XXVII OLIMPIADA COSTARRICENSE DE MATEMÁTICA

*UNA - UCR - TEC - UNED - MEP - MICIT*

# SOLUCIï¿$\frac{1}{2}$N II ELIMINATORIA NACIONAL

II Nivel

$(8^{\circ} - 9^{\circ})$

2015

**I Parte: Selecciï¿½n ï¿½nica** **Valor 24 puntos, 2 pts c/u**

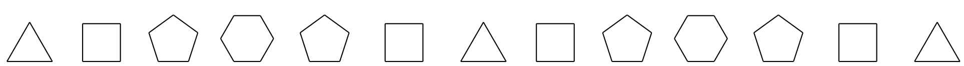
1. Si $(3x+2-b)(3x+2+b) = (3x-2+a)(3x-2-a)$ y $a+b=4x$ con $x>0$, el valor numï¿½rico de $b-a$ corresponde a

   (a) 2
   (b) 6
   (c) 8
   (d) 10

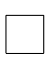
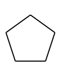
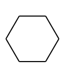
   - Opciï¿½n correcta: $b$)
   - Soluciï¿½n:

$$(3x+2-b)(3x+2+b) = (3x-2+a)(3x-2-a)$$
$$(3x+2)^2 - b^2 = (3x-2)^2 - a^2$$
$$24x = b^2 - a^2$$
$$24x = (b+a)(b-a)$$
$$24x = 4x(b-a)$$
$$6 = b-a$$

2. Rolando dibuja una serie de figuras:



   Si continï¿½a de la misma forma, la figura que estarï¿½ en la posiciï¿½n 2015 serï¿½

   (a) 
   (b) 
   (c) 
   (d) 

   - Opciï¿½n correcta: $c$)
   - Soluciï¿½n: Observe que hay un:
     Triï¿½ngulo en las posiciones $1, 7, 13, ..., 1+6k$
     Cuadrado en las posiciones $2, 8, 14, ..., 2+6k$ y $6, 12, 18, ..., 0+6k$
     Pentï¿½gono en las posiciones $3, 9, 15, ..., 3+6k$ y $5, 11, 17, ..., 5+6k$
     Hexï¿½gono en las posiciones $4, 10, 16, ..., 4+6k$

     Como $2015 = 5 + 335 \cdot 6$, entonces en la posiciï¿½n 2015 habrï¿½ un pentï¿½gono.

3. El mayor entero que siempre divide a la expresión $\left(2n^3-2n\right)^2$, con $n$ entero, corresponde a

   (a) 4
   (b) 12
   (c) 36
   (d) 144

   - Opciï¿½n correcta: *d*)
   - Soluciï¿½n:

   $$\begin{aligned}\left(2n^3-2n\right)^2 &= \left[2n\left(n^2-1\right)\right]^2\\ &= \left[2n\left(n-1\right)\left(n+1\right)\right]^2\\ &= 2^2\left[n\left(n-1\right)\left(n+1\right)\right]^2\\ &= 4\left[n\left(n-1\right)\left(n+1\right)\right]^2\end{aligned}$$

   Como $(n-1)\,n\,(n+1)$ es divisible por $1\cdot 2\cdot 3=6 \Rightarrow 6\,|\,(n-1)\,n\,(n+1) \Rightarrow (n-1)\,n\,(n+1)=6k$ con $k$ entero.

   Así,

   $$\begin{aligned}\left(2n^3-2n\right)^2 &= 4\left[n\left(n-1\right)\left(n+1\right)\right]^2\\ &= 4\left[6k\right]^2\\ &= 4\cdot 6^2\cdot k^2\\ &= 144k^2\end{aligned}$$

   Por lo tanto, 144 divide a $\left(2n^3-2n\right)^2$.

4. Cinco amigas Ana, Berta, Carla, Diana y Eva construyen una mesa redonda con cinco asientos a su alrededor, rotulados con sus iniciales (A, B, C, D y E, respectivamente). La primera vez que se reï¿½nen en esa mesa cada una se sienta sobre su inicial y deciden que cada vez que se vuelvan a sentar juntas irï¿½n rotando las posiciones donde estarï¿½n sentadas; es decir, la prï¿½xima vez que se encuentren Ana se sentarï¿½ sobre la B, Berta en sobre C y asï¿½ sucesivamente. ï¿½Dónde se sentarï¿½ Eva cuando se hayan reunido 147 veces?

