XXVI OLIMPIADA COSTARRICENSE DE MATEMÁTICA

*UCR-UNA-ITCR-UNED-MEP-MICIT*

# SEGUNDA ELIMINATORIA NACIONAL

# EXAMEN PRIMER NIVEL SOLUCIONARIO

2014

**I Parte: Selección Única**

1. Si al número de tres dígitos $2m3$ se le suma 326 se obtiene el número con tres dígitos $5n9$, en donde $m$ y $n$ son dígitos. Si $5n9$ es divisible por 9 entonces el valor de $m+n$ es igual a

   (a) 2
   (b) 6
   (c) 8
   (d) 9

**Solución**

Note que $0 \leq n \leq 9$. Como $5n9$ es divisible por 9 entonces

$$\frac{5n9}{9} = \frac{5 \cdot 10^2 + 10n + 9}{9} = 10 \cdot \frac{50+n}{9} + 1$$

es un entero y así $\dfrac{50+n}{9}$ es un entero con lo cual $n = 4$ y
como $2m3 = 5n9 - 326 = 549 - 326 = 223$ entonces $m = 2$ y $m + n = 6$.

**Respuesta correcta: Opción b.**

2. Si Lorena posee 560 colones para comprar tres tipos diferentes de frutas cuyos precios son de 70, 30 y 10 colones la unidad. Si ella desea comprar la menor cantidad de frutas, pero tener al menos una de cada precio. Entonces la cantidad de frutas que debe comprar Lorena corresponde a

   (a) 8
   (b) 9
   (c) 10
   (d) 11

**Solución**

Lorena debe de realizar la compra de frutas de la siguiente manera:
7 frutas de 70 colones.
2 frutas de 30 colones.
1 fruta de 10 colones.

Por lo tanto la menor cantidad de frutas que debe comprar Lorena es 10 frutas.

**Respuesta correcta: Opción c.**

3. Considere tres puntos no colineales $A, B, C$ y seis rectas distintas en el mismo plano tal que cada recta contiene al menos uno de los puntos $A, B, C$. El mínimo número de puntos de intersección entre estas rectas es

   (a) 4
   (b) 5
   (c) 6
   (d) 7

**Solución**

Sean $l_1 = \overleftrightarrow{AB}$, $l_2 = \overleftrightarrow{BC}$, $l_3 = \overleftrightarrow{AC}$, $l_4 \parallel l_3$ tal que $B \in l_4$, $l_5 \parallel l_2$ tal que $A \in l_5$. Llamemos $D$ el punto de intersección de $l_5$ y $l_4$ y sea $l_6 = \overleftrightarrow{CD}$. Las rectas $l_6$ y $l_1$ se intersecan en un quinto punto. Tenemos así seis rectas con cinco puntos de intersección.

**Respuesta correcta: Opción b.**

4. La suma de todos los divisores positivos del máximo común divisor de 1 800 y 924 es

   (a) 12
   (b) 15
   (c) 27
   (d) 28

**Solución**

El máximo común divisor de 1800 y 924 es 12. Los divisores positivos de 12 son $1, 2, 3, 4, 6, 12$. La suma de ellos es 28.

**Respuesta correcta: Opción d.**

5. Dos relojes digitales se sincronizan a las 13:00. A partir de este momento uno se adelanta 5 minutos cada hora mientras que el otro se atrasa 10 minutos cada hora. ¿Cuántas horas después marcarán la misma hora?

   (a) 4
   (b) 24
   (c) 48
   (d) 96

**Solución**

En una hora los dos relojes tienen 15 minutos de diferencia, en consecuencia cada cuatro horas tienen una hora de diferencia. Los dos relojes marcarán la misma hora cuando tengan 24 horas de diferencia y esto ocurre $4 \cdot 24 = 96$ horas después.

