XXVI OLIMPIADA COSTARRICENSE DE MATEMÁTICA

UCR-UNA-ITCR-UNED-MEP-MICIT

SEGUNDA ELIMINATORIA NACIONAL

EXAMEN TERCER NIVEL
SOLUCIONARIO

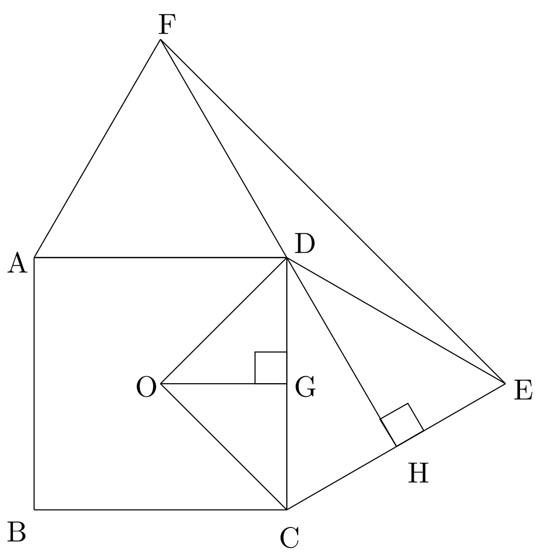
2014

I Parte: Selección Única

1. Si E y F son puntos exteriores a un cuadrado $ABCD$ de centro O tal que $\triangle EDC$ y $\triangle FAD$ son triángulos equiláteros entonces la razón de las áreas de los triángulos $\triangle FDE$ y $\triangle DOC$ es

   (a) $\frac{1}{2}$
   (b) 1
   (c) $\frac{3}{2}$
   (d) 2

Solución



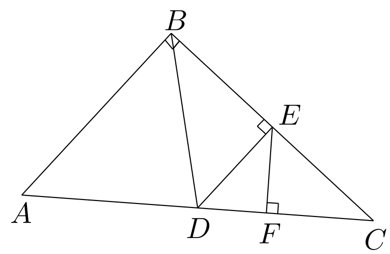
Sea 1 la medida del lado del cuadrado. Entonces $a(\triangle DOC) = \dfrac{DC.OG}{2} = \dfrac{1.\frac{1}{2}}{2} = \dfrac{1}{4}$. Obseve que $\angle FDE = 360° - 60° - 60° - 90° = 150°$. Sea H en $\overline{CE}$ tal que DH es altura del $\triangle DEC$ y como es equilátero $\angle EDH = 30° \Rightarrow \angle FDE + \angle EDH = 180°$ y así $F - D - H$ y EH es la altura del $\triangle FDE$.

Además, como $\angle EDH = 30°$, entonces $EH = \dfrac{1}{2}$ y $a(\triangle FDE) = \dfrac{FD.EH}{2} = \dfrac{1.\frac{1}{2}}{2} = \dfrac{1}{4}$

Por lo tanto, $a(\triangle DOC) = a(\triangle FDE)$ y su razón es 1.

Respuesta correcta: Opción b.

2. Según los datos de la figura adjunta, si D es el punto medio de $\overline{AC}$, $AB = 8$ y $BD = 5$, entonces FC es igual a



(a) $\dfrac{9}{2}$

(b) $\dfrac{9}{5}$

(c) $\dfrac{16}{5}$

(d) $\dfrac{64}{5}$

Solución

D punto medio de $\overline{AC}$ y $\overline{DE} \parallel \overline{AB} \Rightarrow \begin{cases} DE = \frac{1}{2}AB = 4 \\ E \text{ punto medio de } \overline{BC} \end{cases}$

Aplicando el Teorema de Pitágoras en el $\triangle BDE$ se obtiene $BE = 3 = EC$.
Además $\triangle DEB \cong \triangle DEC$ por el criterio de congruencia L.A.L., así $CD = BD = 5$.
Por último, empleando el teorema del cateto en el $\triangle DEC$ se obtiene $3^2 = 5 \cdot y \Rightarrow y = \dfrac{9}{5}$.

Respuesta correcta: Opción b.

3. Se toman cinco puntos en una circunferencia y se seleccionan al azar cuatro cuerdas que unen dos de los cinco puntos. Entonces, la probabilidad de que las cuatro cuerdas formen un cuadrilátero convexo es

(a) $\dfrac{1}{105}$

(b) $\dfrac{1}{42}$

(c) $\dfrac{1}{15}$

(d) $\dfrac{1}{14}$

Solución

Cuatro puntos cualesquiera de los cinco dados determinan un único cuadrilátero convexo de manera que hay exactamente cinco resultados favorables cuando las cuerdas se seleccionan al azar. Ya que hay $\binom{5}{2} = 10$ cuerdas, se sigue que hay $\binom{10}{4} = 210$ formas de escoger las cuatro cuerdas y la probabilidad buscada es $\dfrac{5}{210} = \dfrac{1}{42}$.

