XXV OLIMPIADA COSTARRICENSE DE MATEMÁTICA
PROYECTO INTERINSTITUCIONAL
MEP – UCR – ITCR – UNA – UNED - MICITT

SEGUNDO NIVEL (8°, 9°)

SEGUNDA ELIMINATORIA

23 de agosto de 2013

Nombre completo del estudiante:

____

Nombre completo del colegio

____

Código: _____________

Estimado/a estudiante:

La Comisión Organizadora de las Olimpiadas Costarricenses de Matemática le saluda y felicita por haber clasificado a la s*egunda eliminatoria nacional* de estas justas académicas. La prueba consta de dos partes: una primera parte de doce preguntas de selección única, ponderadas con 2 puntos cada respuesta correcta, y una segunda parte con tres preguntas de desarrollo, con un valor de 7 puntos cada solución correcta.

Los resultados de esta eliminatoria se publicarán a partir del viernes 27 de setiembre en las páginas de OLCOMA:

www.olcoma.org

www.facebook.com/Olcoma

INSTRUCCIONES GENERALES

1. Debe trabajar en forma individual.
2. Las respuestas a las preguntas que se le formulan, deben ser consignadas ÚNICAMENTE en las hojas para respuestas que se le han entregado.
3. Los dibujos que aparecen en la prueba no están hechos a escala.
4. El formulario de preguntas de selección única es suyo, por lo que puede realizar en él todas las anotaciones, cálculos o dibujos que le sean necesarios para resolver satisfactoriamente la prueba.
5. NO se permite el uso de hojas adicionales no entregadas oficialmente.
6. Los únicos instrumentos cuyo uso se permite son los necesarios para escribir y dibujar. Se prohíbe el uso de libros, libretas de notas, tablas y calculadora.
7. Para resolver el examen dispone de un máximo de tres horas.
8. Escriba claramente los datos que se le solicitan en la hoja de respuestas.
9. En la parte de desarrollo deben aparecer con detalle todos los pasos y justificaciones que permiten obtener la respuesta a los ejercicios planteados.

SIMBOLOGÍA

$\overline{AB}$: segmento de recta de extremos *A* y *B*.	$\angle ABC \cong \angle DEF$: congruencia de ángulos.
AB : medida del segmento $\overline{AB}$.	$\Delta ABC \cong \Delta DEF$: congruencia de triángulos.
$\overrightarrow{AB}$: rayo de extremo *A* y que contiene a *B*.	$ABC \leftrightarrow DEF$: correspondencia respectiva entre puntos.
$\overleftrightarrow{AB}$: recta que contiene los puntos *A* y *B*.	$\Delta ABC \sim \Delta DEF$: semejanza de triángulos.
$\angle ABC$: ángulo de lados $\overrightarrow{BA}$ y $\overrightarrow{BC}$.	$\overline{AB} \cong \overline{CD}$: congruencia de segmentos.
$\mathrm{m}\angle ABC$: medida del ángulo *ABC*.	$\widehat{AB}$: arco de extremos *A* y *B*.
ΔABC: triángulo de vértices *A*, *B* y *C*.	$\mathrm{m}\widehat{AB}$: medida del arco $\widehat{AB}$.
ABCD: cuadrilátero de vértices *A*, *B*, *C* y *D*.	(*ABC*): área del triángulo *ABC*.
$\|\|$: paralelismo.	(*ABCD*): área del cuadrilátero *ABCD*.
$\perp$: perpendicularidad.	*P*–*Q*–*R*: puntos colineales, con *Q* entre *P* y *R*.

1. Si *p* un número primo y *k* un número entero positivo par, entonces el promedio de los números $p+1$, $p+2$, …, $p+k$ corresponde a un número

(A) par

(B) primo

(C) no entero

(D) menor que *p*

2. Si $\frac{x}{y}=\frac{4}{3}$ entonces $\frac{18x+7y}{12y+9x}$ es igual a

(A) $\frac{24}{31}$

(B) $\frac{21}{25}$

(C) $\frac{25}{21}$

(D) $\frac{31}{24}$

3. El menor número *n* múltiplo de 6, tal que $n>6$, 7 es divisor de $n+1$, 8 es divisor de $n+2$ y 9 es divisor de $n+3$ es un número tal que

