XXVIII OLIMPIADA COSTARRICENSE DE MATEMÁTICA

UNA - UCR - TEC - UNED - MEP - MICITT

SOLUCIÓN
SEGUNDA ELIMINATORIA NACIONAL

III Nivel

$10^\circ - 11^\circ - 12^\circ$

2016

Estimado estudiante:

La Comisión Organizadora de las Olimpiadas Costarricenses de Matemáticas le saluda y felicita por haber clasificado a la segunda eliminatoria nacional de estas justas académicas. La prueba consta de dos partes: una primera parte de 12 preguntas de selección única, ponderadas con dos puntos cada respuesta correcta, y una segunda parte con 3 preguntas de desarrollo, con un valor de 7 puntos cada solución correcta.

Los resultados de esta eliminatoria se publicarán a partir del viernes 30 de setiembre, en la siguiente dirección electrónica:

www.olcoma.com

INDICACIONES GENERALES

- Debe trabajar en forma individual.
- Las respuestas a las preguntas que se le formulan, deben ser consignadas ÚNICAMENTE en la hoja de respuestas que se le ha entregado.
- Los dibujos que aparecen en la prueba no están hechos a escala.
- El formulario de preguntas es suyo, por lo que puede realizar en él todas las anotaciones, cálculos o dibujos que le sean necesarios para resolver satisfactoriamente la prueba.
- No se permite el uso de hojas adicionales.
- Los únicos instrumentos cuyo uso se permite son los necesarios para escribir y dibujar. Se prohíbe el uso de libros, libretas de notas, tablas y calculadora.
- El examen tiene una duración máxima de tres horas.
- Escriba claramente los datos que se le solicitan en la hoja de respuestas.

SIMBOLOGÍA

$\overline{AB}$	segmento de extremos A y B	$\angle ABC \cong \angle DEF$	congruencia de ángulos
AB	medida de $\overline{AB}$	$\triangle ABC \cong \triangle DEF$	congruencia de triángulos
$\overrightarrow{AB}$	rayo de extremo A y que contiene a B	$ABC \leftrightarrow DEF$	correspondencia respectiva entre puntos
$\overleftrightarrow{AB}$	recta que contiene los puntos A y B	$\triangle ABC \sim \triangle DEF$	semejanza de triángulos
$\angle ABC$	ángulo de rayos $\overrightarrow{BA}$ y $\overrightarrow{BC}$	$\overline{AB} \cong \overline{CD}$	congruencia de segmentos
$m\angle ABC$	medida de $\angle ABC$	$\widehat{AB}$	arco de extremos A y B
$\triangle ABC$	triángulo de vértices A, B, C	$m\widehat{AB}$	medida de $\widehat{AB}$
$\square ABCD$	cuadrilátero de vértices A, B, C, D	(ABC)	área de ΔABC
$\parallel$	paralelismo	$(ABCD)$	área de $\square ABCD$
$\perp$	perpendicularidad	$P-Q-R$	P, Q, R puntos colineales, con Q entre los puntos P y R

I Parte: Selección única **Valor 24 puntos, 2 pts c/u**

1. Considere la sucesión de números $a_1, a_2, \cdots, a_n, \cdots$ definida por $a_{n+1} = \dfrac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n}$ para $n \geq 2$, con $a_1 = 0$ y $a_2 = 2$. El valor de a_{2016} corresponde a

   (a) $\dfrac{1}{2016}$

   (b) $\dfrac{1}{504}$

   (c) $\dfrac{1}{2}$

   (d) 1

- Opción correcta: (d)
- Solución:
  Se tiene $a_1 = 0$ y $a_2 = 2$, los demás elementos de la sucesión son

$$
\begin{array}{lcccc}
a_3 & = & \dfrac{0+2}{2} & = & 1 \\[2ex]
a_4 & = & \dfrac{0+2+1}{3} & = & 1 \\[2ex]
a_5 & = & \dfrac{0+2+1+1}{4} & = & 1 \\[2ex]
a_6 & = & \dfrac{0+2+1+1+1}{5} & = & 1 \\[2ex]
\vdots & & \vdots & & \\[2ex]
a_{n+1} & = & \dfrac{0+2+\overbrace{1+\cdots+1}^{n-2}}{n} & = & 1 \\[2ex]
\vdots & & \vdots & &
\end{array}
$$

  Por lo tanto $a_3 = a_4 = \cdots = a_{2016} = 1$, entonces $a_{2016} = a_{504} = 1$

