XXVII OLIMPIADA COSTARRICENSE DE MATEMÁTICA

UNA - UCR - TEC - UNED - MEP - MICIT

SOLUCIÓN II ELIMINATORIA NACIONAL

III Nivel

$(10^{\circ} - 11^{\circ} - 12^{\circ})$

2015

I Parte: Selección única **Valor 24 puntos, 2 pts c/u**

1. Maya y Nicolás comen cada semana en el mismo café y siempre gastan lo mismo, pero nunca ordenan exactamente lo mismo. Hace tres semanas ordenaron dos refrescos de fresa, una taza de té y un pastel. Hace dos semanas fueron dos tazas de té y un pastel. Hace una semana fueron dos refrescos de fresa y tres tazas de té. Esta semana han ordenado, hasta el momento, tres tazas de té.
   Mientras hacen cuentas, deciden que solo van a ordenar una cosa más, en caso de que todavía no hayan gastado lo mismo de siempre. Determine cuál ítem orderarán, o si no necesitan ordenar nada más:

   (a) Pastel
   (b) Refresco de fresa
   (c) Una taza de té
   (d) Nada más

   Solución:

   Respuesta correcta: Opción c)

   De los resultados de hace tres semanas y de la semana pasada, podemos ver que un pastel cuesta igual que dos tazas de té. Analizando la orden de hace dos semanas, vemos que dos tazas de té y un pastel equivalen al gasto de cuatro tazas de té. Por lo tanto, ordenar una taza de té esta semana, hará que el gasto sea el mismo de siempre.

   Además, note que como la semana pasada ordenaron tres tazas de té y dos refrescos de fresa, ordenar un refresco de fresa u ordenar nada no sería suficiente. Finalmente, como un pastel equivale a dos tazas de té, ordenar un pastel haría que el gasto fuera mayor a las semanas anteriores.

2. Sean a y b dos enteros positivos coprimos, es decir, el mx́imo común divisor entre ellos es 1. Si a tiene exactamente 4 divisores positivos, y b tiene exactamente 4 divisores positivos, entonces el máximo número de divisores positivos que tiene ab es

   (a) 1
   (b) 4
   (c) 8
   (d) 16

   Solución:

   Respuesta correcta: Opción d)

   Sabemos que a y 1 son dos divisores positivos de a (y no son iguales pues $a \neq 1$ dado que solo tendría un divisor positivo en ese caso). Además a no puede tener más de dos divisores primos distintos, pues entonces habría más de 4 divisores.

Analizando su factorización prima, a solo podría tener la forma $a = p^3$, o $a = pq$, con p, q primos distintos, pues si solo aparece un primo, éste deber estar elevado a la 3 (para tener exactamente 4 divisores: $1, p, p^2, p^3$); y si aparecen dos primos, ninguno puede estar elevado a una potencia mayor que 1 pues si no, por ejemplo, p^2q o pq^2 son divisores positivos adicionales a $1, p, q, pq$.

Un análisis similar nos dice que $b = r^3$ o $b = rs$, donde r, s son primos distintos a p, q pues a y b son coprimos.

Entonces ab es igual a p^3r^3 o pqr^3 o p^3rs o $pqrs$.

En el primer caso los divisores son de la forma p^ir^j, donde $0 \leq i, j \leq 3$, por lo que hay $4 \cdot 4 = 16$ opciones. En el segundo caso (que es análogo al tercero), los divisores tienen la forma $p^iq^jr^k$, donde $0 \leq i, j \leq, 0 \leq k \leq 3$, por lo que hay $2 \cdot 2 \cdot 4 = 16$ opciones. Finalmente, en el último caso, los divisores son de la forma $p^iq^jr^ks^t$, donde $0 \leq i, j, k, t \leq 1$, por lo que hay $2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 16$ opciones. En cada caso, la respuesta es 16.

