SELECCIÓN ÚNICA

1. La suma de los dígitos del número $8^{10} \cdot 5^{30} - 2$ corresponde a

a) 0

b) 1

c) 269

d) 270

Solución: c)

Como $8^{10} \cdot 5^{30} - 2 = (2^3)^{10} \cdot 5^{30} - 2 = 2^{30} \cdot 5^{30} - 2 = (2 \cdot 5)^{30} - 2 = 10^{30} - 2$, el número dado tendrá 29 dígitos iguales a 9 y en el dígito de las unidades un 8, entonces las suma de los dígitos corresponde a $29 \cdot 9 + 8 = 269$.

2. Si $x + y = 6$, $y + z = 11$ y $x + z = 7$. Entonces el valor de $5(x + y + z)$ corresponde a

a) 10

b) 15

c) 40

d) 60

Solución: d)

Planteamos el siguiente sistema y sumamos las ecuaciones:

$$\begin{cases} x + y = 6 \\ y + z = 11 \\ x + z = 7 \end{cases}$$

$$2x + 2y + 2z = 24$$

$$2(x + y + z) = 24$$

$$x + y + z = 12$$

$$5(x + y + z) = 12 \cdot 5$$

$$5(x + y + z) = 60$$

3. Una manguera tarda en llenar un depósito tres horas y otra manguera tarda en llenarlo 4 horas. Entonces, el tiempo que tardan en llenar el depósito las dos mangueras juntas es aproximadamente

a) 5 minutos

b) 35 minutos

c) 1 hora y 5 minutos

d) 1 hora y 43 minutos

Solución: **d)**

Sea x el tiempo que tarda en llenar el depósito las dos mangueras juntas.

Cada manguera en una hora llena $\frac{1}{3}$ y $\frac{1}{4}$ del depósito respectivamente, por lo que juntas llenarían $\frac{1}{x}$, es decir, $\frac{1}{3}+\frac{1}{4}=\frac{1}{x}$

$\Rightarrow \frac{7}{12}=\frac{1}{x} \Rightarrow x=\frac{12}{7}=1+\frac{5}{7}$ y $\frac{5}{7}$ es aproximadamente 43 minutos.

Así, el tiempo que tardaron es aproximadamente 1 hora y 43 minutos.

4. Sean x, y números racionales. Si $\dfrac{x-3\sqrt{2012}}{3-y\sqrt{2012}}$ es un número racional, entonces el valor de xy es

a) 4

b) 9

c) 18

d) 19

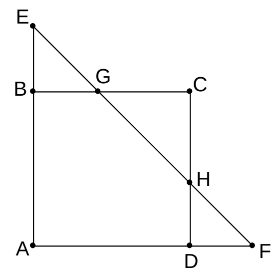
Solución

Racionalizando el denominador se obtiene

$$\frac{x-3\sqrt{2012}}{3-y\sqrt{2012}}\cdot\frac{3+y\sqrt{2012}}{3+y\sqrt{2012}}=\frac{3x+xy\sqrt{2012}-9\sqrt{2012}-3y\left(\sqrt{2012}\right)^2}{3^2-\left(y\sqrt{2012}\right)^2}$$
$$=\frac{3x-6036y+xy\sqrt{2012}-9\sqrt{2012}}{9-2012y^2}$$

Ahora, para que la expresión sea un número racional, $xy\sqrt{2012}-9\sqrt{2012}=\sqrt{2012}\,(xy-9)$ debe ser racional; es decir, $xy=9$

5. En la siguiente figura $\square ABCD$ es un cuadrado y ΔAEF es un triángulo rectángulo isósceles y ambos tiene igual área. Si $AB = l$ entonces el área del triángulo ΔHGC es



a) $l^2\left(3-2\sqrt{2}\right)$

b) $l^2\left(\dfrac{3}{2}+\sqrt{2}\right)$

c) $l^2\left(3-\sqrt{2}\right)$

d) $2l^2\left(1+\sqrt{2}\right)$

Solución: **a)**

Sea $AE = x$. Como $AB = l$ y las áreas del cuadrado y el triángulo son iguales, $\dfrac{x^2}{2} = l^2$, de donde $x = l\sqrt{2}$. De este modo, $DF = DH = l\sqrt{2} - l,\ HC = l - (l\sqrt{2} - l) = 2l - l\sqrt{2}$

Por lo tanto $\left(HGC\right) = \dfrac{l^2(2-\sqrt{2})^2}{2} = l^2(3-2\sqrt{2})$

6. Esmeralda, su madre y su abuela cumplen años el mismo día. Ayer en la fiesta de cumpleaños hablaban sobre las curiosidades de sus edades. Esmeralda dijo: "*Qué curioso!, el promedio de nuestras edades es la edad de mami*". "*No solo eso*"-dijo su abuela-"*el próximo año también ocurrirá eso*".