   (a) En A
   (b) En B
   (c) En D
   (d) En E

   - Opciï¿½n correcta: *a*)

- Soluciï¿½n:
  Cada persona está sobre su inicial las veces : $1^{ra}, 6^{ta}, 11^{va}, \cdots$ que se vean, es decir de la forma $5n+1$ y $n+1$ corresponde a las veces que estarï¿½n sobre su inicial.
  Como $146 = 5 \times 29 + 1$ se tiene que cuando se vean 146 veces estarï¿½n cada una en su lugar.
  Por lo tanto cuando se han reunido 147 veces Eva se sentarï¿½ sobre la A.

5. La cantidad de enteros positivos $n$ que hacen que la expresión $(n-3)\left(n^2-13n+41\right)$ sea un número primo es

   (a) 1
   (b) 3
   (c) 4
   (d) 6

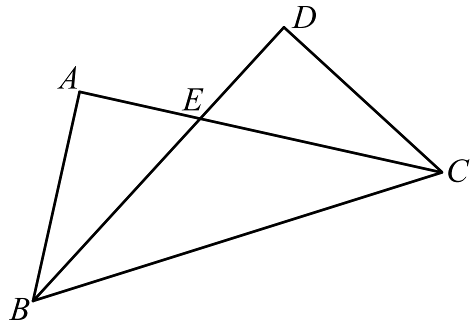
- Opciï¿½n correcta: $b$)
- Soluciï¿½n:
  Dado que la expresión $(n-3)(n^2-13n+41)$ ya está factorizada al máximo en $\mathbb{N}$, se tiene que para que sea un número primo uno de sus factores debe ser 1 y el otro un número primo.

  $n-3=1 \Rightarrow n=4$, sustituyendo $n=4$ en $n^2-13n+41$ se obtiene $4^2-13\cdot 4+41=5$ el cual es primo. Por lo tanto $n=4$ es uno de los enteros que cumplen el enunciado.

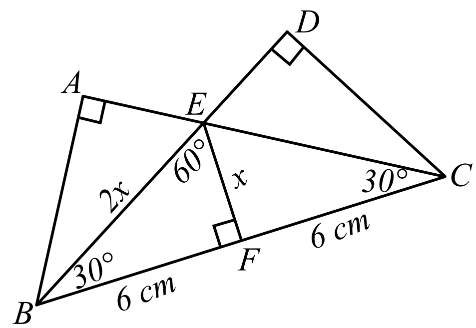
  $n^2-13n+41=1 \Rightarrow n^2-13n+40=0 \Rightarrow (n-8)(n-5)=0 \Rightarrow n=8 \ \vee \ n=5.$
  $n=8 \Rightarrow n-3=5$ el cual es primo.
  $n=5 \Rightarrow n-3=2$ el cual también es primo.
  Así, 8 y 5 cumplen el enunciado.
  Por lo tanto $(n-3)(n^2-13n+41)$ es un número primo para $n \in \{4,5,8\}$.

6. En la figura adjunta los triï¿½ngulos $\Delta ABC$ y $\Delta DCB$ son triï¿½ngulos rectï¿½ngulos rectos en $A$ y $D$, respectivamente. Si $\Delta ABC \cong \Delta DCB$, $BC = 12$ cm y $m\angle ACB = 30$ï?‘$\frac{1}{2}$, el ï¿½rea del $\Delta BEC$ en cm$^2$ es

   (a) $6\sqrt{3}$
   (b) $8\sqrt{3}$
   (c) $9\sqrt{3}$
   (d) $12\sqrt{3}$



- Opciï¿½n correcta: *d*)
- Soluciï¿½n:
  Dado que los triï¿½ngulos $\Delta ABC$ y $\Delta DCB$ son triï¿½ngulos rectï¿½ngulos y congruentes, ambos son 30ï?‘$\frac{1}{2}$ – 60ï?‘$\frac{1}{2}$ – 90ï?‘$\frac{1}{2}$. En la figura se muestran detalles asociados con las medidas de algunos de los ï¿½ngulos y lados de los triï¿½ngulos.




