XXVI OLIMPIADA COSTARRICENSE DE MATEMÁTICA

UCR-UNA-ITCR-UNED-MEP-MICIT

SEGUNDA ELIMINATORIA NACIONAL

SEGUNDO NIVEL

$(8^{\text{o}}$ - $9^{\text{o}})$

2014

Estimado estudiante:

La Comisión de Olimpiadas Costarricenses de Matemática 2014 le saluda y le da la más cordial bienvenida a la Segunda Eliminatoria Nacional de estas justas académicas y le desea los mayores éxitos.
La prueba consta de un total de 12 preguntas de selección única, ponderadas con un valor de 2 puntos cada respuesta correcta y tres preguntas de desarrollo ponderadas con 7 puntos cada una.

Para conocer del resultado de la prueba, puede consultar a partir del viernes 26 de setiembre, a las siguientes direcciones electrónicas:

www.olcoma.org
www.facebook.com/Olcoma

INSTRUCCIONES GENERALES

- Debe trabajar en forma individual.
- Las respuestas a las preguntas de selección que se le formulan, deben ser consignadas ÚNICAMENTE en la hoja de respuestas que se le ha entregado.
- Los dibujos que aparecen en la prueba no están hechos a escala.
- El formulario de preguntas es suyo, por lo que puede realizar en él todas las anotaciones, cálculos o dibujos que le sean necesarios para resolver satisfactoriamente la prueba.
- La solución a las preguntas de desarrollo deben escribirse en las hojas que para este fin se le han entregado. No se permite el uso de hojas adicionales.
- Los únicos instrumentos cuyo uso se permite son los necesarios para escribir y dibujar. Se prohíbe el uso de libros, libretas de notas, tablas y calculadora.
- El examen tiene una duración máxima de tres horas.
- Escriba claramente los datos que se le solicitan en la hoja de respuestas.

SIMBOLOGÍA

$\overline{AB}$	segmento de extremos A yB	$\measuredangle ABC \cong \measuredangle DEF$	congruencia de ángulos
AB	medida del segmento $\overline{AB}$	$\triangle ABC \cong \triangle DEF$	congruencia de triángulos
$\overrightarrow{AB}$	rayo de extremo A y que contiene a B	$ABC \leftrightarrow DEF$	correspondencia respectiva entre puntos
$\overleftrightarrow{AB}$	recta que contiene los puntos A y B	$\triangle ABC \sim \triangle DEF$	semejanza de triángulos
$\measuredangle ABC$	ángulo de rayos $\overrightarrow{BA}$ y $\overrightarrow{BC}$	$\overline{AB} \cong \overline{CD}$	congruencia de segmentos
$m\measuredangle ABC$	medida del ángulo ABC	$\widehat{AB}$	arco de extremos A y B
$\triangle ABC$	triángulo de vértices A, B, C	$m\widehat{AB}$	medida del arco $\widehat{AB}$
$\square ABCD$	cuadrilátero de vértices A, B, C, D	(ABC)	área del triángulo ABC
$\parallel$	paralelismo	$(ABCD)$	área del cuadrilátero $ABCD$
$\perp$	perpendicularidad	$P-Q-R$	P, Q, R puntos colineales, con Q entre los puntos P y R

I Parte: Selección Única

1. Si se consideran los números enteros del 1 al 2014 inclusive. Entonces la cantidad de estos números que son divisibles por 7 y 11 simultáneamente corresponde a

   (a) 25

   (b) 26

   (c) 27

   (d) 28

2. En la Isla del Coco hay 13 camaleones rojos, 15 amarillos y 17 morados. Cuando se encuentran dos camaleones de colores distintos ambos cambian su color al tercero. Por ejemplo, si se encuentran un camaleón rojo y uno morado los dos se vuelven amarillos. ¿Cuál de las siguientes proposiciones es siempre falsa?

   (a) El número de camaleones rojos puede ser par.

   (b) Los 45 camaleones de la isla nunca serán del mismo color.

   (c) El número de camaleones amarillos puede exceder al número de camaleones morados.

   (d) En algún instante los camaleones de la isla pueden ser del mismo color.