Esmeralda pensó un momento y dijo: "*Bueno, pero eso va a pasar todos los años*". "*Tienes razón*"- dijo su madre-"*pero lo que no va a volver a pasar es lo que sucede este año: el promedio de tu edad y la mía es la edad que yo tenía cuando naciste*".

La abuela agregó: "*Otra cosa que no va a ocurrir de nuevo es que ahora el promedio de mi edad y la de tu madre es el doble del promedio de las edades de ustedes dos*"

Si Esmeralda cumplió 12 años, ¿en qué año nació su abuela?

a) 1950
b) 1951
c) 1952
d) 1953

Solución: b)

Como Esmeralda tiene 12 años sean $12+x$ la edad de su madre y $12+y$ la edad de su abuela. Así que la edad que tenía la madre de Esmeralda cuando ella nació es x.

Se tiene que $\dfrac{12+(12+x)+(12+y)}{3}=12+x$, de donde $y=2x$

Además, como el promedio de las edades de Esmeralda y su madre es la edad que ella tenía al momento de nacer su hija se tiene que $\dfrac{12+(12+x)}{2}=x$, de donde $x=24$ (Si se utiliza la información del promedio de las edades de la madre y la abuela con el de las edades de la madre y Esmeralda se obtiene el mismo resultado)

Por lo tanto la edad de la madre es 36 años y la de la abuela 60 años, es decir, nació en 1952

7. Se comete un delito y la policía arresta a cuatro sospechosos que al ser interrogados formulan las declaraciones siguientes:

Andrés: “David es el culpable”

David: “Josué es el culpable”

Josué: “David miente cuando dice que yo soy el culpable”

Salomón: “Yo no soy el culpable”

Si solamente uno dice la verdad, entonces se puede afirmar que el culpable es:

a) Andrés
b) David
c) Josué
d) Salomón

Solución: d)

Para la solución del problema se construye una tabla con el nombre de cada sospechoso y le asignamos un valor de verdad a una de las proposiciones y se deduce el valor de verdad de las demás, si se llega a contradicciones hacemos una nueva suposición y cuando no existan contradicciones llegamos a la solución.

	Caso 1	Caso 2	Caso 3	Caso 4
Andrés	V-I	F-I	F-I	F
David	F-C	V-I	F-I	F-I
Josué	F-I-C	F-C-C	V-I-I	F-I-C
Salomón	F-C	F-C	F-C	V-I

Donde la notación corresponde a: V = verdadero, F = falso, C = culpable, I = inocente

Caso 1: Si suponemos que Andrés dice verdad, es inocente, entonces David y Salomón son culpables y Josué sería inocente y culpable a la vez, lo que es imposible y se descarta esta posibilidad.

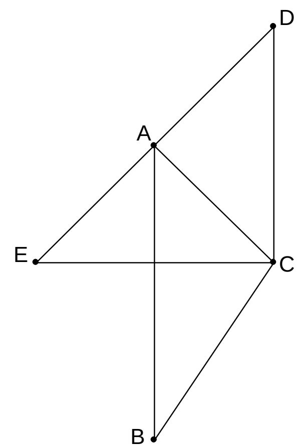
Caso 2: Si suponemos que David dice la verdad este sería inocente al igual que Andrés, entonces Josué y Salomón serían culpables y como es uno solo el culpable se descarta esta posibilidad.

Caso 3: Suponiendo que Josué diga la verdad, deducimos fácilmente que Andrés, David y Josué son inocentes y solo Salomón aparece como único culpable y esta es una posible solución.

Caso 4: Si Salomón dice verdad llegamos rápidamente a una contradicción, pues Josué sería inocente y culpable a la vez y esto es imposible.

Haciendo una valoración de los cuatro casos podemos concluir que el único en que no se llega a una contradicción es en el tercero, por lo tanto Salomón es el culpable.

