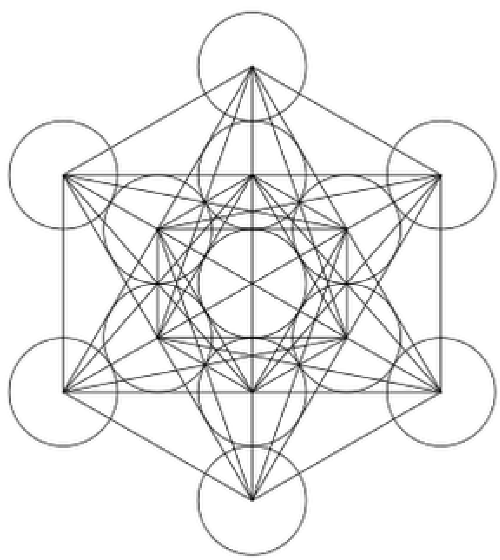
XXVII OLIMPIADA COSTARRICENSE DE MATEMÁTICA

UNA - UCR - TEC - UNED - MEP - MICIT

SOLUCIÓN II ELIMINATORIA NACIONAL



I Nivel

(7°)

2015

I Parte: Selección Única

1. Berta tiene 6 hijas pero no tiene ningún hijo. Algunas de sus hijas tienen 6 hijas, y el resto ninguna. Berta tiene en total 30 hijas y nietas, pero no tiene bisnietas. ¿Cuántas mujeres de la familia no tienen hijas?

   (a) 23
   (b) 24
   (c) 25
   (d) 26

   Solución

   Berta tiene $30 - 6 = 24$ nietas, de las cuales ninguna tiene hijas. Las nietas son hijas de $\frac{24}{6} = 4$ hijas de Berta.

   Entonces el número de mujeres que no tienen hijas es $24 + 2 = 26$.

2. En una bolsa de papel hay 14 bolas del mismo tamaño y mismo peso de las cuales: cinco son amarillas, cuatro son blancas, tres son verdes y dos son azules. Si se extrae aleatoriamente una de las bolas de la bolsa, la probabilidad de que la bola no sea azul es

   a) $\frac{1}{7}$
   b) $\frac{2}{7}$
   c) $\frac{3}{7}$
   d) $\frac{6}{7}$

   Opción correcta: *d*) Solución:

   El espacio muestral asociado con el experimento enunciado está dado por $E = \{\text{la bola es amarilla, la bola es blanca, la bola es verde, la bola es azul}\}$.

   Cada uno de los eventos son equiprobables pero los casos favorables para cada uno de ellos son, en este caso, distintos.

   Para el evento $S =$ "la bola no es azul" se tiene que dicho evento es el evento contrario de "la bola es azul".

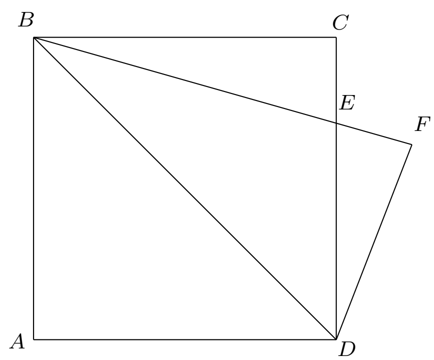
   Como $S_1 =$ "La bola es azul" tiene dos casos favorables, se tiene que la probabilidad de que al sacar una bola esta sea azul es $P(S_1) = \frac{\text{casos favorables}}{\text{casos posibles}} = \frac{2}{14} = \frac{1}{7}$. Así, la probabilidad del evento contrario (lo que nos interesa en el problema) es $1 - \frac{1}{7} = \frac{6}{7}$.

3. Sea $\square ABCD$ un cuadrado y E un punto en $\overline{CD}$ tal que $m\angle CBE = 18°$. Si se traza una recta perpendicular a $\overleftrightarrow{BE}$ por D y llamamos F al punto de intersección de esta recta con $\overleftrightarrow{BE}$, entonces la medida de $\angle EDF$ es

   (a) $18°$
   (b) $27°$
   (c) $45°$
   (d) $72°$

   Solución:

   Respuesta correcta: Opción a)



Como $\triangle BCE$ es rectángulo y $m\angle CBE = 18°$ se tiene que $m\angle CEB = 72°$. Además $m\angle DEF = m\angle CEB$ por ser opuestos por el vértice.

