XXV OLIMPIADA COSTARRICENSE DE MATEMÁTICA
PROYECTO INTERINSTITUCIONAL
MEP – UCR – ITCR – UNA – UNED - MICITT

**TERCER NIVEL (10°, 11°, 12°)**

SEGUNDA ELIMINATORIA

23 de agosto de 2013

Nombre completo del estudiante:

_______________________________________________________________

Nombre completo del colegio

_______________________________________________________________

Código: _______________

**Estimado/a estudiante**:

La Comisión Organizadora de las Olimpiadas Costarricenses de Matemática le saluda y felicita por haber clasificado a la s*egunda eliminatoria nacional* de estas justas académicas. La prueba consta de dos partes: una primera parte de doce preguntas de selección única, ponderadas con 2 puntos cada respuesta correcta, y una segunda parte con tres preguntas de desarrollo, con un valor de 7 puntos cada solución correcta.

Los resultados de esta eliminatoria se publicarán a partir del viernes 27 de setiembre en las páginas de OLCOMA:

www.olcoma.org

www.facebook.com/Olcoma

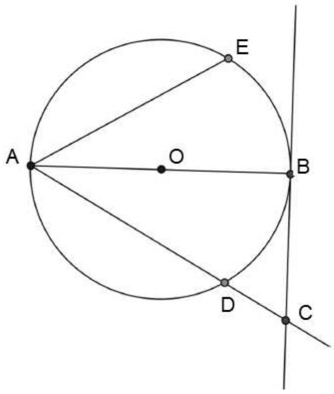
**INSTRUCCIONES GENERALES**

1. Debe trabajar en forma individual.
2. Las respuestas a las preguntas que se le formulan, deben ser consignadas ÚNICAMENTE en las hojas para respuestas que se le han entregado.
3. Los dibujos que aparecen en la prueba no están hechos a escala.
4. El formulario de preguntas de selección única es suyo, por lo que puede realizar en él todas las anotaciones, cálculos o dibujos que le sean necesarios para resolver satisfactoriamente la prueba.
5. NO se permite el uso de hojas adicionales no entregadas oficialmente.
6. Los únicos instrumentos cuyo uso se permite son los necesarios para escribir y dibujar. Se prohíbe el uso de libros, libretas de notas, tablas y calculadora.
7. Para resolver el examen dispone de un máximo de tres horas.
8. Escriba claramente los datos que se le solicitan en la hoja de respuestas.
9. En la parte de desarrollo deben aparecer con detalle todos los pasos y justificaciones que permiten obtener la respuesta a los ejercicios planteados.

## SIMBOLOGÍA

| | |
|---|---|
| $\overline{AB}$: segmento de recta de extremos *A* y *B*. | $\angle ABC \cong \angle DEF$: congruencia de ángulos. |
| *AB* : medida del segmento $\overline{AB}$. | $\Delta ABC \cong \Delta DEF$: congruencia de triángulos. |
| $\overrightarrow{AB}$: rayo de extremo *A* y que contiene a *B*. | $ABC \leftrightarrow DEF$: correspondencia respectiva entre puntos. |
| $\overleftrightarrow{AB}$: recta que contiene los puntos *A* y *B*. | $\Delta ABC \sim \Delta DEF$: semejanza de triángulos. |
| $\angle ABC$: ángulo de lados $\overrightarrow{BA}$ y $\overrightarrow{BC}$. | $\overline{AB} \cong \overline{CD}$: congruencia de segmentos. |
| $\mathrm{m}\angle ABC$: medida del ángulo *ABC*. | $\widehat{AB}$: arco de extremos *A* y *B*. |
| $\Delta ABC$: triángulo de vértices *A*, *B* y *C*. | $\mathrm{m}\widehat{AB}$: medida del arco $\widehat{AB}$. |
| *ABCD*: cuadrilátero de vértices *A*, *B*, *C* y *D*. | (*ABC*): área del triángulo *ABC*. |
| $\parallel$: paralelismo. | (*ABCD*): área del cuadrilátero *ABCD*. |
| $\perp$: perpendicularidad. | *P*–*Q*–*R*: puntos colineales, con *Q* entre *P* y *R*. |

1. En la siguiente figura $\overline{\mathrm{AB}}$ es el diámetro de la circunferencia de centro O con $\overline{\mathrm{AD}}$ y $\overline{\mathrm{AE}}$ cuerdas congruentes.




