XXVII OLIMPIADA COSTARRICENSE DE MATEMÁTICA

UNA - UCR - TEC - UNED - MEP - MICIT

SEGUNDA ELIMINATORIA NACIONAL

III Nivel

$(10^\circ - 11^\circ - 12^\circ)$

2015

Estimado estudiante:

La Comisión Organizadora de las Olimpiadas Costarricenses de Matemática le saluda y felicita por haber clasificado a la segunda eliminatoria nacional de estas justas académicas. La prueba consta de dos partes: una primera parte de 12 preguntas de selección única, ponderadas con dos puntos cada respuesta correcta, y una segunda parte con 3 preguntas de desarrollo, con un valor de 7 puntos cada solución correcta.

Los resultados de esta eliminatoria se publicarán a partir del lunes 21 de setiembre, en la siguiente dirección electrónica:

www.olcoma.com

INDICACIONES GENERALES

- Debe trabajar en forma individual.
- Las respuestas a las preguntas que se le formulan, deben ser consignadas ÚNICAMENTE en la hoja de respuestas que se le ha entregado.
- Los dibujos que aparecen en la prueba no están hechos a escala.
- El formulario de preguntas de selección única es suyo, por lo que puede realizar en él todas las anotaciones, cálculos o dibujos que le sean necesarios para resolver satisfactoriamente la prueba.
- NO se permite el uso de hojas adicionales no entregadas oficialmente.
- Los únicos instrumentos cuyo uso se permite son los necesarios para escribir y dibujar. Se prohíbe el uso de libros, libretas de notas, tablas y calculadora.
- Para resolver el examen dispone de un máximo de tres horas.
- Escriba claramente los datos que se le solicitan en la hoja de respuestas.
- En la parte de desarrollo deben aparecer con detalle todos los pasos y justificaciones que permiten obtener la respuesta a los ejercicios planteados.

SIMBOLOGÍA

$\overline{AB}$	segmento de extremos A yB	$\angle ABC \cong DEF$	congruencia de ángulos
AB	medida de $\overline{AB}$	$\triangle ABC \cong \triangle DEF$	congruencia de triángulos
$\overrightarrow{AB}$	rayo de extremo A y que contiene a B	$ABC \leftrightarrow DEF$	correspondencia respectiva entre puntos
$\overleftrightarrow{AB}$	recta que contiene los puntos A y B	$\triangle ABC \sim \triangle DEF$	semejanza de triángulos
$\angle ABC$	ángulo de rayos $\overrightarrow{BA}$ y $\overrightarrow{BC}$	$\overline{AB} \cong \overline{CD}$	congruencia de segmentos
$m\angle ABC$	medida de $\angle ABC$	$\widehat{AB}$	arco de extremos A y B
$\triangle ABC$	triángulo de vértices A, B, C	$m\widehat{AB}$	medida de $\widehat{AB}$
$\square ABCD$	cuadrilátero de vértices A, B, C, D	(ABC)	área de ΔABC
$\parallel$	paralelismo	$(ABCD)$	área de $\square ABCD$
$\perp$	perpendicularidad	$P-Q-R$	P, Q, R puntos colineales, con Q entre los puntos P y R

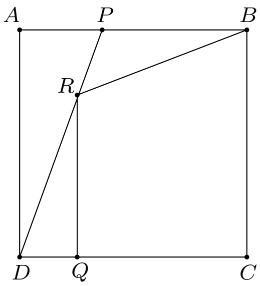
I Parte: Selección única **Valor 24 puntos, 2 pts c/u**

1. Maya y Nicolás comen cada semana en el mismo café y siempre gastan lo mismo, pero nunca ordenan exactamente lo mismo. Hace tres semanas ordenaron dos refrescos de fresa, una taza de té y un pastel. Hace dos semanas fueron dos tazas de té y un pastel. Hace una semana fueron dos refrescos de fresa y tres tazas de té. Esta semana han ordenado, hasta el momento, tres tazas de té.
   Mientras hacen cuentas, deciden que solo van a ordenar una cosa más, en caso de que todavía no hayan gastado lo mismo de siempre. Determine cuál ítem orderarán, o si no necesitan ordenar nada más:
   (a) Pastel
   (b) Refresco de fresa
   (c) Una taza de té
   (d) Nada más

2. Sean a y b dos enteros positivos coprimos, es decir, el mx́imo común divisor entre ellos es 1. Si a tiene exactamente 4 divisores positivos, y b tiene exactamente 4 divisores positivos, entonces el máximo número de divisores positivos que tiene ab es
   (a) 1
   (b) 4
   (c) 8
   (d) 16

