SELECCIÓN ÚNICA

1. Si un hexágono regular y un octágono regular tienen radios congruentes, entonces la razón entre el área del hexágono y el área del octágono es

a) $\frac{3\sqrt{6}}{8}$

b) $\frac{\sqrt{6}}{2}$

c) $\frac{3}{4}$

d) $\frac{9}{10}$

Solución: a)

En un hexágono regular el ángulo central mide 60° y en un octágono regular mide 45° por lo tanto la razón de las áreas es:

$$\frac{\text{Área del hexágono}}{\text{Área del octógono}} = \frac{\frac{6 \cdot r^2 \cdot sen(60°)}{2}}{\frac{8 \cdot r^2 \cdot sen(45°)}{2}} = \frac{3 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}}{4 \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}} = \frac{3\sqrt{6}}{8}.$$

Nota: El área de un polígono regular de n lados y radio r está dada por $A = \frac{n \cdot r^2 \cdot \text{sen(ángulo central)}}{2}$

2. La cantidad de enteros positivos n para los cuales la expresión $\frac{n+5}{n-10}$ es un número entero corresponde a

a) 2

b) 4

c) 7

d) 15

Solución: c)

$\frac{n+5}{n-10}=\frac{n-10+10+5}{n-10}=1+\frac{15}{n-10}$. Para que la expresión corresponda a un número entero, entonces $n-10$ debe dividir a 15, y como los divisores son $\pm 1, \pm 3, \pm 5, \pm 15$, al igualar $n-10$ a cada uno de estos divisores se obtienen los valores de n, con excepción de -15, pues n sería negativo.

Por lo tanto, la cantidad de enteros positivos es 7

3. El director de un colegio está interesado en disminuir la cantidad de estudiantes de cada grupo. Sabe que si no varía la cantidad de alumnos entonces, si aumenta en 5 la cantidad de aulas, el promedio de estudiantes se reduce en 6, y que si construye otras 5 aulas más entonces el promedio de estudiantes por clase se reduce en 4. Entonces, la cantidad de estudiantes que hay en la institución es

a) 560
b) 600
c) 650
d) 720

Solución

Sea x el número de estudiantes y n el número inicial de aulas. El promedio inicial de estudiantes por clase es $\frac{x}{n}$.
Si se incrementa en 5 el número de aulas, el promedio es $\frac{x}{n+5}$ y por lo tanto, $\frac{x}{n+5} = \frac{x}{n} - 6$
$\Rightarrow nx = (n+5)(x-6n) \Rightarrow 5x = 6n^2 + 30n(1)$
Si se incrementa nuevamente en 5 el número de aulas, el promedio es $\frac{x}{n+10}$ y por lo tanto
$\frac{x}{n+10} = \frac{x}{n} - 10 \Rightarrow nx = (n+10)(x-10n) \Rightarrow 10x = 10n^2 + 100n \Rightarrow 5x = 5n^2 + 50n(2)$
Igualando las ecuaciones (1) y (2) se obtiene
$6n^2 + 30n = 5n^2 + 50n \Rightarrow n^2 - 20n = 0 \Rightarrow n(n-20) = 0 \Rightarrow n = 0$ o $n = 20$
Así, $n = 20$ pues corresponde a una cantidad.
Despejando la ecuación (2) se obtiene $x = n^2 + 10n$; por lo tanto, $x = 20^2 + 10 \cdot (20) = 400 + 200 = 600$.

4. En la siguiente cuadrícula A, B, C, D, E, F representan números naturales distintos tales que al multiplicar los números de cada fila, columna o diagonal se obtiene el mismo resultado entonces el valor de $D+E+F$ es

2	64	*32*
A	*B*	*C*
D	*E*	F

a) 120
b) 138
c) 140
d) 146

Solución: c)

Sea N el resultado de multiplicar los números de cada fila, columna o diagonal. Se tiene entonces que

$N = 2 \cdot 64 \cdot 32 = 2^{12}$ y $N = D \cdot E \cdot F$

Además

$N = 2 \cdot B \cdot F$

$N = 64 \cdot B \cdot E$

$N = 32 \cdot B \cdot D$

De donde

$$N^3 = \left(2\cdot 64\cdot 32\right)\cdot B^3\cdot\left(D\cdot E\cdot F\right) \Rightarrow N^3 = N\cdot B^3\cdot N \Rightarrow B^3 = N \Rightarrow B^3 = 2^{12} \Rightarrow B = 16$$

