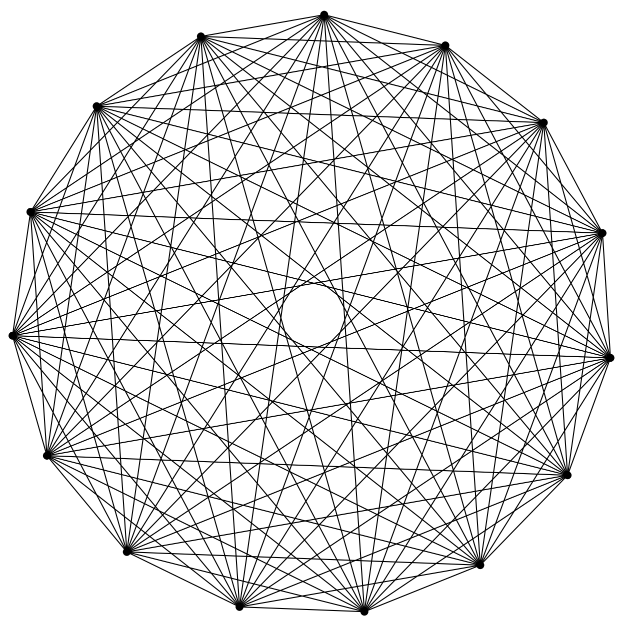
XXVI OLIMPIADA COSTARRICENSE DE MATEMÁTICA

UCR-UNA-ITCR-UNED-MEP-MICIT

SEGUNDA ELIMINATORIA NACIONAL



TERCER NIVEL

(10º-11º-12º)

2014

Estimado estudiante:

La Comisión de Olimpiadas Costarricenses de Matemática 2014 le saluda y le da la más cordial bienvenida a la Segunda Eliminatoria Nacional de estas justas académicas y le desea los mayores éxitos.
La prueba consta de un total de 12 preguntas de selección única, ponderadas con un valor de 2 puntos cada respuesta correcta y tres preguntas de desarrollo ponderadas con 7 puntos cada una.

Para conocer del resultado de la prueba, puede consultar a partir del viernes 26 de setiembre, a las siguientes direcciones electrónicas:

www.olcoma.org
www.facebook.com/Olcoma

INSTRUCCIONES GENERALES

- Debe trabajar en forma individual.
- Las respuestas a las preguntas de selección que se le formulan, deben ser consignadas ÚNICAMENTE en la hoja de respuestas que se le ha entregado.
- Los dibujos que aparecen en la prueba no están hechos a escala.
- El formulario de preguntas es suyo, por lo que puede realizar en él todas las anotaciones, cálculos o dibujos que le sean necesarios para resolver satisfactoriamente la prueba.
- La solución a las preguntas de desarrollo deben escribirse en las hojas que para este fin se le han entregado. No se permite el uso de hojas adicionales.
- Los únicos instrumentos cuyo uso se permite son los necesarios para escribir y dibujar. Se prohíbe el uso de libros, libretas de notas, tablas y calculadora.
- El examen tiene una duración máxima de tres horas.
- Escriba claramente los datos que se le solicitan en la hoja de respuestas.

SIMBOLOGÍA

$\overline{AB}$	segmento de extremos A yB	$\measuredangle ABC \cong \measuredangle DEF$	congruencia de ángulos
AB	medida del segmento $\overline{AB}$	$\triangle ABC \cong \triangle DEF$	congruencia de triángulos
$\overrightarrow{AB}$	rayo de extremo A y que contiene a B	$ABC \leftrightarrow DEF$	correspondencia respectiva entre puntos
$\overleftrightarrow{AB}$	recta que contiene los puntos A y B	$\triangle ABC \sim \triangle DEF$	semejanza de triángulos
$\measuredangle ABC$	ángulo de rayos $\overrightarrow{BA}$ y $\overrightarrow{BC}$	$\overline{AB} \cong \overline{CD}$	congruencia de segmentos
$m\measuredangle ABC$	medida del ángulo ABC	$\widehat{AB}$	arco de extremos A y B
$\triangle ABC$	triángulo de vértices A, B, C	$m\widehat{AB}$	medida del arco $\widehat{AB}$
$\square ABCD$	cuadrilátero de vértices A, B, C, D	(ABC)	área del triángulo ABC
$\parallel$	paralelismo	$(ABCD)$	área del cuadrilátero $ABCD$
$\perp$	perpendicularidad	$P-Q-R$	P, Q, R puntos colineales, con Q entre los puntos P y R

I Parte: Selección Única

1. Si E y F son puntos exteriores a un cuadrado $ABCD$ de centro O tal que $\triangle EDC$ y $\triangle FAD$ son triángulos equiláteros entonces la razón de las áreas de los triángulos $\triangle FDE$ y $\triangle DOC$ es

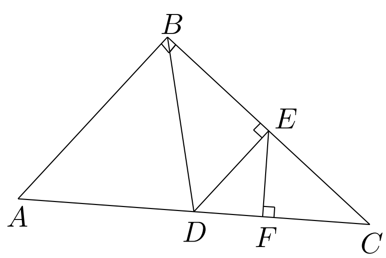
   (a) $\frac{1}{2}$

   (b) 1

   (c) $\frac{3}{2}$

   (d) 2

2. Según los datos de la figura adjunta, si D es el punto medio de $\overline{AC}$, $AB = 8$ y $BD = 5$, entonces FC es igual a