2. Sara, Sofía, Nicole y Jesenia nacieron en los meses de enero, marzo, agosto y diciembre del mismo año aunque no necesariamente en ese orden. Al preguntarles por el mes en que nacieron Sara dice que en enero, Sofía indica que nació en marzo, Nicole responde que Jesenia no nació en agosto y Jesenia contesta que Sofía nació en diciembre. Si solo una de ellas miente, entonces con certeza se cumple que

(a) Sofía nació en enero
(b) Jesenia nació en diciembre
(c) Nicole nació en agosto
(d) Sara nació en marzo

- Opción correcta: (c)
- Solución:

  Según los datos del problema las únicas que pueden mentir son Sofía o Jesenia, pues si dicen la verdad, Sofía nacería en dos meses distintos.

  - Si Sofía miente entonces los meses en que nacieron Sara, Sofía, Nicole y Jesenia son respectivamente enero, diciembre, agosto y marzo.
  - Si Jesenia miente entonces los meses en que nacieron Sara, Sofía, Nicole y Jesenia son respectivamente enero, marzo, agosto y diciembre.

  En cualquiera de los dos casos Nicole nació en agosto.

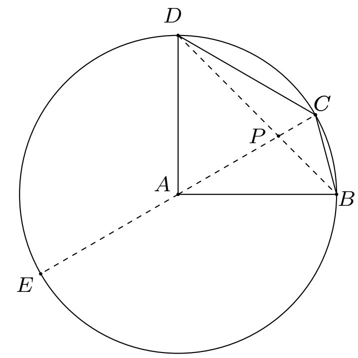
3. Una urna contiene 10 bolas iguales, excepto por las letras que tienen escritas. Dos de ellas tienen la letra O, dos la A, dos la L, dos la M y dos la C. Si se extraen de forma consecutiva seis bolas de la urna, entonces la probabilidad de que la primera bola contenga la letra O, la segunda la letra L, y así sucesivamente hasta formar la palabra OLCOMA, es

(a) $\dfrac{1}{4725}$
(b) $\dfrac{1}{15\,625}$
(c) $\dfrac{1}{31\,250}$
(d) $\dfrac{1}{1\,000\,000}$

- Opción correcta: (a)
- Solución:

  En este caso la extracción se realiza sin reposición, por lo que cada vez que se saca una bola de la urna el total de bolas que quedan disminuye en una unidad. Debido a esto la probabilidad de extraer seis bolas y formar la palabra OLCOMA es: $\dfrac{2}{10}\cdot\dfrac{2}{9}\cdot\dfrac{2}{8}\cdot\dfrac{1}{7}\cdot\dfrac{2}{6}\cdot\dfrac{2}{5}=\dfrac{1}{4725}$

4. Considere la figura siguiente en la cual A es el centro de la circunferencia y $\overline{CE}$ es un diámetro. Si $m\widehat{ED}$ y $m\widehat{EB}$ están en la razón $4:5$ y $\angle DAB$ es recto, entonces $m\angle DPA$ es



(a) 30°

(b) 45°

(c) 60°

(d) 75°

- Opción correcta: (d)
- Solución:

  De la razón dada tenemos que $4x+5x = 270°$, asi se tiene que $x = 30°$ y en entonces $m\widehat{BD} = 120°$, de donde $m\angle DCE = 60°$ y entonces $\triangle ADC$ es equilátero y así $m\angle ADC = 60°$. De aquí se tiene que $m\widehat{DC} = 60°$ por ser un ángulo central.

  Entonces $m\widehat{DCB} = m\widehat{DC} + \widehat{BC}$ y así $m\widehat{BC} = 30°$.
  De lo anterior $m\angle BDC = 15°$ por ser ángulo semi-inscrito, y por teorema del ángulo externo $m\angle DPA = 75°$.