3. Hay cinco cajas, A, B, C, D, E, y Henry tiene 1000 cartas, cada una con un único y diferente número del uno al mil, ambos inclusive. Echa las cartas, una por una, en las cajas de la siguiente forma: echa la 1 en la A, la 2 en la B, y así hasta la 5 en la E, se salta la A, y echa la 6 en la B, la 7 en la C, y así hasta la 10 en la A, se salta la B. Si continúa de la misma forma hasta acabar las 1000 cartas, la carta 763 va en la caja
   (a) B
   (b) C
   (c) D
   (d) E

4. Considere la siguiente figura en la cual el $\square ABCD$ es un cuadrado de lado 12. Si $AP = 4$, $DQ = 3$ y $m\angle RQC = 90°$ determine la longitud de $\overline{RB}$.

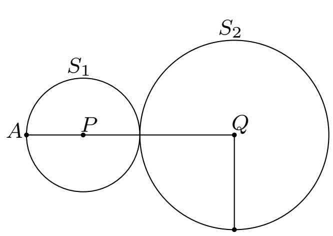


(a) $4\sqrt{3}$
(b) $3\sqrt{10}$
(c) 9
(d) $6\sqrt{3}$

5. Sean a y b dos enteros positivos. Si sabemos que son coprimos (el máximo común divisor entre ellos es 1), entonces el máximo valor que puede tener el máximo común divisor de $(a + b)$ y $(a - b)$ es

(a) 1
(b) 2
(c) 4
(d) 8

6. En la figura P y Q son los centros de las circunferencias tangentes S_1 y S_2, la recta $\overleftrightarrow{PQ}$ corta la circunferencia S_1 en A y el radio $\overline{QB}$ es perpendicular a $\overline{PQ}$. Si la suma de las áreas de los círculos es 10π y el área del $\triangle AQB$ es 8, determine la longitud de $\overline{PB}$.



(a) $\sqrt{40}$
(b) $\sqrt{26}$
(c) 5
(d) 6

7. La cantidad de soluciones (x, n), donde ambos son enteros positivos y n es par, de la ecuación $x^2 + 7 = 2^n$ es

   (a) 1
   (b) 2
   (c) 3
   (d) 0

8. Sean x_1 y x_2 dos números reales tales que $x_1 \neq x_2$, $3x_1^2 - hx_1 = a$ y $3x_2^2 - hx_2 = a$, con $a > 0$. Una expresión equivalente a $x_1 + x_2$ es

   a) $\frac{a}{3}$
   b) $\frac{h}{3}$
   c) $\frac{-a}{3}$
   d) $\frac{-h}{3}$

9. En cierto colegio los estudiantes de décimo año pueden optar por cursar como ciencia natural entre biología o química. En uno de los grupos de décimo, 80 % de los estudiantes estudia biología y el resto química; 40 % de los que estudian biología son hombres y, de los que estudian química, 35 % son mujeres. Si se selecciona al azar un estudiante de este grupo de décimo año, la probabilidad de que sea mujer es

   a) 0,39
   b) 0,45
   c) 0,55
   d) 0,61

10. Dado el cuadrado $\square ABCD$ de lado 2 y una semicircunferencia de diámetro $\overline{AD}$ que está contenida en él. Sea E un punto tal que $A - E - B$ y $\overline{CE}$ es tangente a la semi-circunferencia, determine el área del $\triangle CBE$

    (a) 1
    (b) $\frac{3}{2}$
    (c) 2
    (d) $\frac{5}{2}$

11. Si un número entero positivo n tiene exactamente 16 divisores positivos, entonces el producto de esos 16 divisores es

   (a) n^{16}

   (b) n^8

   (c) n^4

   (d) n^2

12. Si a, b son números reales positivos tales que

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{8}{3},\ a^2 + b^2 = \frac{5}{2},$$

   determine el valor de $a \cdot b$

   (a) $\frac{3}{8}$

   (b) 3

   (c) $\frac{3}{4}$

   (d) $\frac{8}{3}$

II Parte: Desarrollo **Valor 21 puntos, 7 pts c/u**

Instrucciones: Los siguientes ejercicios deben ser resueltos en las hojas adicionales que se le entregaron. Conteste en forma ordenada, completa y clara. Se califica procedimientos y respuesta.

1. Rolando dibuja una serie de 2015 figuras con el siguiente orden:

   Si selecciona al azar una figura que está en una posición múltiplo de 5, determine la probabilidad de que esta figura sea un pentágono.

2. Determine todos los cuadrados perfectos de cuatro cifras de la forma $NNMM$

3. En la figura adjunta $\square ABCD$ es un cuadrado y ΔBEF es un triángulo equilátero. Si el área del $\square ABCD$ es un metro cuadrado, determine el área del ΔBEF