El $\Delta BCE$ es isï¿½sceles, pues en este se tiene que $m\angle BCE = m\angle CBE =$ 30ï?‘$\frac{1}{2}$, por la congruencia de los triï¿½ngulos $\Delta ABC$ y $\Delta DCB$ y el hecho que $m\angle ACB =$ 30ï?‘$\frac{1}{2}$. Luego, en el $\Delta BCE$ la altura $\overline{EF}$ es tambiï¿½n mediatriz, por lo que $BF = FC = \dfrac{BC}{2} = 6$ cm. Si $x = EF$, con base en el Teorema de Pitï¿½goras se tiene que

$$\begin{aligned} & (2x)^2 - x^2 = 36 \\ \Rightarrow\ & 4x^2 - x^2 = 36 \\ \Rightarrow\ & 3x^2 = 36 \\ \Rightarrow\ & x^2 = 12 \\ \Rightarrow\ & x = \sqrt{12} = 2\sqrt{3} \end{aligned}$$

El ï¿½rea del $\Delta BEC$ es $\dfrac{BC \cdot EF}{2} = \dfrac{12 \cdot 2\sqrt{3}}{2} = 12\sqrt{3}$.

7. Tres estudiantes se organizan para comprarle un regalo a su profesor y deciden aportar semanalmente de la siguiente manera: Mario darï¿½ tres veces mï¿½s que Roberto y la mitad de lo que darï¿½ Carlos. A las cinco semanas Carlos se retira mientras los otros dos siguen aportando lo pactado y reï¿½nen el dinero en ocho sema-nas mï¿½s. Si el regalo cuesta 15 750 colones, ï¿½cuánto dinero, en colones, aportï¿½ Roberto?

   (a) 1 150
   (b) 1 500
   (c) 1 950
   (d) 2 000

- Opciï¿½n correcta: *c*)

- Soluciï¿½n:

| Nombre | Aporte semanal | 5 semanas | 8 semanas |
|---|---|---|---|
| Carlos | $2(4x) = 8x$ | $40x$ | - |
| Mario | $3x + x = 4x$ | $20x$ | $32x$ |
| Roberto | $x$ | $5x$ | $8x$ |
| Total | | $65x$ | $40x$ |

Por lo tanto $105x = 15\,750$, y $x = 150$, entonces Roberto aportó $13x = 13 \times 150 = 1\,950$.

8. En un juego entre tres personas cuando una pierde debe dar a cada una de las otras tanto dinero como tenga esa persona. Se juegan tres partidas y pierden una partida cada una de ellas. Al terminar el juego cada persona tiene 24 monedas. ï¿½Con cuï¿½ntas mone-das empezó a jugar la persona que perdió la primera partida?

   (a) 12
   (b) 24
   (c) 39
   (d) 48

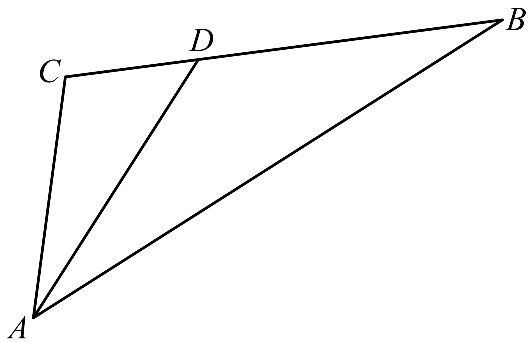
- Opciï¿½n correcta: $c$)
- Soluciï¿½n:

Es posible construir una tabla comenzando por la situaciï¿½n del final de la partida, y terminar en la del comienzo. Llamemos A, B y C a cada uno de los jugadores.

| | | A | B | C |
|---|---|---|---|---|
| Final: | Ha perdido C | 24 | 24 | 24 |
| | Ha perdido B | 12 | 12 | 48 |
| | Ha perdido A | 6 | 42 | 24 |
| Comienzo: | | 39 | 21 | 12 |

Por tanto, el jugador que pierde la primera partida comenzï¿½ con 39 monedas, el que pierde la segunda con 21 monedas y el otro con 12 monedas.