5. La cantidad de divisores positivos que tiene el número 100 000 que no son múltiplos de 1000 es

   (a) 9

   (b) 20

   (c) 27

   (d) 36

- Opción correcta: (c)
- Solución:

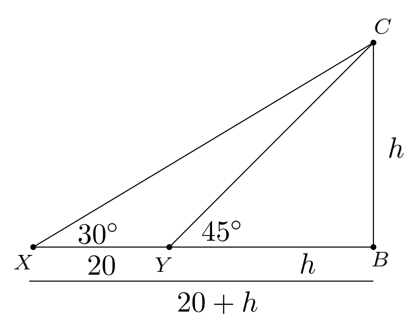
  Dado que $100\,000 = 2^5 \cdot 5^5$ se tiene que 100 000 tiene $6 \times 6 = 36$ divisores positivos. Por otra parte los divisores de 100 000 que son múltiplos de 1000 son de la forma $2^\alpha \cdot 5^\beta$ donde $3 \leq \alpha \leq 5$ y $3 \leq \beta \leq 5$. En total hay 9 divisores que cumplen esta condición. Por lo tanto hay $36 - 9 = 27$ divisores de 100 000 que no son múltiplos de 1000.

6. Xinia y Yolanda observan la parte más alta de una torre, pero Xinia se encuentra 20 metros atrás de Yolanda. Si el ángulo de elevación de la visual de Xinia es 30° y el de Yolanda es 45°, entonces la altura en metros de la torre es

   (a) $\dfrac{20}{\sqrt{3}+1}$
   (b) $\dfrac{20}{\sqrt{3}-1}$
   (c) $20\sqrt{3}$
   (d) $10\sqrt{3}$

- Opción correcta: (b)
- Solución:

  Consideremos la siguiente figura



$\triangle CBY$ es isósceles, por lo que $BC = YB = h$.
$\triangle CBX$ es semiequilátero, por lo que $BX = \sqrt{3}h$

Entonces

$$20 + h = \sqrt{3}h \Rightarrow h = \frac{20}{\sqrt{3}-1}$$

7. Considere los puntos $A-B-C-D-E$ de tal manera que $AC \cdot BE = CD + 7BC$, donde $AB = DE = 1$ y CD excede en dos a DE. La medida de $\overline{BC}$ es

   (a) 1
   (b) 2
   (c) 3
   (d) 4

- Opción correcta: (a)

- Solución:

  Se tiene que $A-B-C-D-E$, entonces por la definión de estar entre, la igualdad dada se puede expresar de la siguiente manera:

$$(AB+BC)\cdot(BC+CD+DE)=CD+7BC$$

  Sea $BC=x$. Como $AB=DE=1$ y $CD=DE+2=3$, entonces la igualdad se expresa de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} (1+x)\,(x+4) &= 3+7x \\ \Rightarrow\quad x+4+x^2+4x &= 3+7x \\ \Rightarrow\quad x^2-2x+1 &= 0 \\ \Rightarrow\quad (x-1)\,(x-1) &= 0 \\ \Rightarrow\quad x &= 1 \end{aligned}$$

  $\therefore BC=1$

8. La cantidad de números de dos dígitos de la forma ab, donde a y b satisfacen $\dfrac{a}{b}-\dfrac{b}{a}=\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}$, corresponde a

   (a) 5
   (b) 8
   (c) 11
   (d) 13

- Opción correcta: (b)
- Solución:

  De acuerdo a la condición dada, a y b son diferente de cero, entonces se tiene:

$$\begin{aligned} \frac{a}{b}-\frac{b}{a} &= \frac{1}{a}+\frac{1}{b} \\ \frac{a^2-b^2}{ba} &= \frac{b+a}{ab} \\ a^2-b^2 &= b+a \\ (a-b)(a+b) &= b+a \\ a-b &= 1 \\ a &= b+1 \end{aligned}$$

  Para que la igualda se cumpla, a tiene que tomar valores entre 2 y 9, se tiene que

- Si $a = 2$ entonces $b = 1$
- Si $a = 3$ entonces $b = 2$
- Si $a = 4$ entonces $b = 3$
- Si $a = 5$ entonces $b = 4$
- Si $a = 6$ entonces $b = 5$
- Si $a = 7$ entonces $b = 6$
- Si $a = 8$ entonces $b = 7$
- Si $a = 9$ entonces $b = 8$

Los números encontrados son: 21, 32, 43, 54, 65, 76, 87, 98. Por lo tanto, la cantidad de números son 8.