(A) $400<n<450$

(B) $500<n<550$

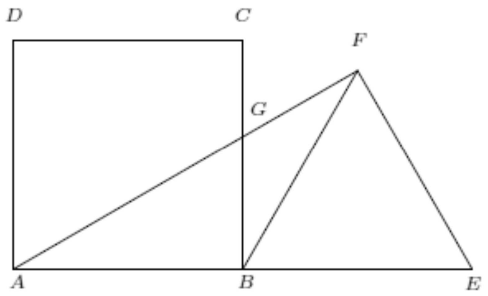
(C) $600<n<650$

(D) $3000<n<3050$

4. De la ciudad de Pakidermis se deben trasladar 2013 elefantes a la ciudad Tomiguis Town. Para trasladarlos se utiliza un tren, el cual puede cargar a lo sumo un elefante en el vagón 1, dos elefantes en el vagón 2, tres elefantes en el vagón 3 y así sucesivamente. ¿Cuál es el mínimo número de vagones que debe tener el tren para trasladar los 2013 elefantes en un solo viaje?

(A) 63
(B) 64
(C) 128
(D) 2013

5. Sea $\square ABCD$ un cuadrado de 1 cm de lado y ΔBEF un triángulo equilátero también de 1 cm de lado, tales que $A-B-E$ y $A-G-F$, como en la figura adjunta. El área del ΔBFG, en cm^2, es



(A) $\frac{1}{4}$

(B) $\frac{1}{3}$

(C) $\frac{\sqrt{3}}{4}$

(D) $\frac{\sqrt{3}}{12}$

6. Considere un triángulo rectángulo isósceles $\Delta \mathrm{ABC}$ en el cual $\left(\mathrm{ABC}\right)=\frac{9}{2}$. Si M es el pie de la altura sobre la hipotenusa $\overline{\mathrm{BC}}$, entonces el perímetro del $\Delta \mathrm{AMC}$ corresponde a

(A) $3\sqrt{2}+3$
(B) $\frac{3}{2}\sqrt{2}+3$
(C) $3\sqrt{2}+6$
(D) $\frac{3}{2}\sqrt{2}+6$

7. La cantidad de números primos de la forma a^4+4b^4 donde a y b son números enteros positivos, corresponde a

(A) 0
(B) 1
(C) 4
(D) 2013

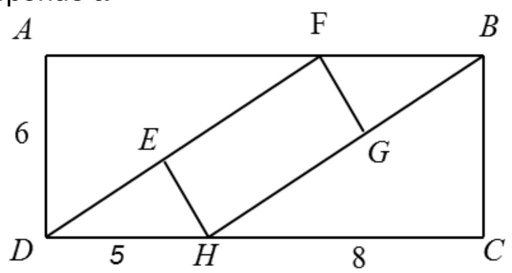
8. Una niña tenía 21 mascotas entre gatos, pericos, mariposas y caracoles, de los cuales el número de gatos excede en tres al número de pericos y la cantidad de mariposas es menor en dos que el número de caracoles. El número de mascotas invertebradas es el doble que la cantidad de gatos. Si ella libera dos mariposas, ¿con cuántas mariposas quedaría?

(A) 0
(B) 1
(C) 2
(D) 3

9. Si l_1 y l_2 son dos rectas paralelas. Los puntos A y B pertenecen a l_1, C y D pertenecen a l_2. Si se trazan todos los segmentos tales que sus extremos son dos de esos cuatro puntos, la totalidad de triángulos en la figura que se forma corresponde a

(A) 4
(B) 6
(C) 8
(D) 10

10. Considere los datos de la figura en la cual $\square ABCD$ es un rectángulo. El área del rectángulo $\square EFGH$ corresponde a

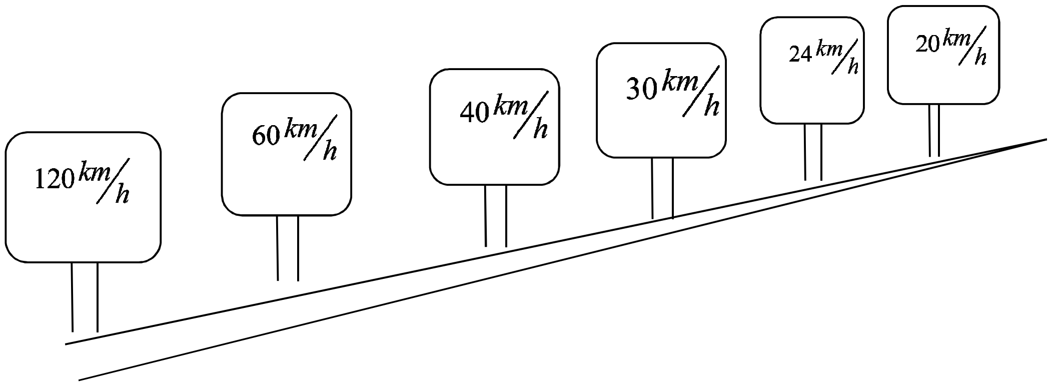


(A) 10
(B) 15
(C) 16
(D) 18

11. En una tómbola se depositan 1000 bolas, cada una con un número de serie de tres dígitos que van del 000 al 999. Suponiendo que todos los números de serie tienen la misma probabilidad de ser seleccionados, la probabilidad de seleccionar un número que tenga los tres dígitos diferentes y que solamente pueda contener los dígitos 3, 4, 5, 6 y 7 corresponde a