3. Hay cinco cajas, A, B, C, D, E, y Henry tiene 1000 cartas, cada una con un único y diferente número del uno al mil, ambos inclusive. Echa las cartas, una por una, en las cajas de la siguiente forma: echa la 1 en la A, la 2 en la B, y así hasta la 5 en la E, se salta la A, y echa la 6 en la B, la 7 en la C, y así hasta la 10 en la A, se salta la B. Si continúa de la misma forma hasta acabar las 1000 cartas, la carta 763 va en la caja
   (a) B
   (b) C
   (c) D
   (d) E

Solución:

Respuesta correcta: Opción d)

Note el siguiente patrón, donde una X representa que nos saltamos la caja, y donde tenemos las cajas ordenadas como ABCDE:

$$1, 2, 3, 4, 5$$

$$X, 6, 7, 8, 9$$

$$10, X, 11, 12, 13$$

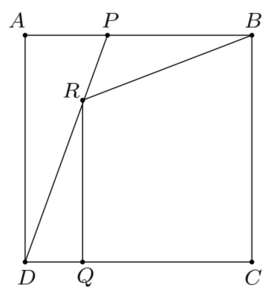
$$14, 15, X, 16, 17$$

$$18, 19, 20, X, 21$$

$$22, 23, 24, 25, X$$

Cada 25 cartas, volvemos a repetir este patrón. Por lo tanto, como $763 = 25(30) + 13$, su posición es la misma que aquella de la carta 13. O sea, va en la E.

4. Considere la siguiente figura en la cual el $\square ABCD$ es un cuadrado de lado 12. Si $AP = 4$, $DQ = 3$ y $m\angle RQC = 90°$ determine la longitud de $\overline{RB}$.

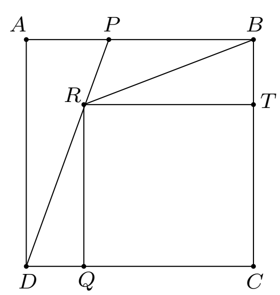


   (a) $4\sqrt{3}$
   (b) $3\sqrt{10}$
   (c) 9
   (d) $6\sqrt{3}$

Solución:

Respuesta correcta: Opción b)

Tome T en $\overline{BC}$ tal que $\overline{RT} \perp \overline{BC}$, tal como se muestra en la figura



$\overline{AD} \parallel \overline{QR}$ entonces $\angle ADP \cong \angle DRQ$ así $\triangle PDA \sim \triangle DRQ$ entonces

$$\frac{12}{4} = \frac{DA}{PA} = \frac{RQ}{DQ} = \frac{RQ}{3}$$

y así $RQ = 9$, entonces $BT = 3$ y $RT = 9$, aplicando Pitágoras se tiene que $RB = 3\sqrt{10}$

5. Sean a y b dos enteros positivos. Si sabemos que son coprimos (el máximo común divisor entre ellos es 1), entonces el máximo valor que puede tener el máximo común divisor de $(a + b)$ y $(a - b)$ es

   (a) 1

(b) 2

(c) 4

(d) 8

Solución:

Respuesta correcta: Opción b)

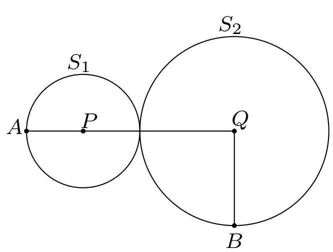
Sea $d := MCD(a+b, a-b)$. Note que entonces $d|(a+b), d|(a-b)$. Por lo tanto, $d|((a+b)+(a-b)$, o sea, $d|2a$. De manera análoga, $d|2b$. Sea p un divisor primo de d. Entonces, $p|d$, por lo cual $p|2a$ y $p|2b$. Como p es primo, divide a 2 o divide a a. Similarmente, de la segunda expresión tenemos que p divide a 2 o divide a b.

Si p no divide a 2, entonces p divide tanto a a como a b, pero eso quiere decir que es un divisor común a a y b. Sin embargo, eso indica que tiene que dividir al máximo común divisor, o sea, a 1, y ningún primo divide a 1. Por lo tanto, p debe dividir a 2.

