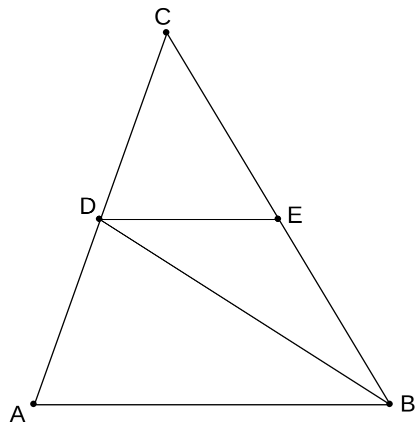
SELECCIÓN ÚNICA

1. En la siguiente figura m∠BAC = 70°, m∠ACB = 50°, m∠DBE = 27° y $\overline{DE}$ es paralela media del ΔABC.



Entonces la medida del ∠ADB corresponde a

a) 77°
b) 80°
c) 90°
d) 103°

Solución: **a)**

m∠ABC = 180° – (70° + 50°) = 60°

m∠DBA = 60° – 27° = 33°

m∠DBA = m∠EDB = 33° por ser ángulos alternos internos entre paralelas.

m∠ADB = 180° – (33° + 70°) = 77°

2. Mentirositico miente los días sábado, domingo y lunes y dice la verdad el resto de los días de la semana. Charlatán miente los días martes, miércoles y jueves y dice la verdad los demás días de la semana. Si un día de la semana ambos dicen al mismo tiempo: "*Mañana me toca mentir*", entonces el día que será mañana corresponde a

a) Lunes
b) Martes
c) Miércoles

d) Sábado

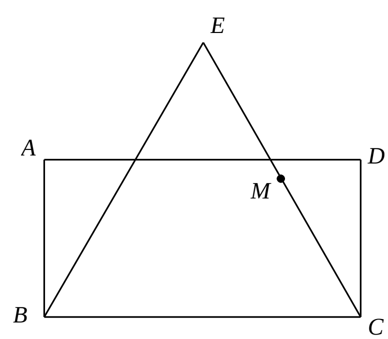
Solución: **b)**

Construyendo una tabla y considerando que uno tiene que decir la verdad y otra una mentira, de forma tal que el día siguiente al que le toca mentir debe de decir la verdad y al que le toca decir la verdad al día siguiente miente. Entonces el día en que dicen la frase simultáneamente es el día lunes, por lo que el día que será mañana es martes.

	domingo	lunes	martes	miércoles	jueves	viernes	sábado
Mentirositico	M	M	V	V	V	V	M
Charlatán	V	V	M	M	M	V	V

Por lo que la opción correcta es B.

3. Sea $\square ABCD$ un rectángulo tal que $BC = 2AB$ y sea ΔBCE un triángulo equilátero. Si M es el punto medio de CE, entonces la medida del ángulo $\angle EMD$ corresponde a



a) 95°
b) 100°
c) 105°
d) 120°

Solución: **c)**

Como M es el punto medio de EC, entonces $EC = 2CM$ y por hipótesis $BC = 2AB$. Así, al ser ΔBCE equilátero se tiene que $EC = BC$ por lo que $2CM = 2DC$; es decir, $CM = DC$ y el triángulo ΔCDM es isósceles. Ahora como $\square ABCD$ es rectángulo y ΔBCE equilátero, entonces $\angle MCD = 90° - 60° = 30°$ y al ser ΔCDM isósceles se sigue que $\angle CMD = \dfrac{180° - 30°}{2} = 75°$

Por lo tanto $\angle EMD = 180° - 75° = 105°$

4. Si el número $10^{2012} - 2012$ se expresa en notación decimal, entonces la suma de sus cifras es

a) 18 086
b) 18 095
c) 18 104
d) 18 113

Solución: c)

Al efectuar la resta el número es $999...9997988$ donde hay 2009 9's, por lo tanto la suma de los dígitos es $2009 \cdot 9 + 7 + 8 + 8 = 18104$

5. En la siguiente cuadrícula a, b, c, d, e, f representan números naturales. Si al sumar los números de cada fila, columna o diagonal se obtiene el mismo resultado, entonces el valor de $c + d + e$ es

a	71	*b*
c	*d*	*e*
64	*f*	53

a) 100
b) 128
c) 137
d) 138

Solución: d)