(A) $\frac{1}{3}$
(B) $\frac{3}{20}$
(C) $\frac{1}{15}$
(D) $\frac{3}{50}$

12. En una carretera hacia una ciudad hay 6 señales de restriccion de velocidad maxima como se muestra en la figura



La primera señal está a 1 km de la cuidad y las otras se ubican a $\frac{1}{2}\text{km}$, $\frac{1}{3}\text{km}$, $\frac{1}{4}\text{km}$, $\frac{1}{5}\text{km}$ y

y $\frac{1}{6}\text{km}$ de la cuidad, respectivamente. Si se viaja al límite máximo de velocidad en cada tramo desde la primera señal hasta la cuidad, el tiempo que se tarda en llegar es

(A) 1 min y 13,5 s
(B) 1 min y 42 s
(C) 2 min y 27 s
(D) 3 min

Código: _______________ Nombre del(la) estudiante: ____________________________

Pregunta #1

En un sistema solar muy, muy lejano, conformado por cinco planetas llamados SEI, KTA, MAG, PUK y ANN, se sabe que:

a. Cada planeta tiene más de una luna y menos de 8
b. Si se sumaran las lunas de los cinco planetas, el total sería 24.
c. El planeta ANN tiene el doble de lunas que KTA.
d. El planeta SEI tiene más lunas que PUK, y MAG tiene más lunas que SEI
e. La diferencia entre las lunas de SEI y PUK es igual a la diferencia entre la cantidad de lunas de MAG y SEI, que, es mayor a 1

Determine cuántas lunas tiene cada planeta.

Código: ________________ Nombre del estudiante: ________________________________

Pregunta #2

Un grupo de personas decide realizar un viaje desde Ciudad Neilly hacia Upala, pasando por Cañas, para lo cual alquilan un vehículo por un monto de 522 000 colones. Convienen en pagar entre todos, lo del alquiler del vehículo, según la distancia que viajen. En el trayecto, tres de ellos deciden quedarse en Cañas. Los que terminaron el viaje tuvieron que pagar 29 000 colones más que los que se quedaron en Cañas. ¿Cuántas personas comenzaron el viaje?

Código: ________________ Nombre del estudiante: ________________________________

Pregunta #3

El área del ΔABC es 1 y sea P el punto medio de $\overline{BC}$. Sean M, N puntos en $\overline{AB}$ y $\overline{AC}$ respectivamente, tales que $A-M-B$, $A-N-C$, $AM = 2\cdot MB$ y $CN = 2\cdot AN$. Sea D el punto de intersección de $\overline{AP}$ y $\overline{MN}$, determine el área del ΔADN.

SOLUCIONES

I PARTE: SELECCIÓN

#	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
	C	D	B	A	D	A	B	D	C	D	D	A

1.

Solución: Opción correcta: c)

$$(p+1)+(p+2)+\cdots+(p+k)=\underbrace{(p+p+\cdots+p)}_{k\ veces}+(1+2+\cdots+k)$$

$$=kp+\frac{k(k+1)}{2}=k\left(p+\frac{k+1}{2}\right)$$

Sea $\overline{x}$:el promedio de los números *p* + 1, *p* + 2,…, *p* + *k*, es decir

$$\overline{x}=\frac{k\left(p+\frac{k+1}{2}\right)}{k}=p+\frac{k+1}{2}$$

Como *k* es un número entero par, entonces $\frac{k+1}{2}$ es un número no entero.

Por lo tanto, la expresión $p+\frac{k+1}{2}$ es un número no entero.

Además, como $\frac{k+1}{2}$ es positivo se tiene que $p+\frac{k+1}{2}$ es mayor que *p*.

2.

Solución: Opción correcta: d)

$$\frac{x}{y}=\frac{4}{3} \Rightarrow 3x=4y$$

$$\frac{18x+7y}{12y+9x}=\frac{6(3x)+7y}{12y+3(3x)}=\frac{6(4y)+7y}{12y+3(4y)}=\frac{31y}{24y}=\frac{31}{24}$$

3.