3. La cantidad de números enteros de tres cifras, cuyos dígitos son primos que suman 14 es

   (a) 3

   (b) 6

   (c) 8

   (d) 10

4. Sea $\triangle ABC$ rectángulo en A y D el pie de la altura desde A. Si $AB = 5$ y $BD = 3$, entonces el área del $\triangle ADC$ corresponde a

   (a) $\dfrac{3}{4}$

   (b) $\dfrac{5}{3}$

   (c) 2

   (d) $\dfrac{32}{3}$

5. El número de formas en que se pueden llenar las casillas de una cuadrícula de 2×6 con los números 1 y -1 de manera que la suma de los números en cada fila y cada columna sea 0 es

   (a) 10

   (b) 15

   (c) 18

   (d) 20

6. Al factorizar la expresión $a^3 + b^3 + c^3 - 3abc$ se obtiene que uno de sus factores es

   (a) $a^2 + b^2 + c^2$

   (b) $a - b + c$

   (c) $a + b + c$

   (d) $a + b - c$

7. Considere las ecuaciones $x^2 - 2013x - 2014 = 0$ y $x^2 + 2014x + 2013 = 0$ que tienen una solución en común, determine la suma de las dos soluciones diferentes.

   (a) 0

   (b) 1

   (c) -1

   (d) 4027

8. Considere dos planos perpendiculares π_1, π_2 y l la recta intersección entre ellos. Sean $P_1 \in \pi_1, P_2 \in \pi_2$ tales que no estén en la recta l y sean A, B puntos en l tales que $\overleftrightarrow{AP_1} \perp l$ y $\overleftrightarrow{BP_2} \perp l$. Si $P_1A = 1, P_2B = 2, P_1P_2 = 3$ entonces AB mide

   (a) 1

   (b) 2

   (c) $\sqrt{2}$

   (d) $\sqrt{3}$

9. Sea N el número $4a73b$, en donde a y b son dígitos. ¿De cuántas maneras se pueden elegir a y b de tal forma que N sea divisible por 6?

   (a) 11

   (b) 16

   (c) 30

   (d) 50

10. Santiago y Gilbert están haciendo fresco de sirope con diferentes concentraciones en vasos de igual capacidad. El fresco de santiago tiene 3 partes de sirope por 7 de agua, mientras que el fresco de Gilbert tiene 3 partes de sirope por 5 de agua. Deciden revolverlo para hacer un solo fresco, entonces, ¿cuál es la relación entre las partes de sirope y las partes de agua en el fresco resultante?

    (a) 3 partes de sirope por 5 de agua.

    (b) 7 partes de sirope por 13 de agua.

    (c) 18 partes de sirope por 35 de agua.

    (d) 27 partes de sirope por 53 de agua.

11. Considerando eventos igualmente probables. Si una pareja desea tener tres hijos, uno por cada embarazo, entonces la probabilidad de que la pareja tenga dos niñas y un niño corresponde a

    (a) $\frac{1}{16}$

    (b) $\frac{1}{9}$

    (c) $\frac{1}{4}$

    (c) $\frac{3}{8}$

12. Considere un triángulo ABC con D un punto sobre el lado $\overline{BC}$ tal que $AC = CD$. Si $m\angle CAB - m\angle ABC = 30°$ entonces $m\angle BAD$ es

    (a) $15°$

    (b) $20°$

    (c) $10°$

    (d) $25°$

II Parte: Desarrollo **Valor 21 puntos, 7 puntos c/u**

Instrucciones. Los siguientes ejercicios deben ser resueltos en las hojas adicionales que se le entregaron. Conteste los ejercicios en forma ordenada, completa y clara, se califica procedimiento y respuesta.

1. Dado un $\triangle ABC$ rectángulo en C, tal que la altura sobre la hipotenusa divide a ésta en dos segmentos tal que uno de ellos es dos unidades menor que la altura y el otro es tres unidades mayor que la altura. Calcule la longitud del cateto mayor del $\triangle ABC$.

2. Sea abc un número donde a, b, c son cifras tal que su suma da 18, la cifra de las unidades es el doble de las decenas y la diferencia de los números abc y cba es 297. Determine el número abc.

3. Encuentre la solución del siguiente sistema en donde x, y, z son números reales positivos.

$$\begin{cases} x^2 + xy + xz = 26 \\ xy + y^2 + yz = 27 \\ xz + yz + z^2 = 28 \end{cases}$$