Como la suma de cada fila, columna o diagonal da el mismo resultado se tiene:

$$64 + f + 53 = 71 + d + f \Rightarrow d = 46$$
$$64 + 46 + b = 53 + b + e \Rightarrow e = 57$$
$$53 + 46 + a = a + 71 + b \Rightarrow b = 28$$

Además

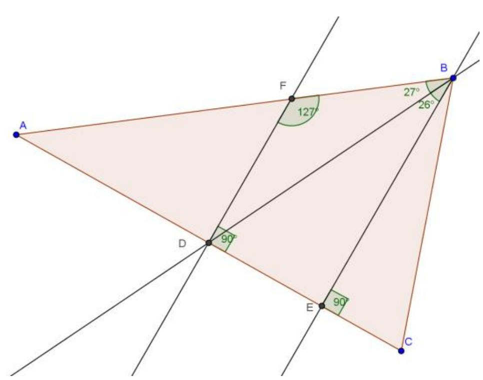
$$c + d + e = b + e + 53 = 28 + 57 + 53 = 138$$

6. En un ΔABC, $\overleftrightarrow{BE}$, $\overleftrightarrow{BD}$ y $\overleftrightarrow{FD}$ (van con notación de rectas o de segmentos?) son, respectivamente, la altura, la mediana y la mediatriz sobre el lado $\overline{AC}$, con A – D – E – C y A – F – B. Si $m\angle DFB = 127°$ y $m\angle DBE = 26°$ entonces la medida en grados del $\angle DBA$ es

a) 26
b) 27
c) 53
d) 64

Solución: **b)**

Al considerar los datos del enunciado se obtiene una figura como la siguiente.



La mediatriz y la altura son paralelas pues ambas son perpendiculares al lado AC por lo que $\angle DFB$ y $\angle FBE$ son suplementarios (conjugados entre paralelas). Como se sabe que $m\angle DFE = 127°$, entonces $\angle FBE$ debe medir $53°$ y como $m\angle DBE = 26°$ entonces $m\angle DBA = 27°$.

7. Considere una secuencia de números cuyos primeros elementos son $\frac{2}{5}, \frac{1}{8}, \frac{4}{13}, \frac{3}{20}, \frac{r}{29}, \frac{z}{w}$. Si los demás términos continuarán con el mismo patrón entonces se puede asegurar que

a) r = 6 y w = 40
b) r = 6 y z = 7
c) w = 40 y z = 7
d) z = 5 y w = 42

Solución: a)

Al observar los primeros términos de la secuencia se puede observar el siguiente patrón:

# término	1	2	3	4	5	6	N
Numerador	1+1 = 2	2 -1 = 1	3 + 1 = 4	4 – 1 = 3	5 + 1 = 6	6 – 1 = 5	$N-(-1)^N$
Denominador	$4+1^2=5$	$4+2^2=8$	$4+3^2=13$	$4+4^2=20$	$4+5^2=29$	$4+6^2=40$	4+N·N

Por lo tanto, r = 6, z = 5 y w = 40.

También se puede deducir el patrón al observar que las diferencias entre dos denominadores consecutivos aumentan de 2 en 2:

8 – 5 = 3
13 – 8 = 5
20 – 13 = 7
29 – 20 = 9
Por lo tanto w – 29 = 11, de donde se concluye que w = 40.

Además, al observar los numeradores se puede observar que a partir del primero, el segundo se obtiene restando 1, el tercero se obtiene sumando 2 al segundo y se repite:
1 = 2 – 1
4 = 2 + 2
3 = 4 – 1
Entonces r = 4 + 2 = 6 y z = 6 – 1 = 5.

8. Se toman las alturas de los alumnos de un grupo y se suman todas ellas. Los estudiantes se separan en dos grupos: los que miden menos de 2m y los que miden más de 2m. Después se suma lo que le falta a la estatura de cada alumno del primer grupo para ser igual a 2m. Por último se suman los excesos de las estaturas de cada alumno del segundo grupo con respecto a los 2m. Si al sumar los primeros dos resultados y restar el tercero se obtiene 120 m. ¿Cuántos alumnos hay en el grupo?

a) 74
b) 68
c) 60
d) 50

Solución: **c)**

Al sumar los resultados de la primera con la segunda suma y restarle la tercera se está agregando a la estatura de cada alumno del grupo 1 lo que le faltaba para medir 2m y quitando a la estatura de cada alumno del segundo grupo lo que se excedía de 2m, por lo que se obtiene un resultado que es equivalente a sumar las estaturas si todos midieran 2m. Como ese resultado es 120m entonces se concluye que se tienen 60 personas en total.