Solución: Opción correcta: b)

$6\,|\,n,\ 7\,|\,(n+1),\ 8\,|\,(n+2),\ 9\,|\,(n+3) \ \Rightarrow\ 6\,|\,(n-6),\ 7\,|\,(n-6),\ 8\,|\,(n-6),\ 9\,|\,(n-6)$

Como el MCM entre 6, 7, 8 y 9 es 504 $\Rightarrow\ 504\,|\,(n-6)$

$\Rightarrow\ n-6=504k$

Como $n>6$ entonces $n-6>0$, por lo que el menor entero *n* se obtiene cuando *k* = 1. Así, $n-6=504 \ \Rightarrow\ n=510$

4.

Solución Opción correcta: A

El tren puede trasladar $\frac{n(n+1)}{2}$ elefantes en n vagones, es decir $\frac{n(n+1)}{2}\geq 2013$ y así se tiene que $n(n+1)\geq 4026$ y probando números consecutivos cuyo producto sea mayor que 4016 se tiene que el menor valor posible es $n=63$.

5.

Solución *Opción correcta: D*

Por ser equilátero de lado 1 entonces la altura del ΔBEF .viene dada por $\frac{\sqrt{3}}{2}$, además esta altura coincide con la altura del ΔAFE y así

$\left(AFE\right)=\frac{1}{2}\cdot 2\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{\sqrt{3}}{2}$. El ΔABF es isósceles pues $AB=BF$, como $m\angle FAB=m\angle AFB$ y $m\angle FAB+m\angle AFB=60^\circ$, entonces $m\angle FAB=m\angle AFB=30^\circ$, entonces el triángulo rectángulo ΔABG es un triángulo especial 30-60 y entonces $BG=\frac{1}{\sqrt{3}}$ y así $a\Delta ABG=\frac{1}{2}\cdot 1\cdot\frac{1}{\sqrt{3}}=\frac{1}{2\sqrt{3}}$. Así tenemos:

$$a\Delta BFG=a\Delta AEF-a\Delta BEF-a\Delta ABG=\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{\sqrt{3}}{4}-\frac{1}{2\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}}{12}$$

Solución 2

Sea M el punto medio de $\overline{BE}$.

$$a\Delta BFG=a\Delta ABF-a_{\Delta}ABG=\frac{AB\cdot FM}{2}-\frac{AB\cdot BG}{2}=\frac{1\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}}{2}-\frac{1\cdot BG}{2}=\frac{\sqrt{3}}{4}-\frac{BG}{2}$$

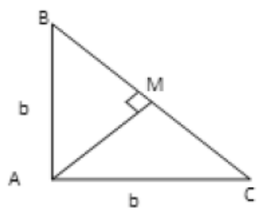
Para determinar BG note que $\Delta ABG\sim AMF$ por AA, de donde se tiene que

$\frac{AB}{AM}=\frac{BG}{MF}\Rightarrow BG=\frac{AB\cdot MF}{AM}=\frac{1\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{3}{2}}=\frac{\sqrt{3}}{3}$. Por lo tanto, $a\Delta BFG=\frac{\sqrt{3}}{4}-\frac{\sqrt{3}}{3}=\frac{\sqrt{3}}{12}$

6.

Solución: Opción correcta: A.

Con los datos que se brindan se puede formar la siguiente figura:



Observe que si el área corresponde a $\frac{9}{2} = \frac{b \cdot b}{2}$, entonces $b = 3$, por el teorema de Pitágoras se obtiene que $\mathrm{BC} = 3\sqrt{2}$ y por ser un triángulo rectángulo isósceles se tiene que $\mathrm{MC} = \frac{3}{2}\sqrt{2}$. Como AB = AC entonces BM = MC por lo que $\mathrm{AM} = \frac{3\sqrt{2}}{2}$. Entonces, el perímetro del triángulo $\Delta\mathrm{OMC}$ corresponde a $\frac{3\sqrt{2}}{2} + \frac{3\sqrt{2}}{2} + 3 = 3\sqrt{2} + 3$.

7.

Solución: Opción correcta: b.

Observe que si se suma y resta el término $4a^2b^2$ al número $a^4 + 4b^4$, se obtiene $a^4 + 4a^2b^2 + 4b^4 - 4a^2b^2 = \left(a^2 + 2b^2\right)^2 - 4a^2b^2$ y aplicando una diferencia de cuadrados, se obtiene la factorización: $\left[\left(a^2 + 2b^2\right) - 2ab\right]\left[\left(a^2 + 2b^2\right) + 2ab\right]$ y

como $a^2 + 2b^2 + 2ab > 1$ y todo el número debe ser primo, se tiene que $a^2 + 2b^2 - 2ab = (a-b)^2 + b^2$ debe ser 1. Como $(a-b)^2 + b^2 = 1$ es una suma de cuadrados se debe tener que $a = 1 = b$, por lo tanto solo hay un número de esa forma que es primo.