Con esto se tiene que

$$64\cdot 16\cdot E = 2^{12} \Rightarrow E = 2^2 = 4$$
$$32\cdot 16\cdot D = 2^{12} \Rightarrow D = 2^3 = 8$$
$$2\cdot 16\cdot F = 2^{12} \Rightarrow F = 2^7 = 128$$

Por lo tanto $D + E + F = 140$

5. En un círculo se inscribe un rectángulo de tal manera que su área corresponde a la mitad del área del círculo. Entonces, la razón entre el largo y el ancho del rectángulo es

a) $\dfrac{4-\sqrt{16-\pi^2}}{\pi}$

b) $\dfrac{4+\sqrt{16-\pi^2}}{\pi}$

c) $\dfrac{\pi}{4+\sqrt{16-\pi^2}}$

d) $\dfrac{4+\sqrt{2\pi^2-16}}{\pi}$

Solución: b)

Sean $r,\ x,\ y$ las medidas del radio del círculo, el largo y ancho del rectángulo respectivamente. La diagonal del rectángulo corresponde a un diámetro del círculo, es decir, $\sqrt{x^2+y^2} = 2r$, por lo que $\frac{1}{4}\left(x^2+y^2\right) = r^2$. Además, como el área del rectángulo es la mitad del área del círculo se tiene:

$$xy = \frac{1}{2}\pi r^2 \Rightarrow xy = \frac{1}{2}\pi\frac{1}{4}\left(x^2+y^2\right) \Rightarrow 8xy = \pi\left(x^2+y^2\right) \Rightarrow \pi x^2 - 8xy + \pi y^2 = 0$$

Resolviendo la ecuación cuadrática en términos de x se tiene:

$$\Delta = \left(-8y\right)^2 - 4\cdot\pi\cdot\pi y^2 = y^2\left(64-4\pi^2\right)$$

$$x = \frac{8y \pm \sqrt{y^2\left(64-4\pi^2\right)}}{2\pi} = y\left(\frac{8\pm\sqrt{64-4\pi^2}}{2\pi}\right) \Rightarrow \frac{x}{y} = \frac{8\pm\sqrt{64-4\pi^2}}{2\pi}$$

Se tiene así que $\frac{x}{y}=\frac{8+\sqrt{64-4\pi^2}}{2\pi}$ ó $\frac{x}{y}=\frac{8-\sqrt{64-4\pi^2}}{2\pi}$

Como $\frac{8+\sqrt{64-4\pi^2}}{2\pi}>\frac{8}{2\pi}>1$, mientras que $\frac{8-\sqrt{64-4\pi^2}}{2\pi}=\frac{2\pi}{8+\sqrt{64-4\pi^2}}<1$ y como

$x\geq y$, la respuesta correcta es $\frac{x}{y}=\frac{8+\sqrt{64-4\pi^2}}{2\pi}=\frac{4+\sqrt{16-\pi^2}}{\pi}$

6. Considere una circunferencia cuyo centro es el punto de coordenadas $(6,6)$ y es tangente a la recta l de ecuación $x+2y=8$. El área del triángulo cuyos vértices son el centro de la circunferencia y los puntos donde la recta l interseca a los ejes coordenados es $20(u.l.)^2$. Entonces la longitud de esa circunferencia es

a) $2\pi\sqrt{5}\ u.l.$

b) $4\pi\sqrt{5}\ u.l.$

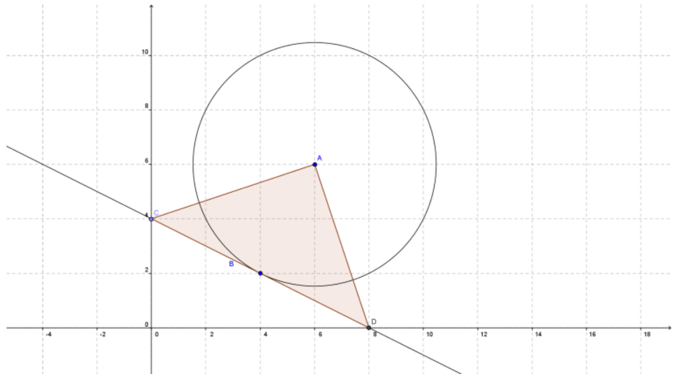
c) $8\pi\sqrt{5}\ u.l.$

d) $16\pi\sqrt{5}\ u.l.$

Solución: b)