8. Considere la siguiente figura, en la que $\overline{AC}$ es altura de ΔCDE y ΔABC, ΔCDE es isósceles y rectángulo, $m\angle DEC = 45°$, $BC = 12$ cm y $AB = 13$ cm.



Entonces el perímetro del ΔCDE corresponde a

a) $20\ cm$

b) $(10+10\sqrt{2})\ cm$

c) $20\sqrt{2}\ cm$

d) $(5+\ 5\sqrt{2})cm$

Solución: **b)**

Al ser $\overline{AC}$ altura de ΔABC se puede afirmar que este triángulo es rectángulo. Entonces con $BC = 12\ cm,\ AB = 13\ cm$ aplicando el teorema de Pitágoras obtenemos que $AC = 5\ cm$. Luego tenemos que $m\angle DEC = 45°$ y $\overline{AC}$ es altura de ΔCDE entonces por triángulos especiales tenemos que $AD = 5\ cm = AE$, también $DC = 5\sqrt{2}\ cm = EC$. Por lo tanto el perímetro del ΔCDE corresponde a $(10+10\sqrt{2})\ cm$.

9. Considere el siguiente arreglo de números enteros

$$\begin{array}{ccccc} & & 1 & & \\ & 2 & 3 & 4 & \\ 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \end{array}$$

Así sucesivamente formamos los reglones siguientes. La suma del primer número y último número del reglón 2012 corresponde a:

a) $(2011)^2+1$

b) $(2012)^2+1$

c) $(2011)^2+(2012)^2$

d) $(2011)^2 + (2012)^2 + 1$

Solución: **d)**

Obsérvese lo siguiente

			1				
		2	3	4			
	5	6	7	8	9		
10	11	12	13	14	15	16	
			$\vdots$				
			$\cdots$				$(n-1)^2$
$(n-1)^2+1$			$\cdots$				$(n)^2$

Ya que al final de cada fila se encuentra un cuadrado perfecto, por ejemplo observe que en la fila 2 el último número corresponde a 2^2, en la fila 3 el último número corresponde a 3^2, así en la fila $n-1$ el último número corresponde a $(n-1)^2$, en la fila n el primer número es el sucesor del último número de la fila anterior, o sea $(n-1)^2+1$ y el último corresponde a n^2. Así en la fila 2012 la suma de los números primero y último es $(2011)^2 + 1 + (2012)^2$.

10. Javier fue a la feria del agricultor a comprar frutas. Compró 100 unidades de diferentes frutas entre sandías, manzanas y bananos. La sandía costaba ¢500 la unidad, las manzanas ¢100 la unidad y los bananos ¢10 cada uno. Si en total gastó ¢5000, entonces la diferencia entre el número de bananos comprados y el número de manzanas es

a) 12

b) 21

c) 24

d) 38

Solución: **b)**

Sean x, y, z el número de sandías, manzanas y bananos comprados respectivamente,

Se tiene

$$\begin{cases} 500x + 100y + 10z = 5000 \\ x + y + z = 100 \end{cases} = \begin{cases} 50x + 10y + z = 500 \\ x + y + z = 100 \end{cases}$$

Restando término a término se obtiene $49x+9y=400$ de donde $y=\dfrac{400-49x}{9}$

Como y debe ser positivo $x\in\{1,2,3,\dots,8\}$ y como debe ser entero el único valor posible es $x=1$, de donde $y=39$ y por consiguiente $z=60$.

La diferencia buscada es $x-y=60-39=21$

11. En una tienda de mascotas acaban de traer 90 parejas de periquitos de amor. En la tienda cuentan con 30 jaulas, con capacidad máxima para 35 periquitos en cada una. Se recomienda que en cada jaula se coloque una cantidad par. Si el dueño de la tienda quiere colocar la misma cantidad de aves en cada jaula, y no necesariamente usar todas las jaulas, entonces el número de maneras de hacer esto es

a) 6

b) 7

c) 8

d) 18

Solución: **a)**

Como $180=2^2\cdot 3^2\cdot 5^1$, el número de divisores de 180 es $(2+1)(2+1)(1+1)=18$, los cuales son: $1,2,3,4,5,[6,9,10,12,15,18,20,30,]36,45,60,90,180.$

Como solo hay 30 jaulas, si se usan todas se pueden colocar 6 aves en cada una, pero como se pueden colocar a lo sumo 35 aves en cada jaula, la menor cantidad de jaulas sería 6, con 30 aves cada una.