Si el radio de la circunferencia mide 5, AE = 8, C es un punto exterior de la circunferencia tal que A – D – C y C pertenece a la recta *l* tangente a la circunferencia en B y paralela a $\overline{\mathrm{DE}}$, entonces la medida de $\overline{\mathrm{DC}}$ es

(A) $\frac{18}{5}$

(B) $\frac{9}{2}$

(C) $\frac{32}{5}$

(D) $\frac{5}{32}$

2. Si $a = \dfrac{\cos 30^o + \cos 45^o}{\operatorname{sen} 60^o - \operatorname{sen} 45^o}$ y $b = \dfrac{\operatorname{sen} 60^o - \operatorname{sen} 45^o}{\cos 30^o + \cos 45^o}$,

entonces el valor de $\left(a^2 + b^2\right) + \left(a^3 + b^3\right)$ corresponde a

(A) 970
(B) 1068
(C) 1070
(D) 1088

3. Si $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=2$, $2^{x+y}=12$ y $16^{xy}=a$, entonces el valor de $a$ es

(A) $\sqrt{96}$
(B) 144
(C) 24
(D) 12

4. Considere el hexágono regular $ABCDEF$ de 1cm de lado y sea $G$ el punto de intersección de $\overline{BE}$ y $\overline{AC}$. El área, en cm$^2$, del $\square CGED$ es

(A) $\frac{5}{2}\sqrt{3}$

(B) $\frac{5}{4}\sqrt{3}$

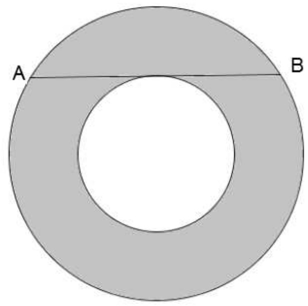
(C) $\frac{5}{8}\sqrt{3}$

(D) $\frac{3}{8}\sqrt{3}$

5. Considere las funciones lineales $f$ y $g$ tales que $f(2)=1$, $g(2x)=-2f(x)$ y $g^{-1}(x)=g(x)$. El valor de $f(2013)$ es

(A) 2
(B) 2012
(C) 2013
(D) 2014

6. El área de una corona circular cuya cuerda tangente $\overline{AB}$ (ver figura) mide 10 cm corresponde a




(A) $5\pi\ \text{cm}^2$
(B) $10\pi\ \text{cm}^2$
(C) $15\pi\ \text{cm}^2$
(D) $25\pi\ \text{cm}^2$

7. La cantidad de valores enteros para *x* de modo que la expresión $\dfrac{8x^3-24x+16}{2x+1}$ represente un número entero, corresponde a:

(A) 0
(B) 3
(C) 8
(D) 14

8. En un avión que volvía de las Olimpiadas Centroamericanas de Matemática, iban cinco "matletas" que ocuparon los cinco primeros puestos en esa competencia. Al preguntarles los periodistas por sus resultados, hicieron las siguientes declaraciones:

Allan: No fui el último.

Kenia: Carlos fue tercero.