Las intersecciones de la recta l con los ejes de coordenadas son los puntos $(0,4)$ y $(8,0)$, los cuales determinan junto con el origen del sistema de coordenadas, un triángulo rectángulo cuyos catetos miden 4 y 8. Por lo tanto esas intersecciones están a una distancia de $\sqrt{4^2+8^2}=4\sqrt{5}\ u.l.$

Por lo tanto, una de las bases del triángulo determinado por estos dos puntos y el centro de la circunferencia mide $4\sqrt{5}$ y la altura correspondiente es el radio. Como se sabe que el área de este triángulo es 20 entonces se debe cumplir que $\frac{r\cdot 4\sqrt{5}}{2}=20\Rightarrow 2r\sqrt{5}=20\Rightarrow r=2\sqrt{5}$. De lo anterior se concluye que la longitud de la circunferencia es $2\pi r=4\pi\sqrt{5}\ u.l.$



7. Considere el número real positivo a, $a \neq 1$, y la función $f:\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(-x) = \dfrac{1}{a^{ax}}$. Si se sabe que para todo número real x se cumple que $\log_a\left(x^2+1\right) < \log_a\left(x^2+2\right)$ entonces f es

a) creciente e inyectiva

b) creciente y sobreyectiva

c) decreciente e inyectiva

d) decreciente y sobreyectiva

Solución: a)

Como se sabe que $\log_a\left(x^2+1\right) < \log_a\left(x^2+2\right)$ y $x^2+1 < x^2+2$ entonces la función definida por $g(x) = \log_a(x)$ es creciente, de donde se concluye que $a > 1$.

Por lo tanto $a^a > 1$ y como $f(-x) = \dfrac{1}{a^{ax}} = \left(a^a\right)^{-x} \Rightarrow f(x) = \left(a^a\right)^x$ entonces f es estrictamente creciente y por lo tanto inyectiva.

Además, el rango de f es $]0,+\infty[$ por lo que f no es sobreyectiva.

8. Si x y y son dos dígitos tales que la expansión decimal del número racional $\frac{1y1}{495}$ es $0,x\overline{0y}$ entonces los valores de x y y son, respectivamente

a) 3 y 5

b) 2 y 4

c) 7 y 4

d) 3 y 7

Solución: a)

Si consideramos $n = 0,x\overline{0y}$ entonces $10n = x,\overline{0y}$ y $1000n = x0y,\overline{0y}$; por lo tanto $990n = 100n - 10n = x0y,\overline{0y} -, x,\overline{0y} = x0y - x$; implica que

$$n = \frac{x0y - x}{990} = \frac{1y1}{495} = \frac{2(1y1)}{990}$$

Entonces $x0y - x = 2(1y1)$, expresando lo anterior en representación desarrollada tenemos que $100x + y - x = 2(100 + 10y + 1)$, despejando "$x$" tenemos:

$$x = \frac{202 + 19y}{99} = 2 + \frac{4 + 19y}{99}$$

En donde $x, y \in \{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$ y para que $4 + 19y$ sea divisible por 99 es cuando $y = 5$, se concluye entonces $x = 3$.

9. Considere la siguiente relación entre las variables t y x para una constante $a < 2$:

$t = \left(\frac{a}{2} - 1\right)x^2 + (a-1)x$. Cuando $t = -2$ un valor de x es

a) -2

b) 2

c) $\dfrac{2}{a-2}$

d) $\dfrac{2}{a+2}$

Solución **a)** -2

Se trata de una ecución cuadrática:

$$-2=\left(\frac{a}{2}-1\right)x^2+(a-1)x \Leftrightarrow 0=\left(\frac{a}{2}-1\right)x^2+(a-1)x+2$$

El discriminante es $\Delta=(a-1)^2-4\left(\frac{a}{2}-1\right)2=a^2-2a+1-4a+8=(a-3)^2$

Por lo tanto $x=\dfrac{-(a-1)\pm\sqrt{(a-3)^2}}{2\left(\frac{a}{2}-1\right)}=\dfrac{1-a\pm|a-3|}{a-2}$

Como se sabe que $a<2$ entonces $x_1=\dfrac{1-a+(3-a)}{a-2}=\dfrac{4-2a}{a-2}=-2$ y