9. Si p es un número primo tal que su triple tiene exactamente p divisores positivos, entonces el triple de p es igual a

a) $2p+1$
b) $p+3$
c) p^2
d) p^3

Solución: **c)**

Como p es un número primo entonces los divisores positivos del triple de p deben ser 1, p, 3 y $3 \cdot p$. Como tiene exactamente tres divisores entonces p es 3. Por lo tanto el triple de p es igual al cuadrado de p.

10. Si un libro pesa medio kilo más la mitad de su propio peso, el peso total del libro es

a) $0,5$ kg

b) 1 kg

c) $1,5$ kg

d) 2 kg

Solución: **b)**

Si el peso del libro es x, la mitad de su peso es $\frac{x}{2}$. Se tiene entonces $\frac{1}{2}+\frac{x}{2}=x$ de donde $x=1$

11. Sean $a, b, c \in \mathbf{Z}$, de las siguientes proporciones la única que es verdadera es

a) Si a divide a $b \cdot c$ entonces a divide a b y a divide a c

b) Si a divide a $b \cdot c$ entonces a divide a b ó a divide a c

c) Si a divide a $(b+c)$ entonces a divide a b ó a divide a c

d) Si a divide a b y a divide a c entonces a divide a $(b+c)$

Solución: **d)**

La única verdadera es la opción d)

Veamos, $a / b \Rightarrow b = a \cdot k_1$, $a / c \Rightarrow c = a \cdot k_2$

Luego $b + c = a \cdot k_1 + a \cdot k_2 = a \cdot (k_1 + k_2) = a \cdot k_3$ con $k_1 + k_2 = k_3 \in \mathbf{Z}$

$\therefore a / (b + c)$

Para las primeras tres proposiciones basta darse un contraejemplo.

12. En un campamento existe alimento para 160 personas durante 35 días. Entonces el número de días que se pueden alimentar 400 personas manteniendo las mismas condiciones corresponde a

a) 8

b) 12

c) 14

d) 18

Solución: **c)**

La cantidad de raciones alimenticias por día son $160 \times 35 = 5600$.

Entonces si se designa con x la cantidad de días con las que se pueden alimentar 400 personas, se tiene que $x \times 400 = 5600 \Rightarrow x = \frac{5600}{400} \Rightarrow x = 14$.

Por lo tanto, la cantidad de días que se pueden alimentar 400 personas es 14.

DESARROLLO

1. Alejandro, Beatriz y Carlos son policías que fueron a entrenar tiro al blanco. Practicaron disparándole a 12 botellas de vidrio: 4 de color rojo, 4 de color verde y 4 de color azul. En total hacen 61 disparos, cada uno acertó exactamente a 4 botellas, y cada uno le dio al menos a una botella de cada color. Además se sabe que Alejandro, por cada botella roja que acertó, realizó exactamente 4 disparos, 8 por cada botella verde y 4 por cada botella azul; Beatriz realizó exactamente 4 tiros por cada botella roja que acertó, 2 por cada botella verde y 3 por cada botella azul; por su parte Carlos realizó exactamente 4 tiros por cada botella roja que acertó, 4 por cada botella verde y 8 por cada botella azul. ¿A cuántas botellas de cada color le acertó cada uno?

Solución:

Organicemos el número de disparos que debe hacer cada uno:

	Botellas Rojas	Botellas Verdes	Botellas Azules
Alejandro	4	8	4
Beatriz	4	2	3
Carlos	4	4	8
	Número de disparos		

Como el número de disparos total es impar (61) Beatriz debió acertar a un número impar de botellas azules (pues en caso contrario el número total de disparos no puede ser impar). Además como acertó al menos a una botella de cada color y a 4 en total, debió acertar a 1 botella azul.

Quedan entonces 58 disparos por repartir. Como 58 no es múltiplo de 4, entonces Beatriz debió acertarle a una cantidad impar de botellas verdes, y siguiendo el mismo razonamiento anterior, debió acertarle a 1 de estas. Por lo tanto debió acertarle a 2 botellas rojas.

Sabemos entonces que Beatriz realizó $2 \cdot 4 + 2 + 3 = 13$ disparos.