Carlos: Allan obtuvo menos puntaje que Evelyn

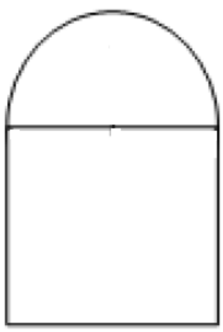
Rodolfo: Evelyn fue segunda

Evelyn: Rodolfo no fue el primero

Por modestia, los dos que obtuvieron mayor puntaje mintieron. Los otros tres dijeron la verdad. Entonces los "*matletas*" que mintieron se llaman:

(A) Kenia y Rodolfo
(B) Evelyn y Carlos
(C) Allan y Rodolfo
(D) Evelyn y Allan

9. Una ventana de una iglesia tiene forma de un cuadrado de 6 m de lado y sobre él hay un arco de una circunferencia de 5 m de radio (Ver figura). Entonces, la altura máxima de la ventana, en metros, es



(A) 6,5
(B) 7
(C) 7,5
(D) 8

10. La cantidad de primos $p$ tales que $9p+1$ es un cubo perfecto corresponde a

(A) 0
(B) 1
(C) 2
(D) 3

11. Si $x+y=3$ y $x^2+y^2=5$, el valor de $x^6+y^6$ es

(A) 12
(B) 13
(C) 60
(D) 65

12. Si en una tómbola se depositan todos los números naturales de tres dígitos. La probabilidad de sacar un número al azar cuyos tres dígitos sean pares y diferentes corresponde a

(A) $\frac{1}{20}$
(B) $\frac{4}{75}$
(C) $\frac{3}{50}$
(D) $\frac{2}{25}$

Código: ________________ Nombre del(la) estudiante: ______________________________

**Pregunta #1**

Si $a, b, c \in \mathbb{R} - \{0\}$ y además $c^2 \neq a - b$, determine todos los posibles valores para la expresión

$$\frac{|a-b-c^2|}{b+c^2-a} + \frac{|b|}{b} - \frac{|a|}{a}.$$

Código: ______________ Nombre del estudiante: ____________________________

**Pregunta #2**

Considere un triángulo ABC no rectángulo. Si D y E son puntos sobre el lado $\overline{BC}$ tales que $\overline{AD}$ y $\overline{AE}$ son, respectivamente, paralelas a las rectas tangentes en C y en B a la circunferencia circunscrita al triángulo, demuestre que $\dfrac{BE}{CD} = \dfrac{AB^2}{AC^2}$.

Código: ________________ Nombre del estudiante: ________________________________

**Pregunta #3**

Un número natural *n* se llama equilibrado si se pueden dividir sus dígitos en dos grupos, guardando el orden en que aparecen, de tal forma que la suma de los dígitos del primer grupo es igual a la suma del segundo grupo. Por ejemplo, 1236 y 743 son equilibrados, pero 3254 no lo es.

Determine el menor natural *n* tal que *n* y *n + 1* sean equilibrados.

**SOLUCIONES**

**I PARTE: SELECCIÓN**

| # | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | B | B | B | C | B | D | C | A | B | B | D | B |

**1.**

***Solución*** Opción correcta: b)

Como el $\angle \mathrm{AEB}$ está inscrito en la semicircunferencia, entonces $m\angle \mathrm{AEB} = 90^{\circ}$, por lo que el $\Delta \mathrm{BEA}$ es rectángulo en E. Sea $h$ la medida de la altura sobre la hipotenusa del $\Delta \mathrm{BEA}$, M el punto de intersección de dicha altura con esa hipotenusa y $x = \mathrm{OM}$. Como el radio de la circunferencia mide 5, se tiene que:

$h^2 = 8^2 - (5+x)^2$ por el teorema de Pitágoras

$h^2 = (5+x)(5-x)$ por derivado del teorema de Pitágoras

$$8^2 - (5+x)^2 = (5+x)(5-x) \Rightarrow 64 - (5+x)^2 - (5+x)(5-x) = 0$$

$$\Rightarrow 64 - (5+x)(5+x+5-x) = 0$$

$$\Rightarrow 64 - 10(5+x) = 0$$

$$\Rightarrow x = \frac{7}{5}$$

$$x = \frac{7}{5} \Rightarrow \mathrm{MB} = 5 - \frac{7}{5} = \frac{18}{5} \wedge \mathrm{AM} = 5 + \frac{7}{5} = \frac{32}{5}$$

Como A – D – C, A – M – B y $\overline{\mathrm{BC}} \parallel \overline{\mathrm{MD}}$, por el teorema de Thales se tiene que

