XXVIII OLIMPIADA COSTARRICENSE DE MATEMÁTICA

UNA - UCR - TEC - UNED - MEP - MICITT

SEGUNDA ELIMINATORIA NACIONAL

III Nivel

$10^\circ - 11^\circ - 12^\circ$

2016

Estimado estudiante:

La Comisión Organizadora de las Olimpiadas Costarricenses de Matemáticas le saluda y felicita por haber clasificado a la segunda eliminatoria nacional de estas justas académicas. La prueba consta de dos partes: una primera parte de 12 preguntas de selección única, ponderadas con dos puntos cada respuesta correcta, y una segunda parte con 3 preguntas de desarrollo, con un valor de 7 puntos cada solución correcta.

Los resultados de esta eliminatoria se publicarán a partir del viernes 30 de setiembre, en la siguiente dirección electrónica:

www.olcoma.com

INDICACIONES GENERALES

- Debe trabajar en forma individual.
- Las respuestas a las preguntas que se le formulan, deben ser consignadas ÚNICAMENTE en la hoja de respuestas que se le ha entregado.
- Los dibujos que aparecen en la prueba no están hechos a escala.
- El formulario de preguntas es suyo, por lo que puede realizar en él todas las anotaciones, cálculos o dibujos que le sean necesarios para resolver satisfactoriamente la prueba.
- No se permite el uso de hojas adicionales.
- Los únicos instrumentos cuyo uso se permite son los necesarios para escribir y dibujar. Se prohíbe el uso de libros, libretas de notas, tablas y calculadora.
- El examen tiene una duración máxima de tres horas.
- Escriba claramente los datos que se le solicitan en la hoja de respuestas.

SIMBOLOGÍA

$\overline{AB}$	segmento de extremos A y B	$\angle ABC \cong \angle DEF$	congruencia de ángulos
AB	medida de $\overline{AB}$	$\triangle ABC \cong \triangle DEF$	congruencia de triángulos
$\overrightarrow{AB}$	rayo de extremo A y que contiene a B	$ABC \leftrightarrow DEF$	correspondencia respectiva entre puntos
$\overleftrightarrow{AB}$	recta que contiene los puntos A y B	$\triangle ABC \sim \triangle DEF$	semejanza de triángulos
$\angle ABC$	ángulo de rayos $\overrightarrow{BA}$ y $\overrightarrow{BC}$	$\overline{AB} \cong \overline{CD}$	congruencia de segmentos
$m\angle ABC$	medida de $\angle ABC$	$\widehat{AB}$	arco de extremos A y B
$\triangle ABC$	triángulo de vértices A, B, C	$m\widehat{AB}$	medida de $\widehat{AB}$
$\square ABCD$	cuadrilátero de vértices A, B, C, D	(ABC)	área de ΔABC
$\parallel$	paralelismo	$(ABCD)$	área de $\square ABCD$
$\perp$	perpendicularidad	$P-Q-R$	P, Q, R puntos colineales, con Q entre los puntos P y R

I Parte: Selección única **Valor 24 puntos, 2 pts c/u**

1. Considere la sucesión de números $a_1, a_2, \cdots, a_n, \cdots$ definida por $a_{n+1} = \dfrac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n}$ para $n \geq 2$, con $a_1 = 0$ y $a_2 = 2$. El valor de a_{2016} corresponde a

   (a) $\dfrac{1}{2016}$
   (b) $\dfrac{1}{504}$
   (c) $\dfrac{1}{2}$
   (d) 1

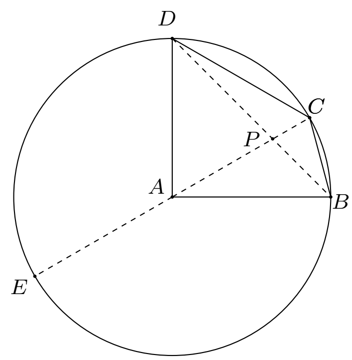
2. Sara, Sofía, Nicole y Jesenia nacieron en los meses de enero, marzo, agosto y diciembre del mismo año aunque no necesariamente en ese orden. Al preguntarles por el mes en que nacieron Sara dice que en enero, Sofía indica que nació en marzo, Nicole responde que Jesenia no nació en agosto y Jesenia contesta que Sofía nació en diciembre. Si solo una de ellas miente, entonces con certeza se cumple que

   (a) Sofía nació en enero
   (b) Jesenia nació en diciembre
   (c) Nicole nació en agosto
   (d) Sara nació en marzo

3. Una urna contiene 10 bolas iguales, excepto por las letras que tienen escritas. Dos de ellas tienen la letra O, dos la A, dos la L, dos la M y dos la C. Si se extraen de forma consecutiva seis bolas de la urna, entonces la probabilidad de que la primera bola contenga la letra O, la segunda la letra L, y así sucesivamente hasta formar la palabra OLCOMA, es