9. En el $\Delta ABC$ de la figura adjunta, $\overline{AD}$ es la bisectriz del $\angle BAC$ y $m\angle BAC = 2 \cdot m\angle ABC$. Si $c = AB$, $b = AC$ y $a = BC$, una expresiï¿½n equivalente a $a^2 - b^2$ es

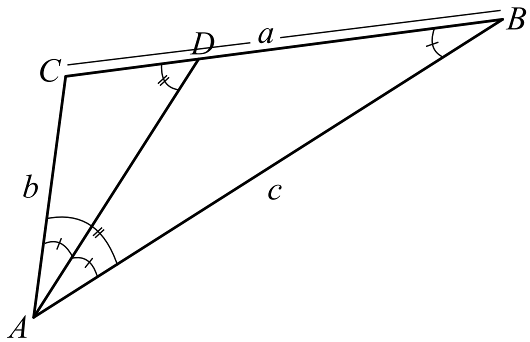



   (a) $ac$
   (b) $bc$
   (c) $a + bc$
   (d) $b + ac$

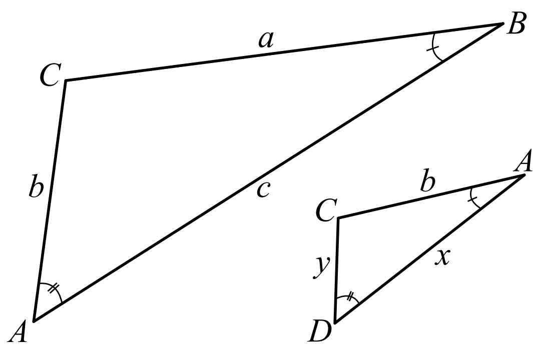
- Opciï¿½n correcta: $b$)
- Soluciï¿½n:

  Como $m\angle BAC = 2m\angle ABC$, se tiene que $\angle ABC \cong \angle DAB$, por lo que el $\Delta ADB$ es isï¿½sceles.

  Por otra parte, $m\angle ADC = m\angle DAB + m\angle DBA = 2 \cdot m\angle ABC = m\angle BAC$.




Observando los ï¿½ngulos formados en la figura anterior, se tiene que $\Delta ABC \sim \Delta DAC$.




Por semejanza de triï¿½ngulos, se satisface que

$$\frac{x}{c} = \frac{b}{a}$$
$$\Rightarrow \quad x = \frac{bc}{a}$$

Ademï¿½s,

$$\frac{y}{b} = \frac{b}{a}$$
$$\Rightarrow \quad y = \frac{b^2}{a}$$

Luego, en el $\Delta ABC$ se tiene que el $\Delta ADB$ es isï¿½sceles, por lo que

$$DA = DB$$
$$\Rightarrow \quad x = a - y$$
$$\Rightarrow \quad \frac{bc}{a} = a - \frac{b^2}{a}$$
$$\Rightarrow \quad bc = a^2 - b^2$$

10. La tabla

| | | |
|---|---|---|
| 50 | $b$ | $c$ |
| $d$ | $e$ | $f$ |
| $g$ | $h$ | 2 |

es un cuadrado mï¿½gico multiplicativo. Esto es, el producto de los nï¿½meros en cada fila, columna y diagonal es el mismo. Si todas las entradas del cuadrado son enteros positivos, la suma de los posibles valores de $g$ es

(a) 10
(b) 25
(c) 35
(d) 62

- Opciï¿½n correcta: $c$)
- Soluciï¿½n:
  Veamos que $100e = beh = ceg = def$, de aquï¿½ se obtiene que $h = \frac{100}{b}$, $g = \frac{100}{c}$ y $f = \frac{100}{d}$.

  Comparando las filas 1 y 3 se tiene que $50bc = 2\dfrac{100}{b}\dfrac{100}{c}$, de lo cual $c = \dfrac{20}{b}$.

  Entonces el producto de las entradas de la primera fila es $1\,000$, y asï¿½ $1\,000 = 100e$, y $e = 10$.

  Ahora comparando las columnas 1 y 3 se observa que $50d\dfrac{100}{c} = 2c\dfrac{100}{d}$ para obtener $d = \dfrac{c}{5} = \dfrac{4}{b}$.

  Finalmente, $f = \dfrac{100}{d} = 25b$, $g = \dfrac{100}{c} = 5b$ y $e = 10$.
  Todas las entradas serï¿½n enteras si y solo si $b = 1$, 2 o 4, y los correspondientes valores de $g$ serï¿½n 5, 10 y 20, con su suma 35.