$\dfrac{\mathrm{AM}}{\mathrm{MB}} = \dfrac{\mathrm{AD}}{\mathrm{DC}}$, es decir, $\dfrac{\frac{32}{5}}{\frac{18}{5}} = \dfrac{8}{\mathrm{DC}}$, por lo que $\mathrm{DC} = \dfrac{9}{2}$

**2.**

***Solución*** Opción correcta: b)

$\cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}, \quad \cos 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}, \quad \operatorname{sen} 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}, \quad \operatorname{sen} 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}$

$$a = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}} = \frac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{\sqrt{3}-\sqrt{2}} \quad \text{y } b = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}} = \frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}$$

De esta forma se tiene que $ab = \frac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{\sqrt{3}-\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{\sqrt{3}+\sqrt{2}} = \frac{3-2}{3-2} = 1$

Además, $a+b = \frac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{\sqrt{3}-\sqrt{2}} + \frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}$

$$= \frac{\left(\sqrt{3}+\sqrt{2}\right)^2 + \left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)^2}{\left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)\left(\sqrt{3}+\sqrt{2}\right)}$$

$$= 3 + 2\sqrt{6} + 2 + 3 - 2\sqrt{6} + 2$$

$$= 10$$

Por lo que $(a+b)^2 = 100$

Por otro lado, $a^3 + b^3 = (a+b)\left(a^2 - ab + b^2\right) = (a+b)\left(a^2 + b^2 - ab\right)$

$(a+b)^2 = 100 \Rightarrow a^2 + 2ab + b^2 = 100 \Rightarrow a^2 + b^2 = 98$ pues $ab = 1$

$a^3 + b^3 = (a+b)\left(a^2 + b^2 - ab\right) = 10(98-1) = 970$

Así, $\left(a^2 + b^2\right) + \left(a^3 + b^3\right) = 98 + 970 = 1068$

**Solución 2**

$$a=\frac{\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}}=\frac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}=\left(\sqrt{3}+\sqrt{2}\right)^2=5+2\sqrt{6} \quad \text{y} \quad b=\frac{\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}}=\frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}=\left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)^2=5-2\sqrt{6}$$

Como $a^2=\left(5+2\sqrt{6}\right)^2=49+10\sqrt{6}$ y $b^2=\left(5-2\sqrt{6}\right)^2=49-10\sqrt{6}$ entonces $a^2+b^2=98$

Como $a^3=\left(5+2\sqrt{6}\right)^3=125+450\sqrt{6}+360+48\sqrt{6}=485+498\sqrt{6}$

y $b^3=\left(5-2\sqrt{6}\right)^3=125-450\sqrt{6}+360-48\sqrt{6}=485-498\sqrt{6}$ entonces $a^3+b^3=970$

Así, $\left(a^2+b^2\right)+\left(a^3+b^3\right)=98+970=1068$

**3.**

**Solución: Opción correcta: B**

$$2^{x+y}=12 \;\Rightarrow\; (x+y)\ln 2=\ln 12 \;\Rightarrow\; x+y=\frac{\ln 12}{\ln 2}$$

$$16^{xy}=a \;\Rightarrow\; xy\ln 16=\ln a \;\Rightarrow\; xy=\frac{\ln a}{\ln 16}$$

Por otro lado, $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=2 \;\Rightarrow\; \frac{x+y}{xy}=2$

$$\begin{aligned}
x+y=\frac{\ln 12}{\ln 2} \;\wedge\; xy=\frac{\ln a}{\ln 16} \;\wedge\; \frac{x+y}{xy}=2 \quad &\Rightarrow \frac{\frac{\ln 12}{\ln 2}}{\frac{\ln a}{\ln 16}}=2\\
&\Rightarrow \frac{\ln 12\cdot\ln 16}{\ln 2\cdot\ln a}=2\\
&\Rightarrow \frac{\ln 12\cdot 4\ln 2}{\ln 2\cdot\ln a}=2\\
&\Rightarrow 2\cdot\ln 12=\ln a\\
&\Rightarrow 144=a
\end{aligned}$$