**Respuesta correcta: Opción d.**

6. Si 17 trabajadores en 48 días hacen un drenaje de $24\,m$ de largo por $6,9\,m$ de ancho y $2\,m$ de profundidad, trabajando 8 horas diarias, entonces ¿Cuántas horas diarias deben trabajar 36 trabajadores para construir en 17 días un drenaje de $23\,m$ de largo por $7,2\,m$ de ancho y $2,25\,m$ de profundidad?

   (a) $\dfrac{16}{3}$
   (b) $\dfrac{15}{2}$
   (c) 10
   (d) 12

**Solución**

Para resolver el problema se puede construir una tabla como la siguiente en la cual se presentan los datos del problema.

| **Trabajadores** | **Duración** | **Largo** | **ancho** | **Profundidad** | **Horas diarias** |
|---|---|---|---|---|---|
| 17 | 48 | 24 | 6,9 | 2 | 8 |
| 36 | 17 | 23 | 7,2 | 2,25 | $x$ |

Además hay que tomar en cuenta el tipo de proporcionalidad que hay entre las variables. En la siguiente tabla se muestra el tipo de proporcionalidad entre la variable “Horas diarias” y las demás variables.

| **Variable** | **Tipo de proporcionalidad** |
|---|---|
| Trabajadores | Inversa |
| Duración | Inversa |
| Largo | Directa |
| Ancho | Directa |
| Profundidad | Directa |

Por último, aplicando la regla de tres compuesta y tomando en cuenta el tipo de proporcionalidad entre las variables se obtiene $\frac{36}{17}\cdot\frac{17}{48}\cdot\frac{24}{23}\cdot\frac{6,9}{7,2}\cdot\frac{2}{2,25} = \frac{8}{x} \Rightarrow \frac{2}{3}=\frac{8}{x} \Rightarrow x=12$

**Respuesta correcta: Opción d.**

7. Sea $\triangle ABC$ un triángulo isósceles de 300 cm de perímetro. Si $AB = 2\cdot BC$, entonces la medida en centímetros de $AC$ es

   (a) 60
   (b) 75
   (c) 120
   (d) 150

**Solución**

Sea $AC = x$, como $AB = 2\cdot BC$ y $\triangle ABC$ es isósceles hay dos posibilidades $BC = x$ o $AB = x$. Si $BC = x$, entonces $AB = 2x$ y $AC + BC = AB$ lo que contradice la desigualdad triangular ($AC + BC > AB$). Así, $AB = x$ y $BC = \frac{x}{2}$, por lo que $AC + BC + AB = 300$ y entonces $x + x + \frac{x}{2} = 300$ y $x = 120$.

**Respuesta correcta: Opción d.**

8. Una piscina contiene agua con 6 300 gramos de cloro disuelto. Luego se agregan 10 litros de agua pura. Cuando se encuentren completamente diluidos, se extraen 10 litros de agua y se observa que ésta tiene 1,75 gramos de cloro. Entonces la cantidad de litros de agua que tenía inicialmente la piscina corresponde

   (a) 3590
   (b) 3600
   (c) 35990
   (d) 36000

**Solución**

Sea $x$ el volumen del tanque, la proporción del cloro en los 10 litros que se extraen coincide con la del agua del tanque, es decir, $\frac{x+10}{6300} = \frac{10}{1,75} \Rightarrow x + 10 = \frac{63000}{1,75} \Rightarrow x = 35990$.

**Respuesta correcta: Opción c.**

9. Se colocan seis bolas numeradas de 1 a 6 en un sombrero y se extraen dos de ellas al azar. La probabilidad de que la diferencia entre los números de las dos bolas sea 1 corresponde a

   (a) $\frac{1}{6}$
   (b) $\frac{1}{5}$
   (c) $\frac{1}{3}$
   (d) $\frac{11}{30}$

**Solución**

El número de formas en que se pueden escoger las dos bolas es $\binom{6}{2} = 15$. Para que la diferencia entre los números sea 1, las únicas parejas son $\{1,2\}, \{2,3\}, \{3,4\}, \{4,5\}, \{5,6\}$ por lo que la probalibilidad es $\frac{5}{15} = \frac{1}{3}$.

