XXVI OLIMPIADA COSTARRICENSE DE MATEMÁTICA

UCR-UNA-ITCR-UNED-MEP-MICIT

SEGUNDA ELIMINATORIA NACIONAL

EXAMEN SEGUNDO NIVEL SOLUCIONARIO

2014

I Parte: Selección Única

1. Si se consideran los números enteros del 1 al 2014 inclusive. Entonces la cantidad de estos números que son divisibles por 7 y 11 simultáneamente corresponde a

   (a) 25
   (b) 26
   (c) 27
   (d) 28

Solución

Como los números tienen que ser divisibles simultáneamente por 7 y 11, entonces deben ser divisibles por 77, y al realizar la división de $\frac{2014}{77} = 26 + \frac{12}{77}$, por lo que la cantidad de números solicitada es 26.

Respuesta correcta: Opción b.

2. En la Isla del Coco hay 13 camaleones rojos, 15 amarillos y 17 morados. Cuando se encuentran dos camaleones de colores distintos ambos cambian su color al tercero. Por ejemplo, si se encuentran un camaleón rojo y uno morado los dos se vuelven amarillos. ¿Cuál de las siguientes proposiciones es siempre FALSA?

   (a) El número de camaleones rojos puede ser par.
   (b) Los 45 camaleones de la isla nunca serán del mismo color.
   (c) El número de camaleones amarillos puede exceder al número de camaleones morados.
   (d) En algún instante los camaleones de la isla pueden ser del mismo color.

Solución

Sean r, a, m el número de camaleones rojos, amarillos y morados de la isla en un determinado momento. Cuando se encuentren dos camaleones de distinto color dos de los números r, a, m disminuirán en 1 y el otro aumentará en 2, por lo que cualquiera de las diferencias $m-a$, $m-r$, $a-r$ permanecerá igual o variará en 3 después de cada encuentro. Si en algún momento todos los camaleones de la isla fueran del mismo color los números r, a, m serían $45, 0, 0$ en algún orden y las diferencias $m-a$, $m-r$, $a-r$ serían, en algún orden, $45, 45, 0$ que son múltiplos de 3 y como estas diferencias son inicialmente $2, 4, 2$ (al inicio $r = 13$, $a = 15$, $m = 17$) entonces como las restas se conservan o se varían de 3 en 3 no es posible llegar a $45, 45, 0$ y por tanto los camaleones de la isla nunca podrán ser del mismo color.

Respuesta correcta: Opción d.

3. La cantidad de números enteros positivos de tres cifras, cuyos dígitos son primos que suman 14 es

   (a) 3
   (b) 6
   (c) 8
   (d) 10

Solución

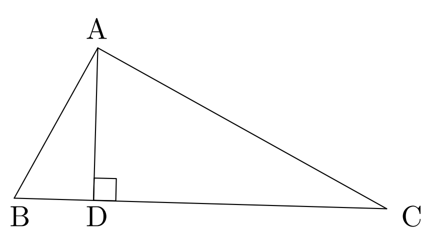
Un número menor que 1 000 tiene tres cifras. Por paridad una de las cifras es 2, esto porque la suma de tres primos mayores que 2 es impar. El 2 puede colocarse en tres posiciones distintas: en la cifra de las unidades, de las decenas o en las centenas. Las otras dos cifras son números primos que suman 12. Únicamente hay dos combinaciones que lo cumplen: 7 y 5, 5 y 7. Debido a que hay tres formas diferentes de colocar el 2 y dos combinaciones para los otros dos primos que suman 12, existen en total seis números menores que 1 000 cuyas cifras son números primos que suman 14. A continuación se indican todos estos números: 257, 275, 527, 723, 572, 752.

Respuesta correcta: Opción b.

4. Sea $\triangle ABC$ rectángulo en A y D el pie de la altura desde A. Si $AB = 5$ y $BD = 3$, entonces el área del $\triangle ADC$ corresponde a

   (a) $\frac{3}{4}$
   (b) $\frac{5}{3}$
   (c) 2
   (d) $\frac{32}{3}$

Solución



Por pitágoras $AD = \sqrt{5^2 - 3^2} = \sqrt{16} = 4$

Sea $\angle ABD = \alpha \Rightarrow \angle BAD = 90 - \alpha \Rightarrow \angle DAC = \alpha \Rightarrow \angle ACD = 90 - \alpha$

Por aa $\triangle ADB \sim \triangle CDA \Rightarrow \dfrac{AD}{CD} = \dfrac{BD}{AD} \Rightarrow \dfrac{4}{CD} = \dfrac{3}{4} \Rightarrow CD = \dfrac{16}{3}$

Así, $a(\triangle ADC) = \dfrac{CD \cdot AD}{2} = \dfrac{\frac{16}{3} \cdot 4}{2} = \dfrac{32}{3}$.

Respuesta correcta: Opción d.

