz

5. En la siguiente figura se tiene un rectángulo formado por 7 cuadrados. Si el área de los cuadrados más pequeños es 1 entonces el área del rectángulo de mayor tamaño es



(A) 42
(B) 44
(C) 45
(D) 48

6. Si se considera un rectángulo $ABCD$ y un punto P cualquiera en su interior, tal y como se muestra en la figura, entonces $(\mathrm{ABP})+(\mathrm{CDP})$ es equivalente a:



(A) $2\cdot(\mathrm{BPA})$
(B) $2\cdot(\mathrm{BPC})$
(C) $(\mathrm{APB})+(\mathrm{APD})$
(D) $(\mathrm{APD})+(\mathrm{BPC})$

7. Un recipiente que contiene 1 litro de agua está expuesto a un ambiente de alta temperatura, por lo que se evapora un tercio de lo que contiene. Después de cierto tiempo se evapora un quinto de lo que quedaba. Por último, se evapora un cuarto de lo que quedó. Al final el recipiente contiene la siguiente cantidad de litros

(A) $\frac{2}{5}$

(B) $\frac{8}{15}$

(C) $\frac{7}{15}$

(D) $\frac{13}{60}$

8. Seis amigos desean pasar sus vacaciones en un mismo lugar y deciden llegar en parejas, utilizando diferentes medios de transporte. Si se sabe que:

- Allan no utiliza el carro y acompaña a Kenia que no va en avión
- Rodolfo no viaja en bus, pero viaja en avión.
- Evelyn no va acompañada de Eduardo ni hace uso del avión.

Entonces el otro amigo viaja

(A) en bus

(B) en avión

(C) con Evelyn

(D) con Eduardo

9. Si un reloj de agujas indica las 9:35, entonces el ángulo que forma el minutero con la aguja horaria corresponde a

(A) 60°
(B) 75°
(C) 77° 30´
(D) 78° 50´

10. Andrés, Carmen y David son tres primos que deciden ir de excursión. El día de la excursión Andrés lleva tres chocolates iguales y Carmen trae consigo cinco chocolates idénticos a los de Andrés, pero David no lleva chocolates.

Durante la excursión, los tres primos deciden repartir todos los chocolates en partes iguales entre ellos. Pero entonces David les dice a sus dos primos que él cuenta con ₡1600 y desea que se repartan ese dinero en forma proporcional de acuerdo a la cantidad de chocolate que cada uno aportó para su ración.

La cantidad de dinero que le corresponde a Carmen es

(A) ₡ 800
(B) ₡ 1000
(C) ₡ 1200
(D) ₡ 1400

11. En un torneo en el que participaron 8 equipos, cada uno jugó exactamente contra otros 3. En cada juego se dieron 2 puntos al ganador, 0 al perdedor y en caso de empate 1 punto a cada equipo. Si 7 de los equipos obtuvieron 4, 2, 3, 1, 6, 1 y 4 puntos, la cantidad de puntos que obtuvo el equipo faltante es

(A) 1
(B) 2
(C) 3
(D) 4

12. Si se multiplican los números pares desde 2 hasta 98, excepto los terminados en 0, entonces el digito de las unidades del número obtenido corresponde a

(A) 0
(B) 2
(C) 4
(D) 6

SEGUNDA PARTE: DESARROLLO

Código: ________________ Nombre del(la) estudiante: _____________________________

Pregunta #1

En un barrio viven 4 vecinos de distinta nacionalidad (un francés, un español, un costarricense y un italiano), los cuales se dedican a disciplinas deportivas distintas (fútbol, tenis, baloncesto o ciclismo) y cada uno posee una mascota distinta (perro, gato, canario o conejo). No se sabe el deporte que practica cada uno ni cuál es su mascota, pero se cuenta con la siguiente información:

a. El gato juega con el balón de baloncesto con la que practica su dueño y el futbolista no tiene perros.
b. El tenista es amigo del italiano pero no es francés.
c. El ciclista y el italiano visitan a su amigo que tiene un perro.
d. El tenista y el dueño del conejo salen a caminar con el futbolista que no es europeo.

Determine, justificando cada una de sus conclusiones, la mascota y la actividad deportiva a la que se dedica cada vecino.

Código: ________________ Nombre del estudiante: ________________________________

Pregunta #2

Considere un rombo ABCD y un punto E tal que B es el punto medio de $\overline{AE}$. Si el punto de intersección de las diagonales del rombo es F y el área del triángulo DFC es 3 cm^2, determine el área del cuadrilátero BECF.