**Solución 2**

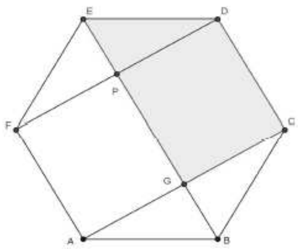
Como se sabe que $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=2 \;\Rightarrow\; \frac{x+y}{xy}=2 \Rightarrow x+y=2xy$

$$a=16^{xy}=\left(2^4\right)^{xy}=\left(2^2\right)^{2xy}=\left(2^2\right)^{x+y}=\left(2^{x+y}\right)^2=12^2=144$$

**4.**

***Solución*** Opción correcta: C

Considere la figura




Dado que el hexágono es regular, $\overline{BE}$ biseca al $\angle ABC$, así $\angle ABE=60^\circ$, como $\overline{BE}\perp\overline{AC}$ entonces $\angle BCG=30^\circ$, así por triángulos especiales tenemos $BC=1,\ GB=\frac{1}{2},\ GC=\frac{1}{2}\sqrt{3}$.

Además, sea P el pie de la altura desde D sobre $\overline{BE}$ y procediendo de forma análoga se tiene que $PE=\frac{1}{2}$ y así $GE=1+\frac{1}{2}=\frac{3}{2}$, de esta forma se tiene que:

$$a\square CGED=\frac{GE+CD}{2}\cdot GC=\frac{\frac{3}{2}+1}{2}\cdot\frac{1}{2}\sqrt{3}=\frac{5}{8}\sqrt{3}$$

**5.**

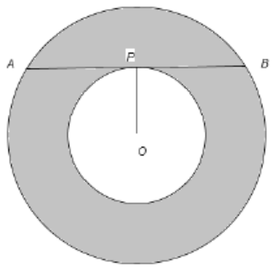
Solución: Opción correcta B

Como $g(2x)=-2f(x)$., entonces $g(4)=g(2\cdot 2)=-2f(2)=-2\cdot 1=-2$, y como $g^{-1}(x)=g(x)$ entonces se tiene que los puntos $(4,-2)$ y $(-2,4)$ pertenecen al gráfico de $g$ entonces se tiene que su criterio viene dado por $g(x)=2-x$, así se tiene que $g(2x)=-2f(x)\Rightarrow 2-2x=-2f(x)\Rightarrow f(x)=x-1$ y así se tiene que $f(2013)=2012$

**6.**

**Solución** Opción correcta: d.

Considere a la siguiente figura donde O es el centro de ambas circunferencias y P es el punto de tangencia de la cuerda con la circunferencia menor:




Tenemos que el área de la corona circular corresponde a

$$\pi\ OB^2 - \pi\ OP^2 = \pi\ (OB^2 - OP^2) = \pi\ PB^2 = \pi\ 5^2 = 25\ \pi$$

**7.**

**Solución** opción correcta: C.

Se requiere que $\dfrac{8x^3-24x+16}{2x+1} \in \mathbb{Z}$. Como $\dfrac{8x^3-24x+16}{2x+1} = 4x^2-2x-11+\dfrac{27}{2x+1}$, entonces $2x+1$ debe dividir a 27, o sea que $2x+1$ debe ser alguno de los elementos del siguiente conjunto: $\{\pm 1, \pm 3, \pm 9, \pm 27\}$, obteniendo así que $x$ puede ser cualquiera de los elementos del conjunto $\{-14,-5,-2,-1,0,1,4,13\}$.

**8.**

**Solución**: Opción correcta A:

La declaración de Allan debe ser verdadera: si miente, sería al mismo tiempo ultimo o primero o segundo, lo que es contradictorio. Por lo tanto, Allan es tercero o cuarto.

Si Rodolfo está diciendo la verdad, Evelyn está mintiendo y Rodolfo es primero y está mintiendo, lo que es contradictorio. Por lo tanto Evelyn no es segunda, y Rodolfo es primero o segundo.