5. El número de formas en que se pueden llenar las casillas de una cuadrícula de 2×6 con los números 1 y -1 de manera que la suma de los números en cada fila y cada columna sea 0 es

   (a) 10
   (b) 15
   (c) 18
   (d) 20

Solución

En la primera fila deben ser exactamente tres números 1 y tres números -1. Cuando se escriben los números de la primera fila en la casilla de abajo se escribe el opuesto para que se cumpla la condición, por lo que solo tenemos que contar el número de formas de acomodar 3 números en 6 casillas; es decir, $\binom{6}{3} = 20$ maneras distintas.

Respuesta correcta: Opción d.

6. Al factorizar la expresión $a^3 + b^3 + c^3 - 3abc$ se obtiene que uno de sus factores es

   (a) $a^2 + b^2 + c^2$
   (b) $a - b + c$
   (c) $a + b + c$
   (d) $a + b - c$

Solución

Uno de los factores es $a + b + c$, ya que

$$\begin{aligned}
a^3 + b^3 + c^3 - 3abc &= a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 + c^3 - 3abc - 3a^2b - 3ab^2 \\
&= (a + b)^3 + c^3 - 3ab(a + b + c) \\
&= (a + b + c)((a + b)^2 - c(a + b) + c^2) - 3ab(a + b + c) \\
&= (a + b + c)((a + b)^2 - c(a + b) + c^2 - 3ab) \\
&= (a + b + c)(a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ac)
\end{aligned}$$

Respuesta correcta: Opción c.

7. Considere las ecuaciones $x^2 - 2013x - 2014 = 0$ y $x^2 + 2014x + 2013 = 0$ que tienen una solución en común, determine la suma de las dos soluciones diferentes.

   (a) 0
   (b) 1
   (c) -1
   (d) 4027

Solución

Al resolver la ecuación $x^2 - 2013x - 2014 = 0$ obtenemos las solución $x = 2014$ y $x = 1$. Ahora al resolver la ecuación $x^2 + 2014x + 2013 = 0$ obtenemos las soluciones $x = -2013$ y $x = 1$. Así la suma de las dos soluciones distintas da como resultado 1.

Respuesta correcta: Opción b.

8. Considere dos planos perpendiculares π_1, π_2 y l la recta intersección entre ellos.

   I. Sean $P_1 \in \pi_1, P_2 \in \pi_2$ tales que no estén en la recta l.
   II. Sean A, B puntos en l tales que $\overleftrightarrow{AP_1} \perp l$ y $\overleftrightarrow{BP_2} \perp l$.

   Si $P_1A = 1, P_2B = 2, P_1P_2 = 3$ entonces $\overline{AB}$ mide

   (a) 1
   (b) 2
   (c) $\sqrt{2}$
   (d) $\sqrt{3}$

Solución

Como $\pi_1 \perp \pi_2$, $\overleftrightarrow{AP_1} \perp \overleftrightarrow{AP_2}$, por lo que $\triangle AP_1P_2$ es recto en A. Por el Teorema de Pitágoras $AP_2 = \sqrt{(P_1P_2)^2 - (AP_1)^2} = \sqrt{8}$. Además $\triangle ABP_2$ es recto en B, por lo que $AB = \sqrt{(AP_2)^2 - (BP_2)^2} = \sqrt{8-4} = 2$.

Respuesta correcta: Opción b.

9. Sea N el número $4a73b$, en donde a y b son dígitos. ¿De cuántas maneras se pueden elegir a y b de tal forma que N sea divisible por 6?

   (a) 11
   (b) 16
   (c) 30
   (d) 50

Solución

Las cifras de N deben sumar un número que sea par (es decir b es par) y múltiplo de tres, así se tiene que $4+7+3=14$, entonces tenemos varios casos:

- $a+b$ sumen 1 tenemos sólo una forma.
- $a+b$ sumen 4 tenemos 3 formas.
- $a+b$ sumen 7 tenemos 3 formas.
- $a+b$ sumen 10 tenemos 4 formas.
- $a+b$ sumen 13 tenemos 3 formas.
- $a+b$ sumen 16 tenemos sólo una forma.

Así en total se pueden elegir de 16 formas distintas.

Respuesta correcta: Opción b.

10. Santiago y Gilbert están haciendo fresco de sirope con diferentes concentraciones en vasos de igual capacidad. El fresco de santiago tiene 3 partes de sirope por 7 de agua, mientras que el fresco de Gilbert tiene 3 partes de sirope por 5 de agua. Deciden revolverlo para hacer un solo fresco, entonces, ¿cuál es la relación entre las partes de sirope y las partes de agua en el fresco resultante?

   (a) 3 partes de sirope por 5 de agua.
   (b) 7 partes de sirope por 13 de agua.
   (c) 18 partes de sirope por 35 de agua.
   (d) 27 partes de sirope por 53 de agua.

Solución

El fresco de santiago tiene 3 partes sirope por 10 partes del total del refresco, el fresco del Gilbert tiene 3 partes de sirope por 8, así tenemos que en uniendo los dos vaso de agua la concentración de sirope corresponde a:

$$\frac{\frac{3}{10}+\frac{3}{8}}{2}=\frac{24+30}{80\cdot 2}=\frac{54}{160}=\frac{27}{80}$$

Es decir en el fresco resultante tendremos 27 partes de sirope por 53 de agua.