8.

Solución: Opción correcta: D

Observe que si tenemos p cantidad de gatos, entonces la cantidad de pericos es $p-3$. Por otro lado sea m la cantidad de mariposas, entonces la cantidad de caracoles es $m+2$. Luego se sabe que el número de mascotas invertebradas (mariposas y caracoles) es el doble de la cantidad de perros, o sea $m+m+2=2p$, en otras palabras, $m=p-1$, con esto se tiene que si se tiene que

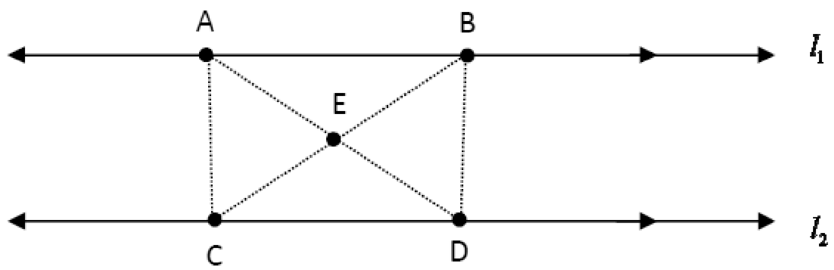
p gatos + $(p-3)$ pericos + $(p-1)$ mariposas + $(p+1)$ caracoles = 21animales

Se deduce que la cantidad de gatos debe ser 6, con esto la cantidad de pericos es 3, la cantidad de caracoles es 7 y la cantidad de mariposas es 5, pero como liberó a dos entonces queda con 3 mariposas.

9.

Solución: Opción correcta: C)

La cantidad de triángulos determinados es de 8, como se muestra en la siguiente figura:



ΔACE, ΔECD, ΔBED, ΔAEB, ΔACD, ΔADB, ΔACB y ΔCDB.

10.

Solución: Opción correcta: D

Se sabe que $\overline{EF} \parallel \overline{HG}$, entonces $\angle EDH \cong \angle BHC$ (pues son angulos correspondientes) y como son recto los angulos $\angle DEH$ y $\angle BCH$, por criterio A.A. $\Delta DEH \sim \Delta \mathrm{HCB}$

Así,

$$\frac{DE}{HC} = \frac{EH}{CB} = \frac{DH}{HB} \Rightarrow \frac{DE}{8} = \frac{EH}{6} = \frac{5}{\sqrt{8^2+6^2}}$$
$$\Rightarrow DE = \frac{8\cdot 5}{10} \text{ y } EH = \frac{6\cdot 5}{10}$$
$$\Rightarrow DE = 4 \text{ y } EH = 3$$

Ahora, $\Delta AFD \cong \Delta CHB$ y $\Delta DEH \cong \Delta BGF$.

Por lo tanto,
$$(\mathrm{EF}GH) = (\mathrm{A}BCD) - 2(AFD) - 2(DEH)$$
$$= 13\cdot 6 - 2\left(\frac{6\cdot 8}{2}\right) - 2\left(\frac{3\cdot 4}{2}\right) = 18.$$

11.

Solución **Opción correcta:** D)

Suponga que el número es abc. Para seleccionar el primer dígito se tienen 5 posibilidades, para b se tendrían 4 y para c se tendrían 3. Por lo tanto, se tiene un total de 60 posibilidades.

Como hay 1000 bolas en la tómbola, entonces la probabilidad de sacar un número con esas características es $P = \frac{5\bullet 4\bullet 3}{1000} = \frac{4\bullet 3}{200} = \frac{3}{50}$.

12.

Solución: Opción correcta: A

El primer tramo toma $\frac{1-\frac{1}{2}}{120}=\frac{1}{240}\text{h}$, es decir, $\frac{1}{240}\cdot 60\cdot 60=15\text{ s.}$

De forma análoga los otros tramos toman

$$\frac{\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)\cdot 3600}{60}=10\text{ s},\ \frac{\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)\cdot 3600}{40}=\frac{15}{2}\text{ s},$$

$$\frac{\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{5}\right)\cdot 3600}{30}=6\text{ s},\ \frac{\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{6}\right)\cdot 3600}{24}=5\text{ s y }\frac{\left(\frac{1}{6}\right)\cdot 3600}{60}=30\text{ s.}$$

Así, el tiempo que se tarda en llegar es 15 + 10 + 7,5 + 6 + 5 + 30 = 73,5 s; es decir, 1min y 13,5 s.