11. Sea $n$ el menor entero positivo tal que cada dï¿½gito de $6n$ es 5 o 2, entonces la suma de los dï¿½gitos de $n$ corres-ponde a

(a) 6
(b) 8
(c) 10
(d) 15

- Opciï¿½n correcta: $c$)
- Soluciï¿½n:
  El nï¿½mero $6n$ es mï¿½ltiplo de 2, por lo tanto es par; quiere decir que debe terminar en 2, pero tambiï¿½n es mï¿½ltiplo de 3 entonces la suma de sus dï¿½gitos es mï¿½ltiplo de 3, (se podrï¿½a pensar en 522 o 252 por ejemplo) pero como $n$ es el menor, $6n = 222$, por tanto $n = 37$ y la suma de sus dï¿½gitos es 10.

12. Hay que colocar aleatoriamente a 3 hombres y 2 mujeres en una fila; la probabilidad de que las mujeres ocupen los lugares pares es

   (a) $\frac{2}{5}$

   (b) $\frac{2}{3}$

   (c) $\frac{1}{10}$

   (d) $\frac{1}{60}$

   - Opciï¿½n correcta: $c$)
   - Soluciï¿½n:

     Hay 120 maneras de colocar 5 personas en una fila, ya que la primera posiciï¿½n puede ser ocupada por 5 personas, la segunda por 4, y asï¿½ sucesivamente.

     Para que las mujeres queden en posiciones pares hay 2 formas para ellas y 6 para los varones, por tanto serï¿½n 12 maneras.

     Entonces la probabilidad es $\frac{12}{120} = \frac{1}{10}$.

**II Parte: Desarrollo** **Valor 21 puntos, 7 pts c/u**

**Instrucciones:** Los siguientes ejercicios deben ser resueltos en las hojas adicionales que se le entregaron. Conteste en forma ordenada, completa y clara. Se califica procedimientos y respuesta.

1. Determine la cantidad de números con 152 cifras de la forma $3a3aa3aaa3aaaa\ldots$ que son divisibles por 9 .

**Solucii¿$\frac{1}{2}$n** Si $n$ es la cantidad de 3 que contiene el número entonces la cantidad de dígitos iguales a $a$ está dada por $\dfrac{n(n+1)}{2}$.

Dado que el número tiene 152 cifras se cumple que $n+\dfrac{n(n+1)}{2}=152 \Rightarrow n^2+3n-304=0 \Rightarrow (n+19)(n-16)=0 \Rightarrow n=-19 \vee n=16$. Dado que $n>0$ se tiene que $n=16$. Esto significa que de las 152 cifras, 16 son iguales a 3 y 136 iguales a $a$.

Un número es divisible por 9 si la suma de sus crifras es divisible por 9, debido a esto $16\cdot 3+136a=8(6+17a)$ debe ser divisible por 9, o bien $6+17a$ debe ser divisible de 9. Veamos:

- $a=0 \Rightarrow 6+17a=6 \ \wedge \ 9\nmid 6$.
- $a=1 \Rightarrow 6+17a=23 \ \wedge \ 9\nmid 23$.
- $a=2 \Rightarrow 6+17a=40 \ \wedge \ 9\nmid 40$.
- $a=3 \Rightarrow 6+17a=57 \ \wedge \ 9\nmid 57$.
- $a=4 \Rightarrow 6+17a=74 \ \wedge \ 9\nmid 74$.
- $a=5 \Rightarrow 6+17a=91 \ \wedge \ 9\nmid 91$.
- $a=6 \Rightarrow 6+17a=108 \ \wedge \ 9\mid 108$.
- $a=7 \Rightarrow 6+17a=125 \ \wedge \ 9\nmid 125$.
- $a=8 \Rightarrow 6+17a=142 \ \wedge \ 9\nmid 142$.
- $a=9 \Rightarrow 6+17a=159 \ \wedge \ 9\nmid 159$.

Por lo tanto, $a$ solo puede tomar un valor que corresponde a 6.

2. Mar y Tina tienen un tablero como el de ajedrez (o sea, con ocho columnas y filas, formando 64 cuadritos alternadamente pintados de blanco y negro). Cada fila y columna está enumerada, en orden, con un número del uno al ocho, donde el cuadrito correspondiente a la fila 1 y columna 1 es negro, y el correspondiente a la fila 8 y columna 8 es negro también.