Este análisis indica que el único divisor primo que puede tener d es 2. Sin embargo, 4 no puede dividir a d, pues en ese caso $4|2a$ y $4|2b$, por lo que $2|a$ y $2|b$, y de nuevo contradiría el hecho de que a y b son coprimos.

En conclusión, el máximo valor que puede tener d es 2 (que ocurre si tanto a como b son impares).

6. En la figura P y Q son los centros de las circunferencias tangentes S_1 y S_2, la recta $\overleftrightarrow{PQ}$ corta la circunferencia S_1 en A y el radio $\overline{QB}$ es perpendicular a $\overline{PQ}$. Si la suma de las áreas de los círculos es 10π y el área del $\triangle AQB$ es 8, determine la longitud de $\overline{PB}$.



(a) $\sqrt{40}$

(b) $\sqrt{26}$

(c) 5

(d) 6

Solución:

Respuesta correcta: Opción b)

Sean r y R los radios de S_1 y S_2 respectivamente. Como $\pi r^2 + \pi R^2 = 10$, tenemos que $R^2 + r^2 = 10$. Además $(AQB) = 8 \Longrightarrow \dfrac{R(R+2r)}{2} = 8$, por lo que $(2r+R)R = 16$.

Por otra parte, aplicando el Teorema de Pitágoras en $\triangle PBQ$

$$PB = \sqrt{(r+R)^2 + R^2} = \sqrt{r^2 + 2rR + R^2 + R^2} = \sqrt{(r^2+R^2) + (2r+R)R} = \sqrt{26}$$

7. La cantidad de soluciones (x, n), donde ambos son enteros positivos y n es par, de la ecuación $x^2 + 7 = 2^n$ es

   (a) 1

   (b) 2

   (c) 3

   (d) 0

   Solución:

   Respuesta correcta: Opción $a)$

   Sea $n = 2k$, con k entero positivo. Entonces,

$$x^2 + 7 = 2^{2k} \Rightarrow$$

$$7 = 2^{2k} - x^2 \Rightarrow$$

$$7 = (2^k - x)(2^k + x).$$

   Como 7 es primo, y $2^k + x$ es positivo, entonces la única opción es $1 = 2^k - x$ y $7 = 2^k + x$ (pues $2^k + x > 2^k - x$). Sumando ambas ecuaciones tenemos que $8 = 2^{k+1}$, por lo que $k = 2$. En consecuencia, $x = 3$. Por lo tanto, solo hay una solución, a saber, $(x, n) = (3, 4)$.

8. Sean x_1 y x_2 dos números reales tales que $x_1 \neq x_2$, $3x_1^2 - hx_1 = a$ y $3x_2^2 - hx_2 = a$, con $a > 0$. Una expresión equivalente a $x_1 + x_2$ es

   a) $\frac{a}{3}$

   b) $\frac{h}{3}$

   c) $\frac{-a}{3}$

   d) $\frac{-h}{3}$

   Solución:

   Respuesta correcta: Opción $b)$

   Al considerar la ecuación $3x_1^2 - hx_1 = a$ se tiene que $3x_1^2 - hx_1 - a = 0$. Luego, con base en la fórmula general, se tiene que: $x_1 = \dfrac{-(-h) \pm \sqrt{(-h)^2 - 4 \cdot 3 \cdot (-a)}}{2 \cdot 3} = \dfrac{h \pm \sqrt{h^2 + 12a}}{6}$.

En forma análoga, para la ecuación $3x_2^2 - hx_2 = a$ se tiene que $x_2 = \dfrac{h \pm \sqrt{h^2+12a}}{6}$.

Como $x_1 \neq x_2$, si $x_1 = \dfrac{h + \sqrt{h^2+12a}}{6}$ entonces $x_2 = \dfrac{h - \sqrt{h^2+12a}}{6}$.

Así, $x_1 + x_2 = \dfrac{h + \sqrt{h^2+12a}}{6} + \dfrac{h - \sqrt{h^2+12a}}{6} = \dfrac{2h}{6} = \dfrac{h}{3}$.