Como debe haber una cantidad par de aves en cada jaula, se buscan los divisores pares, entre 6 y 30, incluyendo a ambos, lo que da un total de 6 posibilidades.

12. Al trazar un segmento cuyos extremos son dos puntos de una circunferencia, se determinan dos regiones en el círculo. Si se trazan dos de estos segmentos, el círculo queda dividido en cuatro regiones a lo sumo. ¿Cuál es el mayor número de regiones que se pueden determinar si se trazan 8 segmentos de esta forma?

a) 31
b) 35
c) 37
d) 39

Solución: **c)**

El primer segmento determina dos regiones. El segundo segmento divide cada una de estas dos regiones en dos y determina 4 regiones.

Un tercer segmento dividirá tres de estas cuatro regiones en dos, es decir, agregará 3 más, determinando 7 regiones en total.

Un cuarto segmento, a lo sumo puede atravesar 4 de estas 7 regiones, es decir, agregará 4 regiones más, para un total de 11.

En forma análoga, el $5°$ segmento agregará 5 regiones más, el $6°$ segmento 6 regiones, etc.

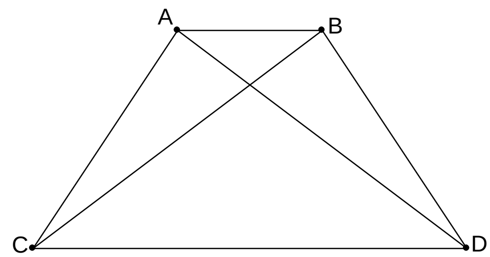
Organicemos en una tabla el número de regiones según el número de segmentos.

# *segmentos*	# regiones
1	2
2	4
3	7
4	11
5	16
6	22
7	29
8	37

Vemos que 8 segmentos determinan un máximo de 37 regiones.

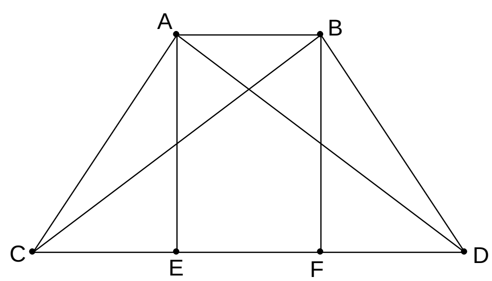
DESARROLLO

1. Se da el trapecio isósceles $\square ABDC$ con $\overline{AB} \parallel \overline{CD}, \overline{DA} \perp \overline{CA}$ y $\overline{CB} \perp \overline{BD}$. Si $CD = 25\ cm$, $CA = 15\ cm$. Entonces. ¿Cuál es el área del trapecio?



Solución:

Con $\overline{DA} \perp \overline{CA}$ obtenemos que el ΔADC es rectángulo. Entonces con $CD = 25\ cm$ y $CA = 15\ cm$ por el teorema de Pitágoras determinamos que $AD = 20\ cm$. Luego El área del triángulo ΔADC corresponde a $\frac{AD \cdot CA}{2} = 150\ cm^2$ pero además podemos trazar la altura $h\ (\overline{AE})$ tal y como se muestra en la figura



Con esto tenemos que el área del triángulo ΔADC también corresponde a $\frac{h \cdot 25}{2}$. Entonces $\frac{h \cdot 25}{2} = 150\ cm^2$, por lo tanto $h = 12\ cm$. Ahora por el teorema de Pitágoras en el ΔAEC tenemos que $CE = 9\ cm$. Luego al ser el $\square ABDC$ isósceles entonces $BD = 15\ cm$ y de la misma forma se determina que $FD = 9\ cm$, entonces $EF = 7\ cm$, entonces el área del cuadrilátero corresponde a $(ACE) + (BFD) + (ABFE) = \frac{12 \cdot 9}{2} + \frac{12 \cdot 9}{2} + 12 \cdot 7 = 192\ cm^2$.

2. Probar que $n\left(2n^2 + 3n + 1\right)$ es divisible por 6 para todo $n \in \mathbb{Z}^+$.

Solución:

$$n\left(2n^2 + 3n + 1\right) = n\left(n+1\right)\left(2n+1\right)$$

$n(n+1)$: Es par por ser el producto de dos números consecutivos (divisible por 2).