Entonces, como $\triangle EFD$ es rectángulo y $m\angle DEF = 72°$ se tiene que $m\angle EDF = 18°$.

4. La cantidad de números mayores a 500 y menores a 1000 que al ser divididos por 3, 4, 5 y 8 dejan residuo 2 corresponde a

   (a) 3
   (b) 4
   (c) 8
   (d) 9

   Solución:

   Si n es uno de los números entonces $\exists\ a, b, c, d \in \mathbb{Z}$ tales que:

   i. $n = 3a + 2$.
   ii. $n = 4b + 2$.
   iii. $n = 5c + 2$.
   iv. $n = 8d + 2$.

De i, ii y iii se tiene que $n-2$ es múltiplo de 3, 4 y 5. Dado que 3, 4 y 5 son primos entre sí se cumple que $n-2$ es múltiplo de $3 \cdot 4 \cdot 5 = 60$.

Los múltiplos de 60 mayores a 500 y menores a 1000 son: 540, 600, 660, 720, 780, 840, 900 y 960. De estos los divisibles por 8 corresponden a: 600, 720, 840 y 960.

Por lo tanto hay 4 números mayores a 500 y menores a 1000 que son divisibles por 3, 4, 5 y 8 son: 602, 722, 842 y 962.

Respuesta correcta: opción b.

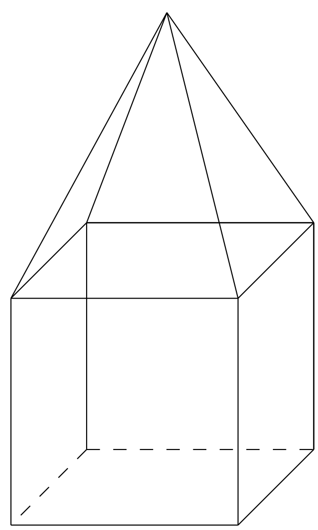
5. Considere la figura sólida que se obtiene al construir una pirámide sobre la cara superior de un cubo, de forma que la base de la pirámide es la cara del cubo. Al sumar el número de caras, aristas y vértices que tiene en total esta figura se obtiene

   (a) 30
   (b) 33
   (c) 34
   (d) 35

Solución:

Opción correcta: Opción c)

El sólido tiene: 9 caras: 5 del cubo y 4 de la pirámide
16 aristas: 12 del cubo y 4 de la pirámide
9 vértices: 8 del cubo y 1 de la pirámide



6. La cantidad de dígitos del número $5^{2010} \times 2^{2016} \times 3^3$ corresponde a

   (a) 2010
   (b) 2014
   (c) 2016
   (d) 2020

   Opción correcta: b) **Solución:**
   $5^{2010} \times 2^{2016} \times 3^3 = 5^{2010} \times 2^{2010} \times 2^6 \times 3^3 = 10^{2010} \times 2^6 \times 3^3 = 10^{2010} \times 1728$. Los primeros cuatro dígitos a la izquierda son 1728 seguido por 2010 ceros, es decir el número tiene 2014 dígitos.

7. ¿Cuántos de los primeros 100 múltiplos positivos de 30 son múltiplos de 70?

   (a) 9
   (b) 10
   (c) 14
   (d) 21

   Solución:

   Al descomponer 30 y 70 en factores primos se obtiene:

   $30 = 2 \cdot 3 \cdot 5$

   $70 = 2 \cdot 5 \cdot 7$

   Los primeros cien múltiplos positivos de 30 son de la forma $30k,\ k \in \mathbb{Z},\ 1 \leq k \leq 100$ o lo que es lo mismo $2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot k,\ k \in \mathbb{Z},\ 1 \leq k \leq 100$.