Código: ________________ Nombre del estudiante: ________________________________

Pregunta #3

Determine todas las maneras en las que se pueden escoger tres números naturales a, b y c, con $a < b < c$, de forma que $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}$ sea un número natural.

SOLUCIONES

I PARTE: Selección Única

#	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Clave	C	B	C	C	C	D	A	C	C	D	C	D

1.

Solución: Opción correcta: c)

$\angle \mathrm{BCA} \cong \angle \mathrm{BAC}$ pues AB = BC

$m\angle \mathrm{ABC} = 2\left(m\angle \mathrm{BAC} + m\angle \mathrm{BCA}\right) = 2\left(2 \cdot m\angle \mathrm{BAC}\right)$ pues $\angle \mathrm{BCA} \cong \angle \mathrm{BAC}$

Así, $2\left(2 \cdot m\angle \mathrm{BAC}\right) + m\angle \mathrm{BAC} + m\angle \mathrm{BAC} = 180^{\circ}$, es decir, $m\angle \mathrm{BAC} = 30^{\circ}$

Por lo tanto, $m\angle \mathrm{BAC} = 30^{\circ}$, $m\angle \mathrm{BCA} = 30^{\circ}$, $m\angle \mathrm{ABC} = 120^{\circ}$.

$\angle \mathrm{DEA} \cong \angle \mathrm{BAC}$ por ser ángulos alternos internos entre paralelas ($\overline{\mathrm{DE}} \parallel \overline{\mathrm{AC}}$).

$m\angle \mathrm{DEA} = 30^{\circ}$

$m\angle \mathrm{BED} = 180^{\circ} - 30^{\circ} = 150^{\circ}$, ya que los ángulos BED y DEA son suplementarios

$m\angle \mathrm{ADE} = \dfrac{1}{3} m\angle \mathrm{BED} = 50^{\circ}$

$m\angle \mathrm{EAD} = 180^{\circ} - \left(50^{\circ} + 30^{\circ}\right) = 100^{\circ}$

2.

Solución: Opción correcta: b)

Al seleccionar tres números aleatoriamente y sin reemplazo del conjunto $\{1,2,3,4,5\}$ se obtienen las siguientes ternas

1, 2, 3	1, 4, 5
1, 2, 4	2, 3, 4
1, 2, 5	2, 3, 5
1, 3, 4	2, 4, 5
1, 3, 5	3, 4, 5

Por el principio de la desigualdad triangular, las ternas correspondientes a las medidas de los lados de un triángulo son
2, 3, 4
2, 4, 5
3, 4, 5

Por la que la probabilidad solicitada es $\frac{3}{10}$

3.

Solución: Opción correcta: C

La letra J es la número 10 del abecedario y la número 5 del tren CONEJOS, que puede llevar sólo 7 letras por viaje entonces, se requiere que la letra en el primer vagón del tren (identificado con la letra C) sea una e.

Se debe notar que como el M.C.D entre 7 (número de vagones del abecedario) y 27 (número de letras del abecedario) es 1, entonces todas las letras viajarán en todos los vagones, ahora, dado que hay 27 letras en el abecedario, es claro que después de 4 viajes el tren habrá llevado un abecedario completo, y en el quinto viaje el primer vagón llevará una b, entonces después de 8 viajes se habrá traslado dos abecedarios completos y en el viaje 9 el primer vagón llevará una c, siguiendo con este patrón en el viaje 21 el primer vagón llevará la letra f y consecuentemente el vagón identificado con la J, llevará una letra j.

4.

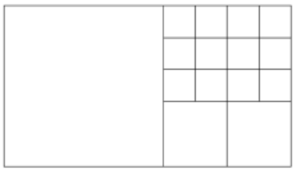
Solución: Opción correcta: C

Como todos los animales mienten, entonces se tiene que a la par de la jirafa están la serpiente y el mono, y como la serpiente no está a la par del elefante, a la par de esta debe estar el leopardo y a la par de este, el elefante.

5.

Solución *Respuesta correcta: C*

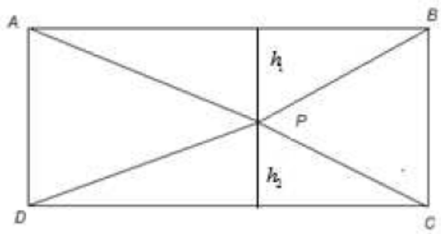
Si tomamos el rectángulo de la parte superior derecha de la figura, y la cuadriculamos utilizando como base el cuadrado de área 1, obtenemos la siguiente figura, de donde se deduce que su área es 12.