II PARTE: DESARROLLO

Pregunta #1

En un sistema solar muy, muy lejano, conformado por cinco planetas llamados SEI, KTA, MAG, PUK y ANN, se sabe que:

f. Cada planeta tiene más de una luna y menos de 8
g. Si se sumaran las lunas de los cinco planetas, el total sería 24.
h. El planeta ANN tiene el doble de lunas que KTA.
i. El planeta SEI tiene más lunas que PUK, y MAG tiene más lunas que SEI
j. La diferencia entre las lunas de SEI y PUK es igual a la diferencia entre la cantidad de lunas de MAG y SEI, que, es mayor a 1

Determine cuántas lunas tiene cada planeta.

Solución 1

Sea k el número de lunas de KTA, entonces como el número de lunas de ANN es igual al doble de lunas de KTA, por lo que ANN tiene $2k$ lunas.

Sea s el número de lunas de SEI, entonces MAG tiene $s+n$ lunas y PUK tiene $s-n$ lunas con $n \geq 2$, así tenemos:

$$k+2k+s-n+s+s+n=24 \Rightarrow 3k+3s=24 \Rightarrow k+s=8$$

- Ahora, k no puede ser 8 ni 7 (pues s sería cero o uno y eso es imposible),
- Si k fuera 6 o 5, entonces s sería 2 y PUK tendría menos de dos lunas, imposible.
- Si k fuera 4 entonces ANN sería 8 lo cual es imposible.
- Si k fuera 3, entonces ANN tendría 6 lunas y s sería 5 y con $n=2$ PUK tendría 3 lunas y MAG 7 lunas
- Si k fuera 2, entonces ANN tendría 4 lunas y s sería 6 y con $n=2$ MAG 8 lunas imposible.

Así solo tenemos una opción:

KTA 3 lunas, PUK 3 lunas, SEI 5 lunas, ANN 6 lunas y MAG 7 lunas.

Solución 2:

Denotemos con L_i, para $i = 1, \ldots, 5$, el número de lunas de cada planeta P_i, donde P_1 representa a SEI, P_2 a KTA, y así sucesivamente.

Reescribiendo las hipótesis del problema con la notación anterior tenemos que

1. $2 \leq L_i \leq 7$, para $i = 1, \ldots, 5$,
2. $L_1 + L_2 + L_3 + L_4 + L_5 = 24$,
3. $L_5 = 2L_2$,
4. $L_4 < L_1 < L_3$,
5. $L_1 - L_4 = L_3 - L_1 > 1$.

Usando 2),3) y 5) es fácil ver que $L_1 + L_2 = 8$. Multiplicando esta ecuación por 2 y al usar 3) de nuevo se obtiene $2L_1 + L_5 = 16$.

Como $L_2 \geq 2$, se sigue de 3) que $L_5 \geq 4$. De 5) se tiene que $L_1 > 1 + L_4 \geq 3$, de donde $L_1 \geq 4$. De igual forma se concluye que $L_3 \geq 6$. En resumen, de las hipótesis hemos deducido que

$$L_1 + L_2 = 8, L_1 \geq 4, L_3 \geq 6.$$

De ahora en adelante vamos a tratar ciertas posibilidades.

La posibilidad $L_4 = 2, L_1 = 4$, y $L_3 = 6$, cumplen 4) y 5), además $L_2 = 4$, pero entonces $L_5 = 4$, y llegamos a que la suma de todas las lunas es 20 lo que es absurdo.

La posibilidad $L_4 = 2, L_1 = 4$, y $L_3 = 7$, lleva a que $L_2 = 4$, y entonces $L_5 = 8$ lo cual es absurdo.

La posibilidad $L_4 = 2, L_1 = 5$, y $L_3 = 7$, lleva a que $L_2 = 4$, y entonces $L_5 = 8$ lo cual es absurdo.

La posibilidad $L_4 = 3, L_1 = 5$, y $L_3 = 7$, lleva a que $L_2 = 3$, y entonces $L_5 = 6$. Esta cumple lo solicitado.

Código: ________________ Nombre del estudiante: ________________________________

Pregunta #2

Un grupo de personas decide realizar un viaje desde Ciudad Neilly hacia Upala, pasando por Cañas, para lo cual alquilan un vehículo por un monto de 522 000 colones. Convienen en pagar entre todos, lo del alquiler del vehículo, según la distancia que viajen. En el trayecto, tres de ellos deciden quedarse en Cañas. Los que terminaron el viaje tuvieron que pagar 29 000 colones más que los que se quedaron en Cañas. ¿Cuántas personas comenzaron el viaje?