   Al comparar la descomposición en factores primos de 30 y 70 se observa que tienen en común el 2 y el 5, debido a esto el número $30k$ es múltiplo de 70 cada vez que k sea múltiplo de 7. Dado que k varía de 1 a 100 y que $100 = 7 \cdot 14 + 2$ se tiene que hay 14 múltiplos de 7 entre 1 y 100.

   Por lo tanto hay 14 múltiplos de 30 que son a la vez múltiplos de 70.

   Opción correcta: c

8. Las nuevas placas de automóviles en Costa Rica constan de tres letras consonantes y tres dígitos del 0 al 9, primero las tres letras y luego los tres dígitos. En total hay 21 letras consonantes, las cuales se pueden repetir. El señor Keylor Navas Gamboa quiere tener una placa en la que aparezcan sus iniciales en cualquier orden. Si la placa se asigna al azar, la probabilidad de que Keylor tenga la placa deseada es

   a) $\dfrac{1}{3087}$
   b) $\dfrac{2}{3087}$
   c) $\dfrac{1}{2660}$
   d) $\dfrac{1}{1330}$

   Solución:

   Respuesta correcta: Opción *b*)

   El número de casos totales en que se pueden elegir tres de 21 letras disponibles, incluyendo repeticiones es 21^3, pues para la primera letra hay 21 posibilidades para escoger, lo mismo que para la segunda y tercer letra.

   Las iniciales K, N, G, en cualquier orden dan un total de 6 casos favorables.

   Entonces la probabilidad es $P = \dfrac{6}{21^3} = \dfrac{2 \cdot 3}{7^3 \cdot 3^3} = \dfrac{2}{7^3 \cdot 3^2} = \dfrac{2}{343 \cdot 9} = \dfrac{2}{3087}$

9. Julio tiene una cuenta en el banco, cuyo número tiene la forma $ABC-DEF-GHIJ$, donde cada letra representa un dígito diferente. Los dígitos en cada parte del número tienen la característica de que están ordenados de manera decreciente, es decir, $A > B > C$, $D > E > F$, y $G > H > I > J$. Además D, E y F son números pares consecutivos, mientras que G, H, I y J son dígitos impares consecutivos y $A + B + C = 9$. Entonces el valor de A es

   (a) 5
   (b) 6
   (c) 7
   (d) 8

   Solución

   Para los últimos cuatro dígitos, los cuales deben ser impares consecutivos, tenemos los posibles ordenamientos 9753 o 7531, de donde alguno de los otros impares respectivamente 1 o 9, será el valor de A, B o C, pero recordemos también que $A + B + C = 9$ por lo que descartamos el segundo ordenamiento ya que ninguna de estas letras puede ser 9, por lo que debe ser 1.

   Respecto a los tres dígitos pares consecutivos descendientes, tenemos las posibilidades 864, 642 o 420, quedando los pares 2 y 0, 8 y 0, 8 y 6 respectivamente, los cuales serían los valores de las otras letras de la primera parte del número.

Sabiendo que una de las primeras letras es 1, las otras deben ser 8 y 0 para que estas sumen 9.

Por lo que el número de cuenta es 810-642-9753. y Así $A = 8$, siendo b) la respuesta correcta.

10. Pablo, Andrés y Carlos cuentan con 15, 14 y 13 fichas cada uno. Juegan un juego que sigue una única regla, en cada ronda el jugador que tiene más fichas, da una ficha a cada uno de los otros jugadores y coloca otra en una pila de descarte. El juego termina cuando a alguno de los jugadores se le acaban las fichas. ¿Cuántas rondas tendrá el juego?

    (a) 12
    (b) 15
    (c) 37
    (d) 39

    Solución

    Después de las primeras tres rondas Pablo, Andrés y Carlos contarán con 14, 13 y 12 fichas, respectivamente.

    Es decir, cada secuencia de tres rondas, los jugadores reducen en una sus fichas.

    Después de 36 rondas, cada uno tiene 3, 2, y 1 ficha, respectivamente, y después de la ronda 37, Pablo no tendrá fichas.