**Respuesta correcta: Opción c.**

10. Dados cuatro números primos distintos, si se sabe:

   I) La diferencia entre el mayor y el menor es 18.
   II) La suma de los cuatro números es 76.

   Entonces el resultado de la suma del mayor y menor de los cuatro números es

   (a) 16
   (b) 24
   (c) 36
   (d) 40

**Solución**

De las dos condiciones se tiene que los números buscados son 11, 17, 19 y 29 por lo que la suma del mayor y menor de los cuatro números es 40.

**Respuesta correcta: Opción d.**

11. En una tienda de deportes se puede comprar una camiseta o una gorra o una bufanda de la selección nacional por 10 000 colones, y un balón o unos tacos o unos guantes por 20 000 colones. Si dispongo de 30 000 colones, la cantidad de maneras en que puedo gastar la totalidad de mi dinero sin repetir artículos es

   (a) 6
   (b) 9
   (c) 10
   (d) 12

**Solución**

Por cada artículo de 10 000 colones tengo tres opciones en artículos de 20 000 colones, es decir 9 formas. También se pueden comprar los ntres artículos de 10 000 colones, por lo cual hay 10 formas diferentes de gastar mi dinero sin repetir artículos.

**Respuesta correcta: Opción c.**

12. Considere un triángulo $ABC$ en el que $P$ es el punto de intersección de la bisectriz del ángulo $A$ con $\overline{BC}$, $M$ es la intersección de la mediana desde el vértice $B$ con $\overline{CA}$, $K$ es el punto de intersección de los rayos $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{MP}$, $D$ es el punto de intersección del rayo $\overrightarrow{AP}$ y $\overline{CK}$. Si $PC = 2 \cdot BP$ y $AB = BK$ entonces la medida del ángulo $ADK$ es

   (a) 60°
   (b) 70°
   (c) 85°
   (d) 90°

**Solución**

Note que $\overline{CB}$ es mediana en el triángulo $ACK$. Como $PC = 2BP$ entonces $P$ es el baricentro del triángulo $ACK$ y $MK$ que es también mediana del triángulo $ACK$, debe contener el punto $P$. Como $\overline{AD}$ contiene a $P$ entonces es mediana del triángulo $ACK$ y como $\overline{AD}$ biseca el ángulo $A$ entonces $ACK$ es un triángulo isósceles con $AC = AK$ con lo cual $\overline{AD}$ es la altura sobre el lado $CK$ y el ángulo $ADK$ mide 90°.

**Respuesta correcta: Opción d.**

**II Parte: Desarrollo**

**Instrucciones.** Los siguientes ejercicios deben ser resueltos en las hojas adicionales que se le entregaron. Conteste los ejercicios en forma ordenada, completa y clara, se califica procedimiento y respuesta.

1. Juleana, Keilyn, Marianne y Carol son jóvenes de Costa Rica, Holanda, Francia e Italia (no necesariamente en ese orden) que apoyan a sus selecciones en el mundial de Brasil. Se encuentran en Rio de Janeiro y deciden intercambiar las camisetas de sus países, de tal manera que ninguna se queda con la camiseta de su país, si se sabe que:

   - La costarricense no se llama Keilyn.
   - Marianne no se dejó la camiseta de Holanda.
   - Carol se quedó con la camiseta de Francia.
   - Marianne y Carol son europeas.
   - La francesa se dejó la camiseta de Holanda

   Determine de que país es cada joven y que camiseta se dejó.