Si Evelyn está mintiendo, Rodolfo es primero y Evelyn es segunda. Pero Rodolfo está mintiendo cuando dice que Evelyn es segunda. Por lo tanto, Evelyn está diciendo la verdad, lo que la hace tercera, cuarta o quinta. Y Rodolfo no es primero, sino segundo.

Sólo Kenia o Carlos pueden ser el primero. Si Kenia no es primero, dado que tampoco es segundo tiene que estar diciendo la verdad. Si Carlos es tercero no puede ser al mismo tiempo primero. Por lo tanto, Kenia es primero y Carlos no es el tercero.

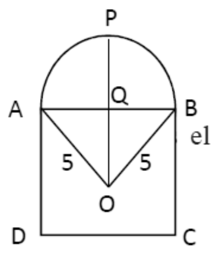
Por último para ver si no existe empate, ya que Carlos no es ni primero ni segundo, está diciendo la verdad al afirmar que Allan viene detrás de Evelyn. Por lo tanto, Evelyn es tercera, Allan es cuarto y Carlos es quinto.

Por lo tanto el puntaje más alto lo obtuvo Kenia y el segundo lo obtuvo Rodolfo.

**9.**

Solución: Opción correcta B

Sea $O$ el centro de la circunferencia como en la figura. $OP = 5$, pues es radio de la circunferencia de centro $O$. Como $\Delta OAB$ es isósceles, si $Q$ es el punto medio de $\overline{AB}$, $\overline{OQ} \perp \overline{AB}$ y .




el punto más alto de la ventana, O – Q – P. Así, por el teorema de Pitágoras $OQ = \sqrt{5^2 - 3^2} = \sqrt{25 - 9} = \sqrt{16} = 4$ Por lo tanto, $PQ = 5 - 4 = 1$ y la altura máxima de la ventana es $6 + 1 = 7\,\text{m}$.

**10.**

Solución: Opción correcta B

$9p+1=k^3$ con $k$ entero $\Rightarrow$ $9p=k^3-1$ $\Rightarrow$ $9p=(k-1)(k^2+k+1)$ $\Rightarrow$ $k-1/9p$ y como $p$ es primo, $k-1$ debe ser alguno de los elementos del conjunto $\{1,3,9,p,3p,9p\}$

$k-1=1 \Rightarrow k=2 \Rightarrow p=\frac{7}{9}$

$k-1=3 \Rightarrow k=4 \Rightarrow p=7$

$k-1=9 \Rightarrow k=10 \Rightarrow p=111$

$k-1=p \Rightarrow (p+1)^2+(p+1)+1=9 \Rightarrow p^2+3p-6=0$ q no posee soluciones enteras

$k-1=3p \Rightarrow (3p+1)^2+(3p+1)+1=3 \Rightarrow 9p^2+9p=0 \Rightarrow p=0$ ó $p=-1$

$k-1=9p \Rightarrow (9p+1)^2+(9p+1)+1=1 \Rightarrow 81p^2+27p+2=0$

$\Rightarrow (9p+1)(9p+2)=0 \Rightarrow p=\frac{-1}{9}$ ó $p=\frac{-2}{9}$

Así la cantidad de primos que cumplen con esta condición es 1.

**11.**

Solución: Opción correcta D

Primero se tiene que

$$x^6+y^6=(x^2+y^2)(x^4-x^2y^2+y^4)=5(x^4-x^2y^2+y^4)$$

Ahora

$$(x^4-x^2y^2+y^4)=(x^4+2x^2y^2+y^4)-3x^2y^2=(x^2+y^2)^2-3x^2y^2=25-3x^2y^2$$

Por otro lado:

$$(x+y)^2=x^2+2xy+y^2 \Rightarrow 9=5+2xy \Rightarrow 4=2xy \Rightarrow 2=xy \Rightarrow 4=x^2y^2$$

Así, se tiene que $(x^4-x^2y^2+y^4)=25-3x^2y^2=25-3\cdot 4=13$

Por lo tanto $x^6+y^6=5(x^4-x^2y^2+y^4)=5\cdot 13=65$

**12.**

Solución: Opción correcta: B

Las posibilidades para el primer dígito son 4: 2,4,6 u 8. Para el segundo dígito se tienen 4 posibilidades: 0, 2, 4, 6 u 8 menos la que ya se tiene en el primer dígito.