A partir de este cuadriculado es claro que los cuadrados de abajo tienen área 4 cada uno, y que el cuadrado de la izquierda tendrá área 25, por lo que el área total de la figura es 45.

6.

Solución: Opción correcta: D



Observe que $(\mathrm{ABP})+(\mathrm{CDP})=\mathrm{AB}\cdot\frac{h_1}{2}+\mathrm{DC}\cdot\frac{h_2}{2}=\mathrm{AB}\cdot\left(\frac{h_1}{2}+\frac{h_2}{2}\right)=\mathrm{AB}\cdot\frac{(h_1+h_2)}{2}=\mathrm{AB}\cdot\frac{\mathrm{CD}}{2}$ pues la base de ambos triángulos miden lo mismo y la suma de sus alturas corresponde a AD, por lo tanto el resto del área corresponde a la mitad del área del rectángulo. Por lo tanto $(\mathrm{APD})+(\mathrm{BPC})=\frac{\mathrm{AB}\cdot\mathrm{CD}}{2}=(\mathrm{ABP})+(\mathrm{CDP})$.

7.

Solución Opción correcta: a.

Lo que se evapora	Lo que queda del litro
$\frac{1}{3}$	$1-\frac{1}{3}=\frac{2}{3}$
$\frac{1}{5}$ de $\frac{2}{3}$, o sea $\frac{2}{15}$	$\frac{2}{3}-\frac{2}{15}=\frac{8}{15}$
$\frac{1}{4}$ de $\frac{8}{15}$, o sea $\frac{8}{60}=\frac{2}{15}$	$\frac{8}{15}-\frac{2}{15}=\frac{6}{15}=\frac{2}{5}$

Quedando $\frac{2}{5}$ partes del litro al final.

8.

Solución: Opción correcta: C

Tenemos que Allan no usa el carro y acompaña a Kenia que no va en avión, por lo tanto ellos dos van en bus. Luego, Rodolfo viaja en avión y Evelyn no viaja en avión, pero como Evelyn no acompaña a Eduardo, entonces Rodolfo y Eduardo viajan en avión. Por lo tanto el otro amigo viaja con Evelyn y hacen uso del carro.

9.

Solución: Opción correcta: C).

Si se considera que la aguja horaria no se mueve desde las 9:00 y que la minutera indica 35 minutos, el ángulo que formarían las agujas sería de 60°, pero en realidad la aguja horaria si se mueve de tal manera que se tiene que determinar en cuanto aumenta el ángulo al moverse la aguja horaria. Entonces:

$$\frac{30^\circ}{60\,\text{min}}=\frac{x}{35\,\text{min}} \Rightarrow x=\frac{30^\circ\bullet 35}{60}=17,5^\circ=17^\circ 30'$$

Por lo que la medida del ángulo solicitado es de $60^\circ+17^\circ 30'=77^\circ 30'$.

10.

Respuesta Opción correcta: D.

Como la totalidad de chocolates es 8, estos deben dividirse cada uno en tres partes iguales, de tal manera que se obtendrán 24 partes iguales por lo que a cada uno le corresponden 8 pedazos. En vista de que Andrés aporta 9 pedazos y Carmen 15 pedazos, entonces Andrés colabora solamente con un pedazo, mientras que Carmen aporta 7 pedazos, por lo que la razón es de 1:7. Es por esto que a Carmen le corresponden ₡1 400.

11.

Solución Opción correcta: C

En total se jugaron $\frac{8\cdot 3}{2}=12$ partidos. En cada partido los competidores se repartieron 2 puntos, así el total de puntos a repartir es de 24. Como la suma de los puntos de los 7 equipos es 21, entonces el equipo faltante ganó $24-21=3$.

12.

Solución Opción correcta: D

Si multiplicamos 2, 4, 6 y 8 se obtiene 384. por lo que al multiplicar cuatro números cuyos dígitos de las unidades sean 2, 4, 6 y 8 respectivamente, se obtiene un producto cuyo dígito de las unidades es 4.

Ahora bien, los números pares, que no terminan en 0, desde 2 hasta 98 se pueden agrupar en 10 conjuntos de números con esas características. Por lo tanto, para obtener las unidades del producto solicitado, basta con saber el que digito de las unidades de 4^{10} y como $4^{10}=\left(4^2\right)^5=16^5$, es equivalente al digito de las unidades de 6^5 que es 6.

SEGUNDA PARTE: DESARROLLO.