**Solución**

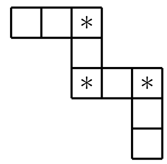
Consideremos la información que nos suministran, lo primero a resaltar es que Carol lleva la camiseta de Francia, entonces no puede ser francesa, ahora como la costarricense no se llama Keilyn y Marianne y Carol son europeas entonces tenemos que Juleana es de Costa Rica y no puede llevar la camiseta de Costa Rica, así tenemos

| **Nombre** | **País** | **Camiseta** |
|---|---|---|
| Juleana | Costa Rica | ? |
| Keilyn | ? | ? |
| Marianne | ? | ? |
| Carol | ? | Francia |

Ahora como Marianne no lleva la camiseta de Holanda así que no puede ser Francesa, entonces Keilyn es francesa y lleva la camiseta de Holanda, y de esta manera la costarricense lleva la camiseta de Italia. Así Marianne es Holandesa y lleva la camiseta de Costa Rica. En resumen:

| **Nombre** | **País** | **Camiseta** |
|---|---|---|
| Juleana | Costa Rica | Italia |
| Keilyn | Francia | Holanda |
| Marianne | Holanda | Costa Rica |
| Carol | Italia | Francia |

2. En cada cuadrado de la siguiente figura se coloca un número del 1 al 9, sin repetir, de modo que la suma de los tres números de cada fila y de cada columna es 13




Determine la suma de los números que se colocan en las casillas marcadas con $*$.

**Solución**

Algunas conclusiones previas son: ningún número interviene en más de dos sumas, hay tres números que intervienen en dos sumas cada uno, los restantes seis números intervienen en una única suma.
Las tripletas de números que suman 13 son:

$$A(9,3,1), B(8,4,1), C(8,3,2), D(7,5,1), E(7,4,2), F(6,5,2), G(6,4,3)$$

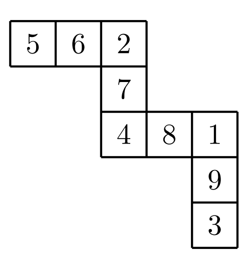
Se deben tomar cuatro de estas tripletas de modo que:
En ellas estén todos los números del 1 al 9.
Hayan tres números que se repitan dos veces.
No haya un número que se repita más de dos veces.

Como el 9 solo está en $A$, esta tripleta debe estar incluida.
Además que $B, C$ no podrían estar ambas, al igual que $D, E$ ni $F, G$. Veamos:
Si se toman $A, B, C$ faltarían los números 5,6,7 y no hay una cuarta tripleta que los contenga.
Si se toman $A, D, E$ ocurre lo mismo con los números 6 y 8.
Si se toman $A, F, G$ ocurre los mismo con los números 7 y 8.

Esto nos lleva a cuatro posibles casos:
$A, C, D, G$ se descarta pues el 3 aparece más de dos veces.
$A, C, E, F$ se descarta pues el 2 aparece más de dos veces.
$A, B, D, G$ se descarta pues el 1 aparece más de dos veces.
$A, B, E, F$ cumple con todas las condiciones, con 1,2,4 repitiéndose dos veces cada uno, 9,8,7,6,5,3 aparecen solo una vez.

Los números que se colocan en las casillas marcadas con $*$ son 1,2,4, por lo que su suma es 7.

Una posible ordenación es



3. Determine la cantidad de números de cuatro cifras divisibles por 5, cuyas cifras son números primos que suman 17. ¿Cuáles son esos números?

**Solución**

Un número menor que 10 000 tiene 4 cifras. La cifra de las unidades de los números que cumplen las condiciones del problema es 5. No puede ser 0 pues cada una de las cifras debe ser un primo. Las otras tres cifras son primos que suman 12. Por paridad una de éstas es 2, esto porque la suma de tres primos mayores que 2 es impar. El 2 puede colocarse en tres posiciones distintas: en la cifra de las decenas, en las centenas o en las unidades de millar.
Las otras dos cifras son números primos que suman 10. Únicamente hay tres combinaciones que lo cumplen: 3 y 7, 5 y 5, 7 y 3.
Debido a que hay tres formas diferentes de colocar el 2 y tres combinaciones para los otros dos primos que suman 10, existen en total nueve números menores que 10 000 que son divisibles por 5 y cuyas cifras son números primos que suman 17. A continuación se indican todos estos números: 2375, 2555, 2735, 3275, 5255, 7235, 3725, 5525 y 7325.