Otra solución:

$$\begin{aligned}
3x_1^2 - hx_1 = a\ ,\ 3x_2^2 - hx_2 = a \quad &\Longrightarrow \quad 3x_1^2 - hx_1 = 3x_2^2 - hx_2 \\
&\Longrightarrow \quad 3x_1^2 - 3x_2^2 = hx_1 - hx_2 \\
&\Longrightarrow \quad 3(x_1^2 - x_2^2) = h(x_1 - x_2) \\
&\Longrightarrow \quad 3(x_1 - x_2)(x_1 + x_2) = h(x_1 - x_2) \\
&\Longrightarrow \quad 3(x_1 + x_2) = h \\
&\Longrightarrow \quad (x_1 + x_2) = \frac{h}{3}
\end{aligned}$$

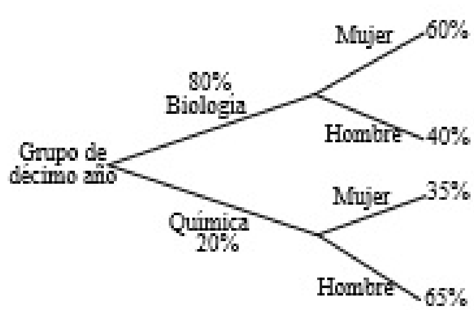
9. En cierto colegio los estudiantes de décimo año pueden optar por cursar como ciencia natural entre biología o química. En uno de los grupos de décimo, 80 % de los estudiantes estudia biología y el resto química; 40 % de los que estudian biología son hombres y, de los que estudian química, 35 % son mujeres. Si se selecciona al azar un estudiante de este grupo de décimo año, la probabilidad de que sea mujer es

   a) 0,39
   b) 0,45
   c) 0,55
   d) 0,61

   Solución:

   Respuesta correcta: Opción *c*)

   Lo descrito en el problema se puede modelar de la manera siguiente:



   De acuerdo con la representación anterior, la probabilidad de que el estudiante seleccionado sea mujer es $(0{,}8) \cdot (0{,}6) + (0{,}2) \cdot (0{,}35) = 0{,}55$.

10. Dado el cuadrado $\square ABCD$ de lado 2 y una semicircunferencia de diámetro $\overline{AD}$ que está contenida en él. Sea E un punto tal que $A-E-B$ y $\overline{CE}$ es tangente a la semi-circunferencia, determine el área del $\triangle CBE$

    (a) 1

    (b) $\frac{3}{2}$

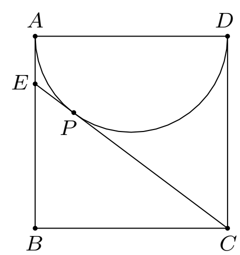
    (c) 2

    (d) $\frac{5}{2}$

    Solución:

    Respuesta correcta: Opción b)

    Considere la figura siguiente en donde P es el punto de tangencia de $\overline{EC}$ con la semi-circunferencia.



$AE = PE$ por ser tangentes desde un punto externo, sea $AE = PE = x$.

$DC = PC$ por ser tangentes desde un punto externo, así$PC = 2$

Entonces $BE = 2 - x$ y $EC = 2 + x$, aplicando Pitágoras al $\triangle EBC$ tenemos que

$$(2-x)^2 + 4 = (2+x)^2 \Rightarrow 4 - 4x + x^2 + 4 = 4 + 4x + x^2 \Rightarrow 4 = 8x \Rightarrow x = \frac{1}{2}$$

Ahora, el área del $\triangle CBE$ viene dada por $\frac{1}{2} \cdot EB \cdot BC$ es decir $\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{2} \cdot 2 = \frac{3}{2}$

11. Si un número entero positivo n tiene exactamente 16 divisores positivos, entonces el producto de esos 16 divisores es

    (a) n^{16}

    (b) n^8

    (c) n^4

    (d) n^2

    Solución:

    Respuesta correcta: Opción b)