Respuesta correcta: Opción d.

11. Suponga que cuando un matrimonio va a tener un hijo es igualmente probable que sea varón a que sea mujer. Si una pareja desea tener tres hijos, uno por cada embarazo, entonces la probabilidad de que la pareja tenga dos niñas y un niño corresponde a

    (a) $\frac{1}{16}$
    (b) $\frac{1}{9}$
    (c) $\frac{1}{4}$
    (c) $\frac{3}{8}$

Solución

Si designamos con H a los niños y con M a las niñas, se tiene el siguiente espacio muestral: {MMM, MMH, MHH, MHM, HHM, HMH, HMM, HHH }, por lo que la probabilidad solicitada es de $P = \frac{3}{8}$.

Respuesta correcta: Opción d.

12. Considere un triángulo ABC con D un punto sobre el lado $\overline{BC}$ tal que $AC = CD$. Si $m\angle CAB - m\angle ABC = 30°$ entonces $m\angle BAD$ es

    (a) 15°
    (b) 20°
    (c) 10°
    (d) 25°

Solución

Sean D un punto sobre el lado $\overline{BC}$ del triángulo ABC y trace el segmento $\overline{AD}$.

$$\begin{aligned} m\angle BAD &= m\angle CAB - m\angle CAD \\ &= m\angle CAB - m\angle CDA \qquad \text{(por ser } AC = CD) \\ &= m\angle CAB - (m\angle BAD + m\angle ABD) \qquad \text{(teorema ángulo externo en el } \triangle\ ADB) \\ &= m\angle CAB - m\angle BAD - m\angle ABC \end{aligned}$$

Por tanto, $2(m\angle BAD) = m\angle CAB - m\angle ABC = 30°$ y entonces $m\angle BAD = 15°$.

Respuesta correcta: Opción a.

II Parte: Desarrollo

Instrucciones. Los siguientes ejercicios deben ser resueltos en las hojas adicionales que se le entregaron. Conteste los ejercicios en forma ordenada, completa y clara, se califica procedimiento y respuesta.

1. Dado un $\triangle ABC$ rectángulo en C, tal que la altura sobre la hipotenusa divide a ésta en dos segmentos tal que uno de ellos es dos unidades menor que la altura y el otro es tres unidades mayor que la altura. Calcule la longitud del cateto mayor del $\triangle ABC$.

Solución

Si se designa con x la longitud de la altura sobre la hipotenusa del $\triangle ABC$ entonces,
$x^2 = (x-2)(x+3) \quad \Rightarrow \quad x^2 = x^2 + x - 6 \quad \Rightarrow \quad x = 6.$

Si se denota con D la intersección de la altura sobre la hipotenusa del $\triangle ABC$ y la hipotenusa, entonces los triángulos $\triangle CDB$ y $\triangle CAD$ son rectángulos que comparten un cateto, sin pérdida de generalidad se puede asumir que $AD = 6+3 = 9$ y $AB = 6-2 = 4$, por lo que el cateto AC del $\triangle ABC$ es el cateto mayor del $\triangle ABC$.
Aplicando el Teorema de Pitágoras en el $\triangle CAD$ se tiene,
$(AC)^2 = (CD)^2 + (AD)^2 \Rightarrow AC = \sqrt{6^2 + 9^2} = 3\sqrt{13}.$

2. Sea abc un número donde a, b, c son cifras tal que su suma da 18, la cifra de las unidades es el doble de las decenas y la diferencia de los números abc y cba es 297. Determine el número abc.

Solución

Sabemos que $a+b+c = 18$, $c = 2b$, $abc - cba = 297$. Además, $a > c$ pues la resta es positiva.

Luego $c + 10 - a = 7 \quad \Rightarrow \quad a = c+3 \quad \Rightarrow \quad a = 2b+3.$

Tenemos que $a+b+c = 18 \Rightarrow (2b+3) + b + (2b) = 18 \quad \Rightarrow 5b = 15 \Rightarrow b = \dfrac{15}{5} = 3$

$\Rightarrow c = 2 \cdot 3 = 6$ y $a = 2 \cdot 3 + 3 = 9$

Por lo tanto, el número es 936.

3. Encuentre la solución del siguiente sistema en donde x, y, z son números reales positivos.

$$\begin{cases} x^2 + xy + xz = 26 \\ xy + y^2 + yz = 27 \\ xz + yz + z^2 = 28 \end{cases}$$

Solución

Sumando miembro a miembro

$$\begin{gathered} x(x+y+z) + y(x+y+z) + z(x+y+z) = 26 + 27 + 28 \\ (x+y+z)(x+y+z) = 81 \\ (x+y+z)^2 = 81 \\ \sqrt{(x+y+z)^2} = \sqrt{81} \\ |x+y+z| = 9 \\ x+y+z = 9 \\ x = \frac{26}{9},\ y = \frac{27}{9} = 3,\ z = \frac{28}{9} \end{gathered}$$