9. Si en un $\triangle ABC$, $m\angle ABC = 2m\angle ACB$, $AC = 2BC$ y $AB = 4$, entonces BC es

   (a) $\dfrac{1+\sqrt{11}}{2}$

   (b) $\dfrac{1+\sqrt{13}}{2}$

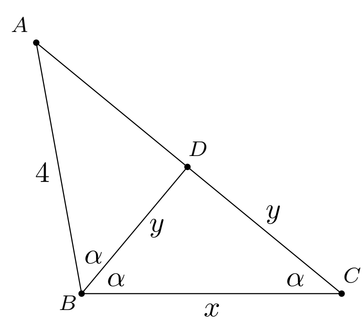
   (c) $\dfrac{1+\sqrt{15}}{2}$

   (d) $\dfrac{1+\sqrt{17}}{2}$

- Opción correcta: (d)
- Solución:

  Sea $x = BC$, $\alpha = m\angle ACB$ y D la intersección de la bisectriz de $\angle ABC$ con $\overline{AC}$. Llamemos $y = CD$

  Vemos que $\triangle BDC$ es isósceles, por lo que $BD = y$. Además $\triangle ABD \sim \triangle ACB$, pues comparten el ángulo A y tienen un ángulo de medida α.



Por la semejanza se tiene que

$\dfrac{AB}{AC} = \dfrac{BD}{CB} = \dfrac{AD}{AB}$ de donde $\dfrac{4}{2x} = \dfrac{y}{x} = \dfrac{2x-y}{4}$

Entonces, $\dfrac{4}{2x} = \dfrac{y}{x} \Rightarrow y = 2$

Por lo tanto $\dfrac{4}{2x} = \dfrac{2x-y}{4} \Rightarrow \dfrac{2}{x} = \dfrac{2x-2}{4} \Rightarrow x^2 - x - 4 = 0$

Resolviendo esta ecuación se tiene $x = \dfrac{1+\sqrt{17}}{2}$

10. Al simplificar $\dfrac{2016 \cdot 2017^2 - 3 \cdot 2016^2}{2016^3+1}$ se obtiene

    (a) 1
    (b) $\dfrac{1}{2}$
    (c) $\dfrac{2017}{2016}$
    (d) $\dfrac{2016}{2017}$

- Opción correcta: (d)
- Solución:

$$\begin{aligned}
\frac{2016 \cdot 2017^2 - 3 \cdot 2016^2}{2016^3+1} &= \frac{2016 \cdot (2016+1)^2 - 3 \cdot 2016^2}{2016^3+1} \\
&= \frac{2016\left[(2016+1)^2 - 3 \cdot 2016\right]}{2016^3+1} \\
&= \frac{2016\left[2016^2 + 2 \cdot 2016 + 1 - 3 \cdot 2016\right]}{(2016+1)(2016^2-2016+1)} \\
&= \frac{2016\left[2016^2 - 2016 + 1\right]}{(2016+1)(2016^2-2016+1)} \\
&= \frac{2016}{2017}
\end{aligned}$$

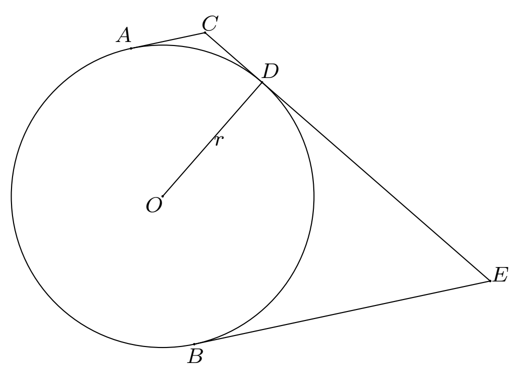
11. Si $a \neq b$, $a^3 - b^3 = 19x^3$ y $a - b = x$, el conjunto de todos los posibles valores para a es

    (a) $\{-3x\}$
    (b) $\{-2x\}$
    (c) $\{3x, -2x\}$
    (d) $\{-3x, 2x\}$

- Opción correcta: (c)
- Solución:

$$
\begin{aligned}
a^3-b^3=19x^3 &\Rightarrow (a-b)\left(a^2+ab+b^2\right)=19x^3\\
&\Rightarrow x\left(a^2+ab+b^2\right)=19x^3\\
&\Rightarrow a^2+ab+b^2=19x^2\\
&\Rightarrow a^2+a(a-x)+(a-x)^2=19x^2\\
&\Rightarrow a^2+a^2-ax+a^2-2ax+x^2=19x^2\\
&\Rightarrow 3a^2-3ax-18x^2=0\\
&\Rightarrow 3\left(a^2-ax-6x^2\right)=0\\
&\Rightarrow 3(a-3x)(a+2x)=0\\
&\Rightarrow a=3x \vee a=-2x
\end{aligned}
$$