Quedan así 48 disparos por repartir entre Alejandro y Carlos.

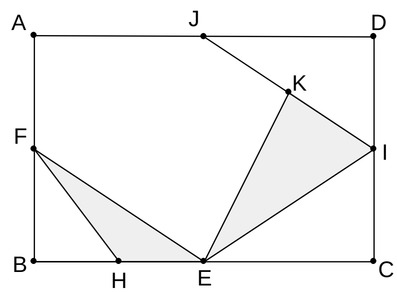
Si solo hubieran disparado a botellas de 4 disparos, eso daría 32 tiros, pues cada uno acertó a 4 botellas; pero dispararon 16 tiros adicionales, por lo que debieron darle a 4 botellas de 8 tiros. Como ninguno pudo acertar a 3 botellas del mismo color, entonces Alejandro debió acertar a 2 botellas verdes y Carlos a 2 botellas azules (botellas de 8 tiros).

Como cada uno acertó al menos a una botella de cada color, entonces Alejandro acertó a 1 botella roja y una azul, mientras que Carlos acertó 1 botella roja y 1 verde.

Se resume en el siguiente cuadro el número de botellas de cada color que acertó cada uno

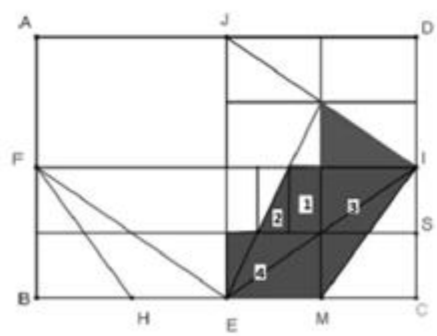
	Botellas Rojas	Botellas Verdes	Botellas Azules
Alejandro	1	2	1
Beatriz	2	1	1
Carlos	1	1	2

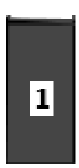
2. Considere el rectángulo ABCD de la figura, en la cual H es el punto medio entre B y E, E el punto medio entre B y C, F el punto medio entre A y B, J el punto medio entre A y D, I el punto medio entre D y C, K el punto medio entre I y J. ¿Qué parte del área del rectángulo ABCD representa la suma de las áreas de las regiones sombreadas?



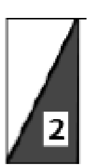
Solución

El área del ΔFEH es igual al área del ΔEMI por lo tanto el área sombreada es igual a la de la siguiente figura:

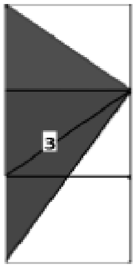




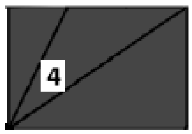
Esta región rectangular tiene de base $\frac{1}{12}$ de la base del rectángulo mayor y de altura $\frac{1}{4}$ de la altura AB. Por lo tanto su área equivale a $\frac{1}{48}$ del área total



Esta región tiene la mitad del área de la región 1, es decir, $\frac{1}{96}$ del área total.



Este triángulo tiene como base $\frac{3}{4}$ de la altura del rectángulo mayor y como altura $\frac{1}{4}$ de la base de ese rectángulo, por lo tanto su área corresponde a $\frac{3}{32}$ del área total.



Las dimensiones de este rectángulo son $\frac{1}{4}$ de las del rectángulo mayor, por lo tanto su área es $\frac{1}{16}$ del área tota.

El área sombreada corresponde entonces a $\frac{1}{48}+\frac{1}{96}+\frac{3}{32}+\frac{1}{16}=\frac{2+1+9+6}{96}=\frac{18}{96}=\frac{3}{16}$.

3. Determine cuál es el mayor número de cuatro cifras de la forma $abab$ que tenga el menor número de divisores.

Solución:

Tenemos que

$$\begin{aligned} abab &= b+10a+100b+1000a \\ &= 1010a+101b \\ &= 101(10a+b) \end{aligned}$$

Como 101 es rimo, la cantidad de divisores depende de $10a+b$ y es la menor posible cuando este número es primo, pero además para que $abab$ sea el mayor posible se requiere que $10a+b$ sea el mayor número primo de dos cifras, es decir 97, por lo que $a=9$ y $b=7$. Así el mayor número de la forma $abab$ que tenga el menor número de divisores corresponde a 9797.