Sean $1 = a_1 < a_2 < \cdots, a_{15} < a_{16} = n$ los 16 divisores a estudiar. Note que si a_i es un divisor de n, entonces también n/a_i lo es. O sea, cada divisor tiene una pareja y dicha pareja es única. Note además que $a_1 a_{16} = n$. De igual manera, $a_i a_{17-i} = n$. Entonces

$$\prod_{i=1}^{16} a_i = \prod_{i=1}^{8} n = n^8.$$

12. Si a, b son números reales positivos tales que

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{8}{3},\ a^2 + b^2 = \frac{5}{2},$$

determine el valor de $a \cdot b$

(a) $\frac{3}{8}$

(b) 3

(c) $\frac{3}{4}$

(d) $\frac{8}{3}$

Solución:

Respuesta correcta: Opción c)

$$\begin{aligned}
\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{8}{3} \quad &\Longrightarrow \quad \frac{a+b}{ab} = \frac{8}{3} \\
&\Longrightarrow \quad 3(a+b) = 8ab \\
&\Longrightarrow \quad 9(a+b)^2 = (8ab)^2 \\
&\Longrightarrow \quad 9(a^2 + 2ab + b^2) = 64a^2b^2 \\
&\Longrightarrow \quad 9(\tfrac{5}{2} + 2ab) = 64a^2b^2 \qquad \text{sustituyendo } a^2 + b^2 = \frac{5}{2} \\
&\Longrightarrow \quad \tfrac{45}{2} + 18ab = 64a^2b^2 \\
&\Longrightarrow \quad 45 + 36ab = 128a^2b^2 \\
&\Longrightarrow \quad 0 = 128a^2b^2 - 36ab - 45 \quad \text{resolviendo la cuadrática para } ab \\
&\Longrightarrow \quad ab = \tfrac{3}{4} \ \ o \ \ ab = \tfrac{-15}{32}
\end{aligned}$$

Como a, b son números positivos entonces $ab = \frac{3}{4}$

II Parte: Desarrollo **Valor 21 puntos, 7 pts c/u**

Instrucciones: Los siguientes ejercicios deben ser resueltos en las hojas adicionales que se le entregaron. Conteste en forma ordenada, completa y clara. Se califica procedimientos y respuesta.

1. Rolando dibuja una serie de 2015 figuras con el siguiente orden:

Si selecciona al azar una figura que está en una posición múltiplo de 5, determine la probabilidad de que esta figura sea un pentágono.

Solución:

Observe que hay un:
Triángulo en las posiciones $1, 7, 13, ..., 1 + 6k$
Cuadrado en las posiciones $2, 8, 14, ..., 2 + 6k$ y $6, 12, 18, ..., 0 + 6k$
Pentágono en las posiciones $3, 9, 15, ..., 3 + 6k$ y $5, 11, 17, ..., 5 + 6k$
Hexágono en las posiciones $4, 10, 16, ..., 4 + 6k$

De esto se puede deducir también que, si se toma un número de la secuencia y se divide por 6, la figura que esté en esa posición quedará determinada por el residuo de esta división de la siguiente manera:

Residuo	*Figura*
0	*Cuadrado*
1	*Triangulo*
2	*Cuadrado*
3	*Pentagono*
4	*Hexagono*
5	*Pentagono*

Tomando esto en cuenta se puede observar un periodo en las figuras obtenidas, debido al periodo de los residuos:

Numero :	5	10	15	20	25	30	35	40	45	50	55	60
Residuo :	5	4	3	2	1	0	5	4	3	2	1	0
Figura :	*P*	*H*	*P*	*C*	*T*	*C*	*P*	*H*	*P*	*C*	*T*	*C*

Se observa que por cada grupo de 6 múltiplos consecutivos de 5 hay 2 pentágonos

Finalmente, en 2015 números hay 403 múltiplos de 5, que es la cantidad total de casos y $403 = 67 \cdot 6 + 1$, por lo que se tienen en total $67 \cdot 2 + 1 = 135$ pentágonos de esos 403 casos. Por lo tanto la probabilidad buscada es

$$\frac{135}{403}$$

2. Determine todos los cuadrados perfectos de cuatro cifras de la forma $NNMM$

Solución:

El número $NNMM$ se puede factorizar como

$$\begin{aligned} NNMM &= 10^3N + 10^2N + 10M + M \\ &= 1100N + 11M \\ &= 11 \cdot (100N + M) \\ &= 11 \cdot (N0M) \end{aligned}$$

Luego, el número $N0M$ debe ser divisible por 11 y, de acuerdo con la regla de divisibilidad por 11, como N y M son dígitos su suma no supera la cantidad 18 y esta suma menos cero (dígito en posición par) debe ser múltiplo de 11, por lo que se cumple $N + M = 11$.

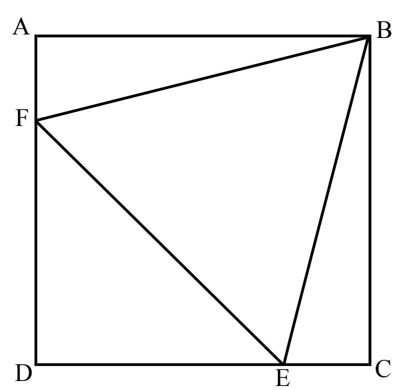
Las únicas posibilidades para que dicha suma se dé son las siguientes:

$$(N, M) \in \{(2, 9), (3, 8), (4, 7), (5, 6), (6, 5), (7, 4), (8, 3), (9, 2)\}$$

Por los que los candidatos serían:
$209 = 11 \cdot 19$, $308 = 11 \cdot 28$, $407 = 11 \cdot 37$, $506 = 11 \cdot 46$, $605 = 11 \cdot 55$, $704 = 11 \cdot 64 = 11 \cdot 8^2$, $803 = 11 \cdot 73$ y $902 = 11 \cdot 82$.

Así, con $N = 7$ y $M = 4$ se obtiene el número $7744 = 11^2 \cdot 8^2$.

3. En la figura adjunta $\square ABCD$ es un cuadrado y ΔBEF es un triángulo equilátero. Si el área del $\square ABCD$ es un metro cuadrado, determine el área del ΔBEF



Solución:

Si $EC = AF = x$, entonces $DF = DE = 1 - x$. Note que $0 < x < 1$.

El área del ΔBEF se obtiene restando al área del $\square ABCD$ las áreas de los triángulos ΔABF, ΔDFE y ΔCEB.

Luego,

$$\begin{aligned} \text{área del } \Delta BEF &= 1 - \frac{x}{2} - \frac{(1-x)^2}{2} - \frac{x}{2} \\ &= \frac{1}{2}\left(2 - x - x - 1 + 2x - x^2\right) \\ &= \frac{1}{2}\left(1 - x^2\right) \end{aligned}$$

Si y denota la medida de cada uno de los lados del ΔBEF, de acuerdo con el teorema de Pitágoras (aplicado a los tres triángulos mencionados anteriormente) se tiene que $x^2+1=y^2=(1-x)^2+(1-x)^2$. De esta manera:

$$\begin{aligned}
& x^2+1=(1-x)^2+(1-x)^2 \\
\Rightarrow\quad & x^2+1=2(1-x)^2 \\
\Rightarrow\quad & x^2+1=2\left(1-2x+x^2\right) \\
\Rightarrow\quad & 0=2-4x+2x^2-x^2-1 \\
\Rightarrow\quad & x^2-4x+1=0 \\
\Rightarrow\quad & x=\frac{4\pm\sqrt{16-4}}{2}=2\pm\sqrt{3}
\end{aligned}$$

De los valores anteriores, x no puede ser $2+\sqrt{3}$ pues $2+\sqrt{3}>1$; así, $x=2-\sqrt{3}$.

$$\begin{aligned}
\text{área del } \Delta BEF &= \frac{1}{2}\left(1-x^2\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(1-\left(2-\sqrt{3}\right)^2\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(-6+4\sqrt{3}\right) \\
&= -3+2\sqrt{3}
\end{aligned}$$