11. La probabilidad de que al elegir un número de tres dígitos este satisfaga la condición de que el dígito del medio es el promedio del primer y del último dígito es:

    (a) $\frac{2}{9}$
    (b) $\frac{1}{20}$
    (c) $\frac{45}{899}$
    (d) $\frac{200}{899}$

    Solución

    El primer y último dígito de un número de tres cifras deben ser ambos pares o ambos impares para que el promedio entre ambos sea un número entero.

    Existen $5 \cdot 5 = 25$ combinaciones de números impares para el primer y último dígito y $4 \cdot 5 = 20$ combinaciones de números pares para el primer y último dígito.

    Como para cada combinación el dígito central es único, existen 45 números de tres dígitos que cumplen que el dígito central es el promedio de los dígitos de los extremos.

    Ahora, existen 900 números de tres dígitos, así que la probabilidad buscada es

    $$P(A) = \frac{45}{900} = \frac{1}{20}$$

    La opción correcta es la b)

12. Sea $\triangle ABC$ recto en B. Si D es un punto en $\overline{AB}$ tal que $\dfrac{AD}{DB} = \dfrac{1}{2}$, E es un punto en $\overline{BC}$ tal que $\dfrac{BE}{EC} = \dfrac{2}{3}$ y F es el punto medio de $\overline{AC}$, entonces $\dfrac{(BDFE)}{(ABC)}$ es

   (a) $\dfrac{2}{3}$

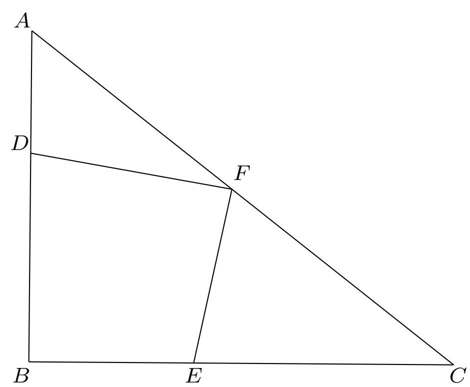
   (b) $\dfrac{3}{5}$

   (c) $\dfrac{4}{15}$

   (d) $\dfrac{8}{15}$

   Solución:

   Respuesta correcta: Opción d)



Llamemos $BC = 5x$ y $AB = 3y$, de modo que $BE = 2x$, $EC = 3x$, $AD = y$ y $DB = 2y$
Vemos que $(BDFE) = (ABC) - (ADF) - (EFC)$
Además $(EFC) = \dfrac{1}{2} \cdot 3x \cdot \frac{3}{2}y = \dfrac{9}{4}xy$, $(ADF) = \dfrac{1}{2} \cdot y \cdot \frac{5}{2}x = \dfrac{5}{4}xy$ y $(ABC) = \dfrac{1}{2} \cdot 5x \cdot 3y = \dfrac{15}{2}xy$

Entonces $(BDFE) = \dfrac{15}{2}xy - \dfrac{5}{4}xy - \dfrac{9}{4}xy = 4xy$

Por lo tanto $\dfrac{(BDFE)}{(ABC)} = \dfrac{8}{15}$

II Parte: Desarrollo **Valor 21 puntos, 7 pts c/u**

Instrucciones: Los siguientes ejercicios deben ser resueltos en las hojas adicionales que se le entregaron. Conteste en forma ordenada, completa y clara. Se califica procedimientos y respuesta.

1. Un hombre tomó una posada por treinta días, por el precio de una moneda de plata cada día. Este huésped no tenía dinero, sino cinco piezas de plata, que entre todas ellas valían treinta monedas de plata. Con estas piezas pagaba cada día la posada y no le quedaba debiendo nada a la posadera, ni ella a él. Determine cuántas monedas de plata valía cada pieza y cómo se pagaba con ellas.

Solución

Una de las piezas ha de valer una moneda de plata, con la que se pagaría el primer día. Para pagar el segundo día usaríamos otra pieza cuyo valor es equivalente al de dos monedas de plata y nos devolvería la de 1 moneda, con la que pagaríamos el tercer día, y la posadera tendría 3 monedas de plata. El cuarto día pagamos con una pieza de 4 monedas de plata y devuelve las dos de 1 y 2 monedas de plata. Seguiríamos pagando con la de 1, después la de 2 y devuelven 1, y así sucesivamente. El octavo día pagaríamos con una de 8 monedas de plata y nos devuelven las de 1, 2 y 4. Así podría pagar hasta el día 15. El día 16 paga con una de 15 y le devuelven las de 2, 4 y 8, y así sucesivamente.
En resumen, las piezas deben ser de 1, 2, 4, 8 y 15 monedas de plata.