12. En la figura adjunta, $\overline{AC}$ y $\overline{BE}$ son paralelas y tangentes a un círculo de radio r, con A y B los puntos de tangencia. Se sabe que $C-D-E$ y que $\overline{CE}$ es otra tangente a la circunferencia con D el punto de tangencia. Si $AC=2$ y $BE=8$, entonces el valor de r es
    (a) 3
    (b) 4
    (c) 5
    (d) 6

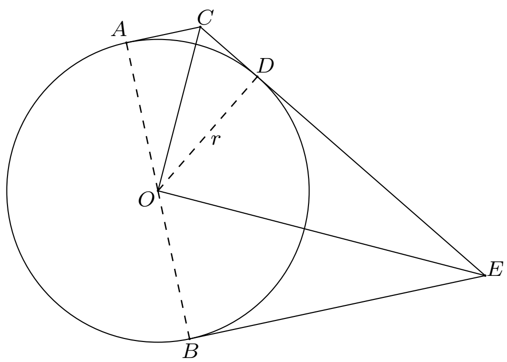


- Opción correcta: (b)
- Solución:

  Dado que $AC=DC=2$, $OA=OD=r$ y $m\angle ODC=m\angle OAC=90°$, entonces $\triangle OAC\cong\triangle ODC$. En forma similar, $BE=DE=8$, $OD=OB=r$ y $m\angle ODE=m\angle OBE=90°$ por lo que $\triangle ODE\cong\triangle OBE$.

Note que $\overline{AB}$ es un diámetro de la circunferencia pues $\overline{AC} \parallel \overline{BE}$ y ambos segmentos son tangentes en A y B, respectivamente, a la circunferencia.

Si se definen $\alpha = m\angle AOC = m\angle DOC$ y $\beta = m\angle DOE = m\angle BOE$ se cumple que $2\alpha + 2\beta = 180^\circ \Rightarrow \alpha + \beta = 90^\circ = m\angle COE$.



De lo anterior se concluye que $\triangle COE$ es un triángulo rectángulo, recto en O, donde $\overline{OD}$ es su altura correspondiente con el vértice O. Dado que $\triangle ODC \sim \triangle EOC \sim \triangle EDO \Rightarrow \triangle ODC \sim \triangle EDO$, se tiene que $\dfrac{OD}{ED} = \dfrac{DC}{DO} \Rightarrow \dfrac{r}{8} = \dfrac{2}{r} \Rightarrow r^2 = 16 \Rightarrow r = 4$.

II Parte: Desarrollo **Valor 21 puntos, 7 pts c/u**

Instrucciones: Los siguientes ejercicios deben ser resueltos en las hojas adicionales que se le entregaron. Conteste en forma ordenada, completa y clara. Se califica procedimientos y respuesta.

1. Determine la cantidad de divisores no negativos y cuadrados perfectos que tiene el número 1952^{2016}.

   Solución

   $1952 = 2^5 \cdot 61$.

   Un número cuadrado perfecto que divida a 1952^{2016} es de la forma $2^a \cdot 61^b$ donde a y b son enteros pares no negativos que cumplen que $0 \leq a \leq 5 \cdot 2016$ y $0 \leq b \leq 2016$.

   Dado que entre 0 y $5 \cdot 2016$ hay $\dfrac{5 \cdot 2016}{2} + 1 = 5041$ números pares, se tiene que a puede tomar 5041 valores distintos. Por otra parte b puede tomar $\dfrac{2016}{2} + 1 = 1009$ valores distintos. Por lo tanto hay en total $5041 \cdot 1009 = 5\,086\,369$ divisores de 1952^{2016} que son cuadrados perfectos.

2. Determine todos los valores de n, con $n \in \mathbb{N}$, que satisfacen

$$18 + 22 + 26 + 30 + 34 + \cdots + n = 2016$$

   Solución : La expresión la podemos escribir como:

$$18 + (18 + 4 \cdot 1) + (18 + 4 \cdot 2) + \cdots + (18 + 4 \cdot k) = 2016$$

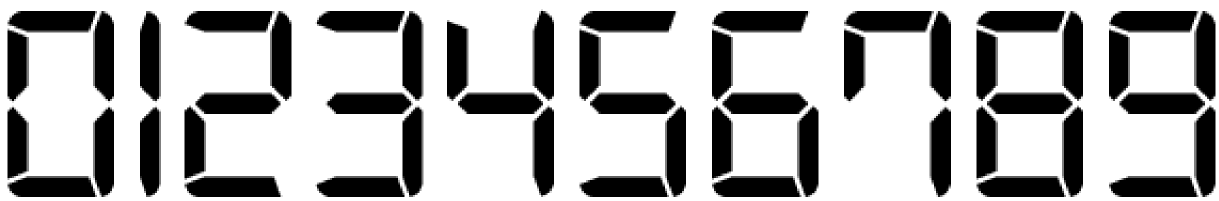
   donde $n = 18 + 4k$, para algún $k \in \mathbb{N}$.