   (a) $\dfrac{1}{4725}$
   (b) $\dfrac{1}{15\,625}$
   (c) $\dfrac{1}{31\,250}$
   (d) $\dfrac{1}{1\,000\,000}$

4. Considere la figura siguiente en la cual A es el centro de la circunferencia y $\overline{CE}$ es un diámetro. Si $m\widehat{ED}$ y $m\widehat{EB}$ están en la razón $4:5$ y $\angle DAB$ es recto, entonces $m\angle DPA$ es



(a) $30°$

(b) $45°$

(c) $60°$

(d) $75°$

5. La cantidad de divisores positivos que tiene el número 100 000 que no son múltiplos de 1000 es

(a) 9
(b) 20
(c) 27
(d) 36

6. Xinia y Yolanda observan la parte más alta de una torre, pero Xinia se encuentra 20 metros atrás de Yolanda. Si el ángulo de elevación de la visual de Xinia es $30°$ y el de Yolanda es $45°$, entonces la altura en metros de la torre es

(a) $\dfrac{20}{\sqrt{3}+1}$

(b) $\dfrac{20}{\sqrt{3}-1}$

(c) $20\sqrt{3}$

(d) $10\sqrt{3}$

7. Considere los puntos $A-B-C-D-E$ de tal manera que $AC \cdot BE = CD + 7BC$, donde $AB = DE = 1$ y CD excede en dos a DE. La medida de $\overline{BC}$ es

   (a) 1

   (b) 2

   (c) 3

   (d) 4

8. La cantidad de números de dos dígitos de la forma ab, donde a y b satisfacen $\dfrac{a}{b} - \dfrac{b}{a} = \dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{b}$, corresponde a

   (a) 5

   (b) 8

   (c) 11

   (d) 13

9. Si en un $\triangle ABC$, $m\angle ABC = 2m\angle ACB$, $AC = 2BC$ y $AB = 4$, entonces BC es

   (a) $\dfrac{1+\sqrt{11}}{2}$

   (b) $\dfrac{1+\sqrt{13}}{2}$

   (c) $\dfrac{1+\sqrt{15}}{2}$

   (d) $\dfrac{1+\sqrt{17}}{2}$

10. Al simplificar $\dfrac{2016 \cdot 2017^2 - 3 \cdot 2016^2}{2016^3 + 1}$ se obtiene

   (a) 1

   (b) $\dfrac{1}{2}$

   (c) $\dfrac{2017}{2016}$

   (d) $\dfrac{2016}{2017}$

11. Si $a \neq b$, $a^3 - b^3 = 19x^3$ y $a - b = x$, el conjunto de todos los posibles valores para a es

   (a) $\{-3x\}$

   (b) $\{-2x\}$

   (c) $\{3x, -2x\}$

   (d) $\{-3x, 2x\}$

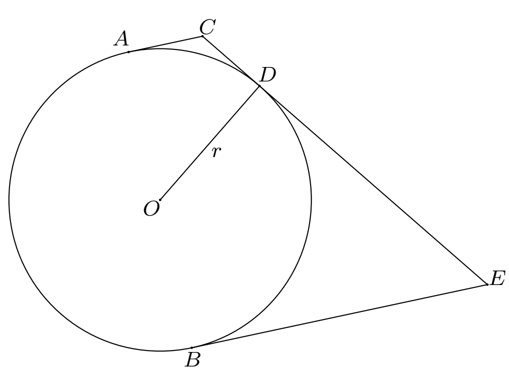
12. En la figura adjunta, $\overline{AC}$ y $\overline{BE}$ son paralelas y tangentes a un círculo de radio r, con A y B los puntos de tangencia. Se sabe que $C - D - E$ y que $\overline{CE}$ es otra tangente a la circunferencia con D el punto de tangencia. Si $AC = 2$ y $BE = 8$, entonces el valor de r es

   (a) 3

   (b) 4

   (c) 5

   (d) 6



II Parte: Desarrollo **Valor 21 puntos, 7 pts c/u**

Instrucciones: Los siguientes ejercicios deben ser resueltos en las hojas adicionales que se le entregaron. Conteste en forma ordenada, completa y clara. Se califica procedimientos y respuesta.

1. Determine la cantidad de divisores no negativos y cuadrados perfectos que tiene el número 1952^{2016}.

2. Determine todos los valores de n, con $n \in \mathbb{N}$, que satisfacen

$$18 + 22 + 26 + 30 + 34 + \cdots + n = 2016$$

3. Un automóvil tiene un precio A en dólares, donde A es un entero de cuatro dígitos, escrito con números como los siguientes

Mientras el vendedor se distrae, el comprador gira el rótulo del precio 180° a favor de las manecillas del reloj, y el precio resultante es 1626 dólares menos que el precio original. Determine el valor original del carro.