Por último, para el tercer dígito se tienen tres posibilidades. En total hay 48 números de tres dígitos pares distintos entre los 900 números de tres dígitos.

Entonces la probabilidad de sacar un número al azar de la tómbola de este tipo es $P = \frac{4 \bullet 4 \bullet 3}{900} = \frac{4 \bullet 3}{225} = \frac{4}{75}$.

## II PARTE: DESARROLLO

### Pregunta #1

Si $a, b, c \in \mathbb{R} - \{0\}$ y además $c^2 \neq a - b$, determine todos los posibles valores para la expresión

$$\frac{|a-b-c^2|}{b+c^2-a} + \frac{|b|}{b} - \frac{|a|}{a}\,.$$

**Solución**

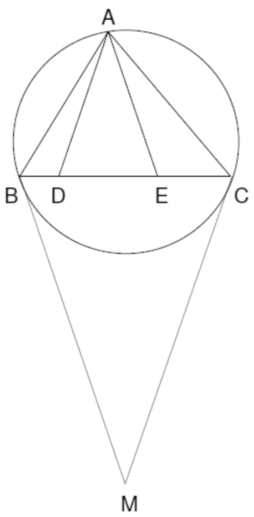
| $a < 0$ | | $a > 0$ | |
|---|---|---|---|
| $b < 0$ | $b > 0$ | $b < 0$ | $b > 0$ |
| $\frac{\lvert a-b-c^2\rvert}{b+c^2-a} + \frac{\lvert b\rvert}{b} - \frac{\lvert a\rvert}{a}$<br>$= \frac{\lvert a-b-c^2\rvert}{b+c^2-a} - 1 + 1$<br>$= \frac{\lvert a-b-c^2\rvert}{b+c^2-a}$ | $\frac{\lvert a-b-c^2\rvert}{b+c^2-a} + \frac{\lvert b\rvert}{b} - \frac{\lvert a\rvert}{a}$<br>$= \frac{\lvert a-b-c^2\rvert}{b+c^2-a} + 1 + 1$<br>$= \frac{\lvert a-b-c^2\rvert}{b+c^2-a} + 2$ | $\frac{\lvert a-b-c^2\rvert}{b+c^2-a} + \frac{\lvert b\rvert}{b} - \frac{\lvert a\rvert}{a}$<br>$= \frac{\lvert a-b-c^2\rvert}{b+c^2-a} - 1 - 1$<br>$= \frac{\lvert a-b-c^2\rvert}{b+c^2-a} - 2$ | $\frac{\lvert a-b-c^2\rvert}{b+c^2-a} + \frac{\lvert b\rvert}{b} - \frac{\lvert a\rvert}{a}$<br>$= \frac{\lvert a-b-c^2\rvert}{b+c^2-a} + 1 - 1$<br>$= \frac{\lvert a-b-c^2\rvert}{b+c^2-a}$ |
| Puede ser igual a 1 ó a -1 porque $a - b - c^2$ puede ser negativo o positivo. | Solamente puede ser 3 porque $a - b - c^2$ es negativo. | Puede ser igual a -3 ó a -1 porque $a - b - c^2$ puede ser negativo o positivo. | Puede ser igual a 1 ó a -1 porque $a - b - c^2$ puede ser negativo o positivo. |

Por lo tanto, hay cuatro valores posibles para la expresión: -3, -1, 1 y 3.

**Pregunta #2**

Considere un triángulo ABC no rectángulo. Si D y E son puntos sobre el lado $\overline{BC}$ tales que $\overline{AD}$ y $\overline{AE}$ son, respectivamente, paralelas a las rectas tangentes en C y en B a la circunferencia circunscrita al triángulo, demuestre que $\frac{BE}{CD} = \frac{AB^2}{AC^2}$.