$x_2=\dfrac{1-a-(3-a)}{a-2}=\dfrac{-2}{a-2}=\dfrac{2}{2-a}$

10. Considere una función definida por $f(x)=\dfrac{\sqrt{ax+4}}{x^2+3x-10}$ definida en su dominio máximo $D_f=\left]-\infty,-5\right[\cup\left]-5,2\right[$ entonces la imagen de $a-1$ es igual a

a) $-\dfrac{1}{\sqrt{10}}$

b) $\dfrac{\sqrt{10}}{10}$

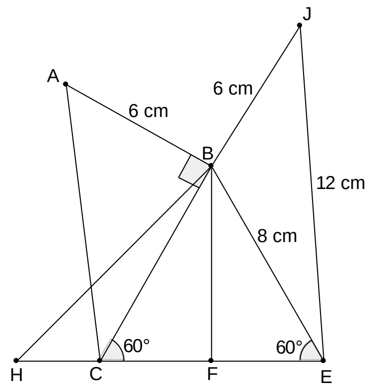
c) -2

d) -3

Solución: a)

Como $f(x)=\dfrac{\sqrt{ax+4}}{x^2+3x-10}$ entonces $\sqrt{ax+4}$ debe estar definida para $\forall x\in\left]-\infty,2\right]$ de donde se deduce que $a=-2$. Por lo tanto como $f(x)=\dfrac{\sqrt{-2x+4}}{(x+5)(x-2)}$ y $a-1=-3$ se tiene que $f(a-1)=f(-3)=\dfrac{\sqrt{6+4}}{(-3+5)(-3-2)}=-\dfrac{\sqrt{10}}{10}$

11. De acuerdo con los datos de la figura, donde F es el punto medio de $\overline{CE}$ y $H-C-F-E$, entonces, de los triángulos ΔABC, ΔEBC, ΔHFB *y* ΔEJB, el que tiene mayor área es



a) ΔABC
b) ΔEBC
c) ΔHFB
d) ΔEJB

Solución **b)** ΔEBC

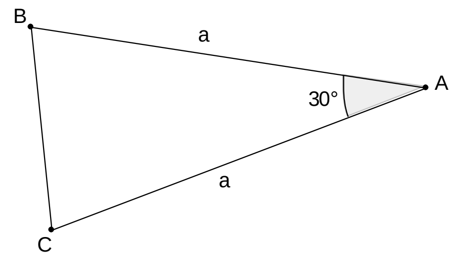
ΔABC es rectángulo, su área es $\dfrac{6\cdot 8}{2}=24$

ΔEBC es equilátero de 8 lado, su área es: $\dfrac{8^2\sqrt{3}}{4}=16\sqrt{3}>24$ porque $\sqrt{3}>1,5 \Rightarrow 16\sqrt{3}>16\cdot 1,5=24$.

ΔHFB es rectángulo, su área es $\dfrac{7\cdot 4\sqrt{3}}{2}=14\sqrt{3}<16\sqrt{3}$

ΔEJB es escaleno, su área se calcula con la fórmula de Herón: $\sqrt{13\cdot 7\cdot 5}=\sqrt{455}<\sqrt{576}=24$.

12. Con la ayuda de la siguiente figura se puede calcular $\cos 75°$, cuyo valor exacto es



a) $\frac{1}{4}\left(\sqrt{6}+\sqrt{2}\right)$

b) $\frac{1}{2}\left(\sqrt{2-\sqrt{3}}\right)$

c) $\frac{13}{50}$

d) $\frac{1}{2}\left(\sqrt{\sqrt{2}-1}\right)$

Solución: b)

Aplicando la ley de cosenos para determinar BC se tiene que

$$BC^2 = a^2 + a^2 - 2a^2 \cos 30^\circ = 2a^2 - a^2\sqrt{3} = a^2\left(2-\sqrt{3}\right)$$
$$\Rightarrow BC = a\sqrt{2-\sqrt{3}}$$

Como el ΔABC es isósceles, entonces se cumple que $\angle ABC \cong \angle BCA$, por lo que cada uno mide $\dfrac{180^\circ - 30^\circ}{2} = 75^\circ$.