   Entonces

$$\begin{aligned}
18 + (18 + 4 \cdot 1) + (18 + 4 \cdot 2) + \cdots + (18 + 4 \cdot k) = 2016 \quad &\Rightarrow \quad 18(k+1) + 4(1 + 2 + 3 + \cdots k) = 2016 \\
&\Rightarrow \quad 18(k+1) + 4\frac{k(k+1)}{2} = 2016 \\
&\Rightarrow \quad 18k + 18 + 2k^2 + 2k = 2016 \\
&\Rightarrow \quad 2k^2 + 20k - 1998 = 0 \\
&\Rightarrow \quad k^2 + 10k - 999 = 0 \\
&\Rightarrow \quad (k - 27)(k + 37) = 0 \\
&\Rightarrow \quad k = 27 \;\; o \;\; k = -37 \\
&\Rightarrow \quad k = 27 \;\; \text{pues} \;\; k \in \mathbb{N}
\end{aligned}$$

   Por tanto $k = 27$ y $n = 126$.

3. Un automóvil tiene un precio A en dólares, donde A es un entero de cuatro dígitos, escrito con números como los siguientes



Mientras el vendedor se distrae, el comprador gira el rótulo del precio 180° a favor de las manecillas del reloj, y el precio resultante es 1626 dólares menos que el precio original. Determine el valor original del carro.

- Solución:

Al girarse no todos los números representan un número, veamos el 0, 1, 2, 5, 8 representan el mismo número, el 6 y el 9 se invierten y el 3, 4, 7 no se pueden invertir, es decir el rótulo del precio solo puede contener los números 0, 1, 2, 5, 6, 8, 9.
Sea $ABCD$ el precio original y $XYZW$ el precio luego de girar el rótulo, así
$ABCD - XYWZ = 1126$, entonces y $A - X = 1$, y así,

$A = 9$ y $X = 8 \Rightarrow W = 6$ y $D = 8 \Rightarrow D - W = 2(\uparrow\downarrow)$
$A = 8$ y $X = 6 \Rightarrow W = 8$ y $D = 9 \Rightarrow D - W = 1(\uparrow\downarrow)$
$A = 6$ y $X = 5 \Rightarrow W = 9$ y $D = 5 \Rightarrow D - W = 6(\surd)$
$A = 5$ no es posible
$A = 2$ y $X = 1 \Rightarrow W = 2$ y $D = 1 \Rightarrow D - W = 9(\uparrow\downarrow)$
$A = 2$ y $X = 0 \Rightarrow W = 2$ y $D = 0 \Rightarrow D - W = 8(\uparrow\downarrow)$
$A = 1$ y $X = 0 \Rightarrow W = 1$ y $D = 0 \Rightarrow D - W = 9(\uparrow\downarrow)$

Así tenemos que $C - 1 - z = 2$ y entonces $C - Z = 3$, así

$C = 9$ y $Z = 6 \Rightarrow Y = 6$ y $B = 9 \Rightarrow 6995 - 5669 = 1326(\uparrow\downarrow)$
$C = 8$ y $Z = 5 \Rightarrow Y = 8$ y $B = 5 \Rightarrow 6585 - 5859 = 726(\uparrow\downarrow)$
$C = 6$ no es posible
$C = 5$ y $Z = 2 \Rightarrow Y = 5$ y $B = 2 \Rightarrow 6255 - 5529 = 726(\uparrow\downarrow)$
$C = 2$ y $Z = 9 \Rightarrow Y = 2$ y $B = 6 \Rightarrow 6625 - 5299 = 1326(\uparrow\downarrow)$
$C = 1$ y $Z = 8 \Rightarrow Y = 1$ y $B = 8 \Rightarrow 6815 - 5189 = 1626(\surd)$
$C = 0$ no es posible
Por lo tanto, el precio original es 6815 dólares