2. Rolando construye un rectángulo de a unidades de ancho y b unidades de largo. Luego construye otro en el cual aumenta una unidad el ancho y disminuye dos unidades el largo. A partir de este segundo rectángulo construye un tercero, en el cual disminuye dos unidades el ancho y aumenta tres unidades el largo. A partir de este último construye otro en el que aumenta tres unidades el ancho y disminuye 4 unidades el largo. Continúa construyendo rectángulos de esta forma hasta tener 2015 rectángulos. Si inicialmente $a = b = 2015$, determine el área del rectángulo 2015.

Solución:

Organizando la información en la siguiente tabla

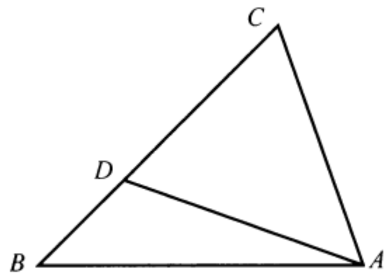
Rectángulo	Área
1	$ab = (a-0)(b+0)$
2	$(a+1)(b-2)$
3	$(a-1)(b+1)$
4	$(a+2)(b-3)$
5	$(a-2)(b+2)$
6	$(a+3)(b-4)$
7	$(a-3)(b+3)$
8	$(a+4)(b-5)$
9	$(a-4)(b+4)$

Observe que cuando $n = 2k+1$ el ancho es $(a-k)$ y el largo $(b+k)$, mientras que cuando $n = 2k$ el ancho es $(a+k)$ y el largo $(b-k-1)$, con $k = 0, 1, 2, ...$

Como $2015 = 2 \cdot 1007 + 1$ entonces el área es $(a-1007)(b+1007)$

Finalmente, como $a = b = 2015$, el área del rectángulo 2015 es $A = (2015-1007)(2015+1007) = 1008 \cdot 3022$.

3. En el $\triangle ABC$, $m\angle ABC = 45°$. El punto D sobre $\overline{BC}$ es tal que $2 \cdot BD = CD$ y $m\angle DAB = 15°$. Determine la medida de $\angle ACB$.

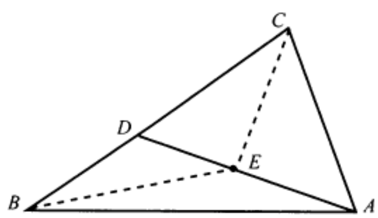


Solución

Sea E un punto sobre $\overline{AD}$ tal que $\overline{CE}$ es perpendicular a $\overline{AD}$, y dibujemos $\overline{BE}$.

Tomamos $\angle ADC$ ángulo exterior de $\triangle ADB$, cuya medida es

$$m\angle ADC = m\angle DAB + m\angle ABD = 15° + 45° = 60°$$



Entonces $\triangle CDE$ cumple ser un triángulo $30° - 60° - 90°$ de donde $DE = \frac{1}{2}CD = BD$. Entonces $\triangle BDE$ es isósceles y $m\angle EBD = m\angle BDE = 30°$. Pero $m\angle ECB$ es también igual a $30°$ y entonces $\triangle BEC$ es isósceles con $BE = EC$.

Por otra parte,

$$m\angle ABE = m\angle ABD - m\angle EBD = 45° - 30° = 15° = m\angle EAB$$

Entonces $\triangle ABE$ es isósceles con $AE = BE$. Por lo tanto, $AE = BE = EC$, y así $\triangle AEC$ es también isósceles con $m\angle EAC = m\angle ECA = 45°$.

Por lo tanto,

$$m\angle ACB = m\angle ECA + m\angle ECD = 45° + 30° = 75°$$