Solución:

Sea x el número de personas que conforma el grupo inicial y sea y el monto, en miles de colones, que cancelan las 3 personas que se quedan en Cañas. Los $x-3$ que sí terminaron pagan entonces $y+29$ miles de colones cada uno. Se tiene entonces que

$$\begin{aligned} &3y+\left(y+29\right)(x-3)=522 \\ &3y+xy-3y+29x-87=522 \\ &xy=609-29x \end{aligned}$$

De donde se obtiene que $y=\dfrac{609-29x}{x}=\dfrac{29(21-x)}{x}$.

Como y y x son números enteros positivos con $3<x<21$, entonces x debe ser divisor de $29(21-x)$.

Como 29 es un número primo mayor que 21, x no puede ser divisor de 29, por lo tanto debe ser divisor de $21-x$, por lo que debe ser un divisor de 21, mayor que 3 pero menor que 21, es decir x = 7.

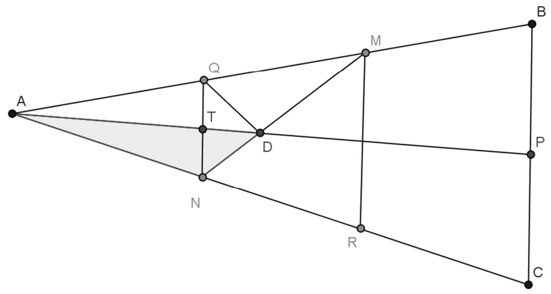
Note que entonces el grupo inicial estaba constituido por 7 personas, de las cuales cuatro que terminaron el trayecto pagaron 87 000 colones cada uno y los tres que no lo concluyeron pagaron 58 000 colones cada uno.

Código: ________________ Nombre del estudiante: ________________________________

Pregunta #3

El área del ΔABC es 1 y sea P el punto medio de $\overline{BC}$. Sean M, N puntos en $\overline{AB}$ y $\overline{AC}$ respectivamente, tales que $A-M-B$, $A-N-C$, $AM = 2\cdot MB$ y $CN = 2\cdot AN$. Sea D el punto de intersección de $\overline{AP}$ y $\overline{MN}$, determine el área del ΔADN.

Solución 1



Considere la siguiente figura:

Si R es el punto medio entre N y C, entonces $\overline{MR} \| \overline{BC}$ por lo que ΔAMR es semejante a ΔABC (criterio AA) con razón de semejanza $\frac{2}{3}$, por lo tanto el área del AMR es $\frac{4}{9}$ del área del ΔABC, es decir, $\frac{4}{9}$.

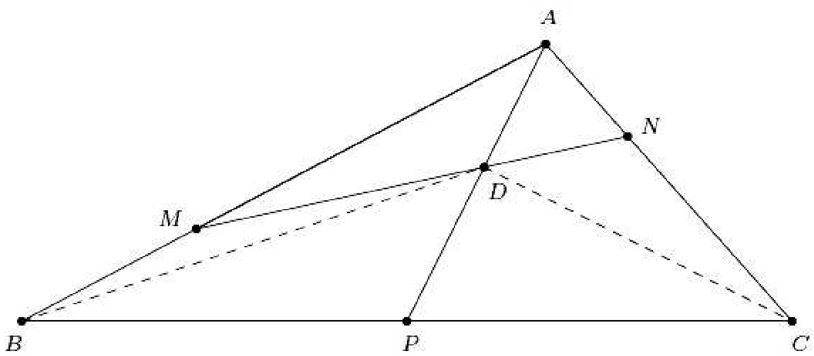
Como $\overline{MN}$ es mediana sobre $\overline{AR}$ en el ΔAMR entonces el área del ΔAMB es la mitad del área del ΔAMR, por lo tanto el área del ΔAMN es $\frac{2}{9}$.

Si Q es el punto medio entre A y M entonces $\overline{DQ}$ es mediana sobre $\overline{AM}$ en el ΔADM, por lo que ΔAQD y ΔDQM tienen igual área. Basta probar entonces que ΔAND tiene igual área que ΔADQ para concluir que el área del ΔADN es la tercera parte del área del ΔAMN por lo que sería $\frac{2}{27}$.