   (a) $\frac{9}{2}$

   (b) $\frac{9}{5}$

   (c) $\frac{16}{5}$

   (d) $\frac{64}{5}$

3. Se toman cinco puntos en una circunferencia y se seleccionan al azar cuatro cuerdas que unen dos de los cinco puntos. Entonces, la probabilidad de que las cuatro cuerdas formen un cuadrilátero convexo es

   (a) $\dfrac{1}{105}$

   (b) $\dfrac{1}{42}$

   (c) $\dfrac{1}{15}$

   (d) $\dfrac{1}{14}$

4. Si f es una función cuyo criterio es $f(x) = \dfrac{x(x-1)}{2}$ entonces $f(x+2)$ corresponde a

   (a) $\dfrac{(x+2)f(x+1)}{x}$

   (b) $\dfrac{xf(x)}{x+2}$

   (c) $f(x) + f(2)$

   (d) $x(x+2)f(x)$

5. La cantidad de divisores del número 2014^{2014} es

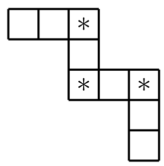
   (a) 2015

   (b) 2015^2

   (c) 2015^3

   (d) 2015^4

6. En cada cuadrado de la siguiente figura se coloca un número del 1 al 9, sin repetir, de modo que la suma de los tres números de cada fila y de cada columna es 13



La suma de los números que se colocan en las casillas marcadas con $*$ es

(a) 6

(b) 7

(c) 8

(d) 9

7. En un hexágono regular de radio 1 se construyen seis círculos de modo que cada lado del hexágono es un diámetro de cada uno de ellos. Si se pinta el interior de estos seis círculos, el área total pintada es

(a) π

(b) $\dfrac{3\pi}{2}$

(c) $\dfrac{\pi}{2}+\dfrac{3\sqrt{3}}{2}$

(d) $\pi+\dfrac{3\sqrt{3}}{4}$

8. La cantidad de kilos de café con valor de 5600/kg que hay que mezclar con 77 kg de otro café de menor calidad, a 4200/kg, para que la mezcla tenga un valor de 4522/kg es

(a) 23

(b) 57

(c) 65

(d) 93

9. Si x_1 y x_2 son las soluciones de la ecuación $4a^4b^2 - 12a^2bx + 5x^2 = 0$ con a, b, c constantes reales y $b \geq 0$, entonces la expresión $|x_1 - x_2|$ es equivalente a

   (a) $\dfrac{8a^2b}{5}$

   (b) $\dfrac{12a^2b}{5}$

   (c) $\dfrac{8ab^2}{5}$

   (d) $\dfrac{12ab^2}{5}$

10. Si las soluciones de la ecuación $x^2 + px + q = 0$ son el cubo de las soluciones de la ecuación $x^2 + mx + n = 0$ entonces se cumple que

    (a) $p = m^3 - 3mn$

    (b) $p = m^3 + 3mn$

    (c) $p + q = m^3$

    (d) $\left(\dfrac{m}{n}\right)^3 = \dfrac{p}{q}$

11. Sea la función de segundo grado $f(x) = ax^2 + bx + c$ con $a \neq 0$ tal que $f(0) = f(3)$, una de sus intersecciones con el eje x es $(1, 0)$ y la componente "y"del vértice es $\frac{-1}{4}$. Determine la otra intersección con el eje x.

    (a) $(2, 0)$

    (b) $(-1, 0)$

    (c) $(-2, 0)$

    (d) No hay otra intersección

12. Si a y b son números positivos y $a^b = 36^{15}$ y $b^a = 1000000^{36}$. Entonces el resultado de $a + b$ corresponde a

    (a) $\log 10^{216}$

    (b) 226

    (c) 360

    (d) 2014

II Parte: Desarrollo **Valor 21 puntos, 7 puntos c/u**

Instrucciones. Los siguientes ejercicios deben ser resueltos en las hojas adicionales que se le entregaron. Conteste los ejercicios en forma ordenada, completa y clara, se califica procedimiento y respuesta.

1. Sea el $\triangle ABC$, recto en C, las bisectrices interiores de $\angle BAC$ y $\angle ABC$ intersecan a $\overline{BC}$ y a $\overline{CA}$ en los puntos P y Q respectivamente. Sean M y N los pies de las perpendiculares desde P y Q al lado $\overline{AB}$ respectivamente, determine $m\angle MCN$.

2. Sean x, y, z números enteros tales que $x + y + z$ es divisible por 6 y $x^2 + y^2 + z^2$ es divisible por 36. Pruebe que $x^3 + y^3 + z^3$ es divisible por 8.

3. Sea $f : \mathbb{N} \cup \{0\} \to \mathbb{R}$ tal que $f(0) \neq 0, f(1) = 1$ y $f(n)f(m) = f(n + m) + f(n - m)$ para todo $n, m \in \mathbb{N}, n \geq m$. Determine el valor de $f(2014)$.