   En cada cuadrito hay fichas en forma de calamar. El número de fichas que hay en cada uno es igual al producto del número de la fila por el número de la columna. Por ejemplo, en el cuadrito de la fila 6 y columna 5 hay 30 fichas.

   Mar dice que hay más fichas en los cuadritos negros, mientras que Tina dice que hay más en los cuadritos blancos. Su amigo, Justino, dice que hay igual en ambas. Determine quién tiene la razón y encuentre, exactamente, cuántas fichas hay en los cuadritos negros y cuántas en los blancos.

**Soluciï¿½n**

Denotemos el cuadrito de la fila $i$ y la columna $j$ como $(i, j)$.

Contemos primero cuántas fichas hay en los cuadritos negros. Analicemos la primer fila:

Como $(1, 1)$ es negro, también lo serán $(1, 3), (1, 5), (1, 7)$. De manera análoga, cuando estemos en la fila $i$, para $i$ impar, tendremos que $(i, 1), (i, 3), (i, 5), (i, 7)$ serán negros. La suma de fichas, en estas filas, sería igual a

$$1\cdot(1+3+5+7)+3\cdot(1+3+5+7)+5\cdot(1+3+5+7)+7\cdot(1+3+5+7) = (1+3+5+7)^2 = 16^2.$$

Ahora bien, en la segunda fila, los cuadritos negros serán $(2, 2), (2, 4), (2, 6), (2, 8)$. Similarmente, para la fila $i$, con $i$ par, $(i, 2), (i, 4), (i, 6), (i, 8)$ serán negros. La suma de fichas, en estas filas, sería igual a

$$2\cdot(2+4+6+8)+4\cdot(2+4+6+8)+6\cdot(2+4+6+8)+8\cdot(2+4+6+8) = (2+4+6+8)^2 = 20^2.$$

En total hay $16^2 + 20^2 = 256 + 400 = 656$ fichas en cuadritos negros.

Una forma de determinar cuántas hay en los cuadritos blancos es calcular el total y restarle las negras.

En total, el número de fichas es

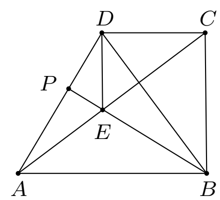
$$1 \cdot (1 + 2 + 3 + \cdots + 8) + 2 \cdot (1 + 2 + 3 + \cdots + 8) + \cdots + 8 \cdot (1 + 2 + 3 + \cdots + 8) =$$
$$(1 + 2 + 3 + \cdots + 8)^2 = ((8 \cdot 9))^2 /4 = 1296.$$

Por lo tanto, hay $1296 - 656 = 640$ fichas blancas. O sea, Mar tenía razón sobre Tina y Justino.

3. Se tiene un triángulo rectángulo $\Delta ABC$, recto en $B$. Sea $H$ el pie de la altura desde $B$ hasta $\overline{AC}$. Una paralela a $\overline{AB}$ a través del punto $C$ corta a $\overleftrightarrow{BH}$ en el punto $D$. Una paralela a $\overline{BC}$ a través del punto $D$ corta a $\overleftrightarrow{AC}$ en $E$. Sea $P$ el punto de intersección de $\overleftrightarrow{AD}$ con $\overleftrightarrow{BE}$. Determine la medida del $\angle APB$.

**Solucii¿½n**

Considere la siguiente figura




Como la suma de los ángulos internos de un triángulo es $180°$, en un trińgulo rectángulo se tiene que la suma de los ángulos agudos es $90°$. Por lo tanto, se puede ver que

$$m\angle HAB = 90° - m\angle HBA = m\angle HBC = m\angle HCD = m\angle HDE$$

De modo que $\angle HAB \cong \angle HDE$, y por tener dos ángulos congruentes entonces $\triangle HAB \sim \triangle HDE$.

De la semejanza se tiene que

$$\frac{HA}{HB} = \frac{HD}{HE} \text{ y } \frac{HA}{HD} = \frac{HB}{HE},$$

Por lo tanto $\triangle HAD \sim \triangle HBE$ y se tiene que $m\angle HAD = m\angle HBE$. Comparando los ángulos en los triángulos $\Delta APE$ y $\Delta BHE$, que resultan semejantes, se tiene que $m\angle APE = m\angle BHE = 90°$.