Pregunta #1

En un barrio viven 4 vecinos de distinta nacionalidad (un francés, un español, un costarricense y un italiano), los cuales se dedican a disciplinas deportivas distintas (fútbol, tenis, baloncesto o ciclismo) y cada uno posee una mascota distinta (perro, gato, canario o conejo). No se sabe el deporte que practica cada uno ni cuál es su mascota, pero se cuenta con la siguiente información:

e. El gato juega con el balón de baloncesto con la que practica su dueño y el futbolista no tiene perros.
f. El tenista es amigo del italiano pero no es francés.
g. El ciclista y el italiano visitan a su amigo que tiene un perro.
h. El tenista y el dueño del conejo salen a caminar con el futbolista que no es europeo.

Determine, justificando cada una de sus conclusiones, la mascota y la actividad deportiva a la que se dedica cada vecino.

Solución

i. De 4) se tiene que el costarricense practica fútbol.

j. De 2) y 5) se concluye que el español practica tenis.

k. De 3), 5) y 6) se determina que el italiano practica el baloncesto y el francés es ciclista.

l. De 4), 5) y 6) se deriva que el dueño del conejo no es español ni costarricense, por lo que debe ser italiano o francés.

m. De 1), 7) y 8) se tiene que el italiano tiene un gato y el dueño del conejo es francés.

n. De 1), 5) y 9) se concluye que el español tiene un perro y por el ende el costarricense posee un canario.

Código: _______________ Nombre del estudiante: ______________________________

Pregunta #2

Considere un rombo ABCD y un punto E tal que B es el punto medio de $\overline{AE}$. Si el punto de intersección de las diagonales del rombo es F y el área del triángulo DFC es 3 cm^2, determine el área del cuadrilátero BECF.

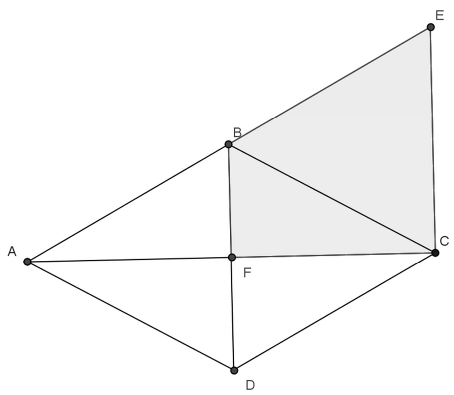
Solución

Considerando que

- BE = AB por hipótesis
- AB = BC = AD por ser las medidas de los lados de un rombo
- $\angle EBC \cong \angle BAD$ por ser correspondientes entre paralelas

Se tiene que $\Delta EBC \cong \Delta BAD$ por lo que $(EBC) = (BAD)$.

Además, como las diagonales de un rombo determinan cuatro triángulos congruentes, $(EBC) = (BAD) = 2(DFC) = 6\ \text{cm}^2$ y $(BFC) = (DCF) = 3\ \text{cm}^2$



Por lo tanto, el área del cuadrilátero BFCE es $9\ \text{cm}^2$.

Código: ________________ Nombre del estudiante: ________________________________

Pregunta #3

Determine todas las maneras en las que se pueden escoger tres números naturales a, b y c, con $a < b < c$, de forma que $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}$ sea un número natural.

Solución:

Observe que el mayor número que se puede obtener es escogiendo los menores valores posibles para a, b y c, es decir, $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}=\frac{11}{6}=1\frac{5}{6}$ por lo que la única suma entera posible es 1.

Para $a=2$: $\frac{1}{2}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=1$, por lo que $\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=\frac{1}{2}$. Ahora,

si $b=3$ entonces $\frac{1}{c}=\frac{1}{6}$ y $c=6$

si $b=4$ entonces $\frac{1}{c}=\frac{1}{4}$ y $c=4$, que no es posible pues $b<c$

si $b=5$ entonces $\frac{1}{c}=\frac{3}{10}$ y $c=\frac{3}{10}$.

El patrón termina pues conforme b aumenta c disminuye.

Para $a=3$: $\frac{1}{3}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=1$, por lo que $\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=\frac{2}{3}$.

Si $b=4$ entonces $\frac{1}{c}=\frac{5}{12}$ y $c=\frac{12}{3}$, lo cual no es posible.

El patrón termina pues conforme b aumenta c disminuye.

Así, para $a \geq 3$ no es posible encontrar más valores.

Por lo tanto, los únicos números que cumplen son $a=2, b=3$ y $c=6$.