**Solución**:




Considere la siguiente figura que se forma con los datos dados con M el punto de intersección de las tangentes.

$\Delta ABC \sim \Delta DCA$ por el criterio A.A, pues $m\angle ADC = m\angle BCM = m\angle BAC$, ya que $\overline{AD}$ y $\overline{CM}$ son paralelas entonces $\angle ADC \cong \angle BCM$ por ser alternos internos. $\angle BAC \cong \angle BCM$ por ser inscrito y semiinscrito, respectivamente, que subtienden el mismo arco, además el $\angle ACD$ es común a ambos triángulos.

Estableciendo la razón entre la medida de sus lados, tenemos:

$$\frac{CD}{AC} = \frac{AC}{BC} \Leftrightarrow CD \cdot BC = AC^2$$

De la misma forma, $\Delta ABC \sim \Delta EBA$ pues $m\angle AEB = m\angle EBM = m\angle BAC$ y el ángulo $\angle ABE$ es común a ambos triángulos.

Entonces, estableciendo la razón entre la medida de sus lados, tenemos

$$\frac{BE}{AB} = \frac{AB}{BC} \Leftrightarrow BE \cdot BC = AB^2$$

Al dividir ambas igualdades obtenidas se concluye que $\frac{BE}{CD} = \frac{AB^2}{AC^2}$.

**Pregunta #3**

Un número natural *n* se llama equilibrado si se pueden dividir sus dígitos en dos grupos, guardando el orden en que aparecen, de tal forma que la suma de los dígitos del primer grupo es igual a la suma del segundo grupo. Por ejemplo, 1236 y 743 son equilibrados, pero 3254 no lo es.

Determine el menor natural *n* tal que *n* y *n + 1* sean equilibrados.

**Solución:**

Sea *n* un número natural equilibrado. Por hipótesis se debe cumplir que la suma de sus dígitos debe ser un número par.

Veamos que no hay números equilibrados de dos dígitos para el cual su consecutivo también es equilibrado. Un tal *n* debe ser de la forma $n = 10a_1 + a_2$, con la condición de que $a_1 = a_2$.

El número equilibrado consecutivo $n + 1$ debe tener la forma $10a_1 + a_2 + 1$. Entonces, si $a_2$ no es nueve, debería cumplirse que $a_1 + a_2 + 1$ debe ser par, lo cual es absurdo. Luego $a_2 = 9$ pero en este caso n = 99 y su consecutivo no es equilibrado.

Veamos que sí hay solución con números de tres dígitos. Sea $n = 100a_1 + 10a_2 + a_3$ un número equilibrado, entonces la suma de sus dígitos es par, y se debe cumplir que $a_1 = a_2 + a_3$, o bien $a_1 + a_2 = a_3$. Ahora bien, $n + 1$ tiene la forma $100a_1 + 10a_2 + a_3 + 1$.

Si $a_3 \in \{0,1,2,...,8\}$, entonces $a_3 + 1$ es a lo sumo 9, de donde se obtiene que la suma de sus dígitos es impar, lo cual es absurdo. Por lo tanto, debe tenerse que $a_3 = 9$ para una posible solución.

Ahora bien $n = 100a_1 + 10a_2 + 9$, y por hipótesis $a_1 + a_2 + 9$ es par. Además debe cumplirse que $a_1 + a_2 = 9$, la otra posibilidad $a_1 = a_2 + 9$ se descarta de manera obvia. Por otra parte, $n + 1 = 100a_1 + 10a_2 + 9 + 1$, de donde se sigue que $n + 1 = 100a_1 + 10(a_2 + 1)$, y por hipótesis $a_1 = a_2 + 1$.

En resumen, tenemos que $a_1 - a_2 = 1$ y $a_1 + a_2 = 9$. Al resolver este sistema se sigue que $a_1 = 5$ y que $a_2 = 4$. Por lo tanto, el menor entero natural *n* tal que *n* y $n + 1$ sean equilibrados es $n = 549$.