Como $\overline{AP}$ biseca a $\overline{BC}$ y $\overline{QN} \| \overline{BC}$ entonces $\overline{AP}$ biseca a $\overline{QN}$ en un punto T, por lo que ΔAQT tiene igual área que ΔANT y ΔQTD igual área que ΔDNT. Por lo tanto, ΔAND tiene igual área que ΔAQD como se quería probar y entonces el área del ΔADN es $\frac{2}{27}$.

Solución 2:

Considere la figura



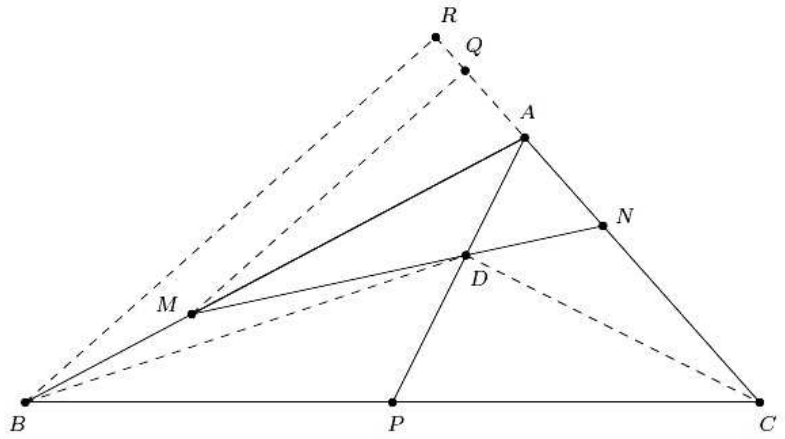
Se tiene que $(\Delta ABP)=(\Delta ACP)$ dado que tienen la misma base (pues $BP=PC$) y la misma altura (desde el vértice A), de forma análoga se tiene que $(\Delta BDP)=(\Delta CDP)$, así se tiene que $(\Delta ABD)=(\Delta ACD)$.

Como los triángulos ΔADN y ΔADC tienen la misma altura desde el vértice D, entonces la razón de sus áreas es igual a la razón de sus bases, y como $\frac{AN}{AC}=\frac{1}{3}$ entonces $\frac{(\Delta ADN)}{(\Delta ACD)}=\frac{1}{3}$ y así tenemos que $3(\Delta ADN)=(\Delta ACD)$. Y de forma análoga se tiene que $\frac{(\Delta AMD)}{(\Delta ABD)}=\frac{AM}{AB}=\frac{2}{3}$ y así tenemos que $3(\Delta AMD)=2(\Delta ABD)$ o bien que $\frac{3}{2}(\Delta AMD)=(\Delta ABD)$

De los dos puntos anteriores tenemos que:

$$
\begin{aligned}
(\Delta ABD)=(\Delta ACD) &\Rightarrow (\Delta ABD)=3(\Delta ADN)\\
&\Rightarrow \frac{3}{2}(\Delta AMD)=3(\Delta ADN)\\
&\Rightarrow \quad (\Delta AMD)=2(\Delta ADN)
\end{aligned}
$$

Ahora consideremos la figura



En donde $\overline{QM}$ y $\overline{RB}$ son las alturas de los triángulos ΔAMN y ΔABC sobre las bases $\overline{AN}$ y $\overline{AC}$ respectivamente. Entonces se tiene que $\Delta AMN = \frac{1}{2} AN \cdot QM$ y $\Delta ABC = \frac{1}{2} AC \cdot RB$.

Notemos que $\Delta RAB \sim \Delta QAM$ (pues $\overline{QM}$ y $\overline{RB}$ son paralelas) entonces $\frac{QM}{RB} = \frac{AM}{AB} = \frac{2}{3}$.

De los dos puntos anteriores se puede deducir que:

$$\frac{(\Delta AMN)}{(\Delta ABC)} = \frac{\frac{1}{2} AN \cdot QM}{\frac{1}{2} AC \cdot RB} = \frac{AN}{AC} \cdot \frac{QM}{RB} = \frac{2}{3}\frac{AN}{AC} \Rightarrow (\Delta AMN) = \frac{2}{3}\frac{AN}{AC} \cdot (\Delta ABC) = \frac{2}{3}\frac{AN}{AC} = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{3} = \frac{2}{9}$$

Así se tiene que

$$\begin{aligned}
(\Delta AMN) = (\Delta AMD) + (\Delta ADN) &\Rightarrow (\Delta AMN) = 2(\Delta ADN) + (\Delta ADN) \\
&\Rightarrow (\Delta AMN) = 3(\Delta ADN) \\
&\Rightarrow \frac{2}{3} = 3(\Delta ADN) \\
&\Rightarrow \frac{2}{27} = (\Delta ADN)
\end{aligned}$$