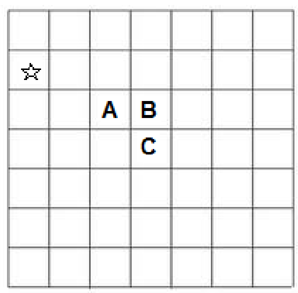
Falta probar que la expresión es divisible por 3.

Para el caso se tienen las siguientes posibilidades para *n*:

1. Que *n* se divisible por tres con lo que quedaría probado que la expresión es divisible por 6.
2. Que el residuo al dividir *n* por 3 sea 2. Entonces $n + 1$ será divisible por 3 y quedaría probado que la expresión es divisible por 6.
3. Que el residuo al dividir *n* por 3 sea 1. Entonces $2n + 1$ será divisible por 3 y quedaría probado que la expresión es divisible por 6.

Entonces la expresión $n(n+1)(2n+1)$ para todo $n \epsilon \mathbb{Z}^{+}$ es divisible por 6, que es lo que se quería probar.

3. Considere una cuadrícula *n x n* donde *n* es un número natural. Se llamarán cuadrados adyacentes a dos cuadrados 1x1 que compartan un lado. Por ejemplo en la cuadrícula es de 7 *x* 7 de la figura, C es adyacente a B pero no a A.



Se desea trazar una línea continua (sin levantar el lápiz de la hoja) a la que pertenezcan los centros de todos los cuadrados, de modo que se unan de forma consecutiva los centros de dos cuadrados adyacentes, sin que se salga de la cuadrícula ni se atraviese un cuadrado más de una vez, iniciando en el centro del primer cuadrado a la izquierda en la segunda fila

¿Es esto posible? Si lo es indique la forma de lograrlo, y si no es posible justifíquelo.

Solución:

Llamemos (p,q) al cuadro de la fila *p* y la columna *q* numeradas de arriba hacia abajo y de izquierda a derecha respectivamente. La casilla inicial sería entonces $(2,1)$.

Caso I: n **par**

Se puede proceder de varias maneras. En la siguiente figura se muestra una solución para el caso *n* = *6*: trazar la línea que una los centros de las casillas

(1) $(2,1)$ con $(n,1)$

(2) $(n,1)$ con (n,n)

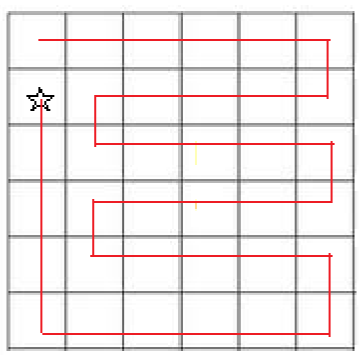
(3) (n,n) con $(n-1,n)$

(4) $(n-1,n)$ con $(n-1,2)$

(5) $(n-1,2)$ con $(n-2,2)$

(6) $(n-2,2)$ con $(n-2,n)$

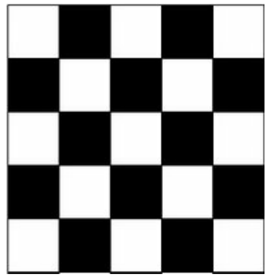
Y así sucesivamente hasta llegar a $(2,n)$ repitiendo pasos análogos a los pasos del 3 al 6 $\dfrac{n-2}{2}$ veces. Por último, se une $(2,n)$ con $(1,n)$ y esta con $(1,1)$.



Esta solución funciona para cualquier valor par de *n*.

Caso II: *n* impar

En este caso no es posible trazar una curva con las condiciones dadas. Si considera una cuadrícula coloreada como la siguiente:



Se tendrían n^2 casillas en total, $\frac{n^2-1}{2}$ negras y $\frac{n^2+1}{2}$ blancas. Si se inicia en una negra se debe pasar necesariamente a una blanca, luego una negra y así sucesivamente. Por ser una cantidad impar de casillas, la última debe tener el mismo color que la primera, en este caso negra.

Si no se cuenta la casilla inicial, se tienen $\frac{n^2-3}{2}$ fichas negras y $\frac{n^2+1}{2}$ fichas blancas por lo que no es posible lograr el objetivo planteado.