Si se traza la altura $\overline{AM}$ con M el punto medio de $\overline{BC}$ se tiene que $\cos 75^\circ = \dfrac{\frac{a}{2}\sqrt{2-\sqrt{3}}}{a} = \dfrac{1}{2}\sqrt{2-\sqrt{3}}$

DESARROLLO

1. Determine la cantidad de enteros positivos menores que 100 que satisfacen la ecuación

$$\left[\frac{n}{2}\right]+\left[\frac{n}{3}\right]+\left[\frac{n}{6}\right]=n$$

Donde $[x]$ se define como el mayor entero que es menor o igual a x

Solución

Por la definición $[x] \leq x$ y en la ecuación, se tiene que

$$\left[\frac{n}{2}\right]+\left[\frac{n}{3}\right]+\left[\frac{n}{6}\right] \leq \frac{n}{2}+\frac{n}{3}+\frac{n}{6}=n$$

Así, para que se de la igualdad $\left[\frac{n}{2}\right]=\frac{n}{2}$, $\left[\frac{n}{3}\right]=\frac{n}{3}$, y $\left[\frac{n}{6}\right]=\frac{n}{6}$, por lo que n debe ser divisible por $2, 3$ y 6, es decir, por 6.

Ahora $\frac{100}{6} \approx 16,6$ por lo que la cantidad de enteros positivos menores que 100 y múltiplos de 6 son 16

2. Considere una función $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ cuya gráfica es una parábola en la cual el eje de simetría es la recta de ecuación $x=2$. Si se sabe que para cualquier número real x se cumple que $\frac{1}{2} f\left(\frac{x}{2}-1\right)-\frac{1}{2} f\left(\frac{x}{2}+1\right)=xf(0)+1$, determine la distancia entre los puntos donde esa parábola interseca al eje X.

Solución

Sea $f(x)=ax^2+bx+c$ entonces

$$\frac{1}{2}f\left(\frac{x}{2}-1\right)-\frac{1}{2}f\left(\frac{x}{2}+1\right)=xf\left(0\right)+1$$

$$\Leftrightarrow a\left(\frac{x}{2}-1\right)^2+b\left(\frac{x}{2}-1\right)+c-a\left(\frac{x}{2}+1\right)^2-b\left(\frac{x}{2}+1\right)-c=2xc+2$$

$$\Leftrightarrow a\left(\frac{x^2}{4}-x+1\right)+b\left(\frac{x}{2}-1\right)+c-a\left(\frac{x^2}{4}+x+1\right)-b\left(\frac{x}{2}+1\right)-c=2xc+2$$

$$\Leftrightarrow \frac{ax^2}{4}-ax+a+\frac{bx}{2}-b+c-\frac{ax^2}{4}-ax-a-\frac{bx}{2}-b-c=2xc+2$$

$$\Leftrightarrow -2ax-2b=2xc+2$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a=-c \\ b=-2 \end{cases}$$

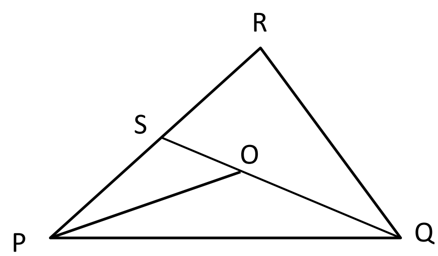
Como se sabe que el eje de simetría es $x=2$ entonces $-\frac{b}{2a}=2 \Rightarrow \frac{1}{a}=2 \Rightarrow a=\frac{1}{2} \Rightarrow c=-\frac{1}{2}$

La distancia entre los puntos de intersección con los ejes está dada por

$$\left|\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}-\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}\right|=\left|\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{a}\right|=\frac{\sqrt{4+1}}{\frac{1}{2}}=2\sqrt{3}\text{ u.l.}$$

3. Si O es un punto en el interior del ΔPQR y S es un punto tal que $P-S-R$ y $Q-O-S$, pruebe que PR + PQ > OR + OQ.

Solución:



$PR+PQ=PS+SR+PQ$. Además $PS+PQ>QS$ por desigualdad triangular. Sumando SR se tiene que $PS+SR+PQ>QS+SR$. Por tanto $PR+PQ>QS+SR$ (1)

Por otro lado, $QS+SR=QO+OS+SR$, y por desigualdad triangular $OS+SR>OR$. Sumando QO se tiene que $QO+OS+SR>QO+OR$. Por lo tanto $QS+SR>QO+OR$ (2)

De (1) y (2) se concluye que $PR + PQ > QO + OR$, que es lo que se quería probar.