Respuesta correcta: Opción b.

4. Si f es una función cuyo criterio es $f(x) = \dfrac{x(x-1)}{2}$ entonces $f(x+2)$ corresponde a

   (a) $\dfrac{(x+2)f(x+1)}{x}$
   (b) $\dfrac{xf(x)}{x+2}$
   (c) $f(x) + f(2)$
   (d) $x(x+2)f(x)$

Solución

$f(x+1) = \dfrac{(x+1)(x+1-1)}{2} = \dfrac{(x+1)x}{2}$ así que, $\dfrac{x+1}{2} = \dfrac{f(x+1)}{x}$ y entonces

$$f(x+2) = \frac{(x+2)(x+2-1)}{2} = \frac{(x+2)(x+1)}{2} = \frac{(x+2)f(x+1)}{x}$$

Respuesta correcta: Opción a.

5. La cantidad de divisores del número 2014^{2014} es

   (a) 2015
   (b) 2015^2
   (c) 2015^3
   (d) 2015^4

Solución

$2014^{2014} = (2 \cdot 19 \cdot 53)^{2014} = 2^{2014} \cdot 19^{2014} \cdot 53^{2014}$. Por lo tanto el número de divisores es $(2014+1) \cdot (2014+1) \cdot (2014+1) = 2015^3$.

Respuesta correcta: Opción c.

6. ¿Cuál es la mayor cantidad posible de rectas que determinan 2014 puntos?

   (a) $2013 \cdot 2014$
   (b) $1007 \cdot 2013$
   (c) $1007 \cdot 2014$
   (d) $2014 \cdot 2014$

Solución

Con dos puntos se tiene una única recta, con tres puntos se tienen tres rectas y con cuatro puntos se tiene un máximo de seis rectas.

Resumamos más casos en la siguiente tabla:

Nḿero de untos	Número de rectas	Forma de calcularla
2	1	$\frac{1 \cdot 2}{2}$
3	3	$\frac{2 \cdot 3}{2}$
4	6	$\frac{3 \cdot 4}{2}$
5	10	$\frac{4 \cdot 5}{2}$
6	15	$\frac{5 \cdot 6}{2}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
n		$\frac{(n-1) \cdot n}{2}$

Con 2014 puntos se tienen un máximo de $\frac{2013 \cdot 2014}{2} = 2013 \cdot 2014 = 2027091$ rectas.

Respuesta correcta: Opción a.

7. En un hexágono regular de radio 1 se construyen seis círculos de modo que cada lado del hexágono es un diámetro de cada uno de ellos. Si se pinta el interior de estos seis círculos, el área total pintada es

   (a) π
   (b) $\dfrac{3\pi}{2}$
   (c) $\dfrac{\pi}{2} + \dfrac{3\sqrt{3}}{2}$
   (d) $\pi + \dfrac{3\sqrt{3}}{4}$

Solución

Cada lado del hexágono mide 1, por lo que cada radio del círculo mide $r = \dfrac{1}{2}$. El área de cada círculo es $\dfrac{\pi}{4}$. Si se suman las áreas de los seis círculos se está sumando de más las regiones donde cada par de ellos se intersecan, entonces, para obtener el área sombreada se debe restar el área de las seis regiones de intersección.

El área de una de estas regiones es

$$2\left(\frac{\pi r^2 \cdot 60^\circ}{360^\circ} - \frac{r^2\sqrt{3}}{4}\right) = \frac{\pi}{12} - \frac{\sqrt{3}}{8}$$

Luego, el área pintada es

$$A = 6 \cdot \frac{\pi}{4} - 6 \cdot \left(\frac{\pi}{12} - \frac{\sqrt{3}}{8}\right) = \pi + \frac{3\sqrt{3}}{4}$$

Respuesta correcta: Opción d.

8. La cantidad de kilos de café con valor de 5600/kg que hay que mezclar con 77 kg de otro café de menor calidad, a 4200/kg, para que la mezcla tenga un valor de 4522/kg es

   (a) 23
   (b) 57
   (c) 65
   (d) 93

Solución

Si x es la cantidad de kilos de café de 5600/kg que hay que agregar, entonces
$\dfrac{5600 \cdot x + 77 \cdot 4200}{77 + x} = 4522 \quad \Rightarrow x = 23.$

Respuesta correcta: Opción a.

9. Si x_1 y x_2 son las soluciones de la ecuación $4a^4b^2 - 12a^2bx + 5x^2 = 0$ con a, b constantes reales y $b \geq 0$, entonces la expresión $|x_1 - x_2|$ es equivalente a

   (a) $\dfrac{8a^2b}{5}$

   (b) $\dfrac{12a^2b}{5}$

   (c) $\dfrac{8ab^2}{5}$

   (d) $\dfrac{12ab^2}{5}$

Solución

Factoricemos el polinomio $4a^4b^2 - 12a^2bx + 5x^2$.

$$\begin{aligned} 4a^4b^2 - 12a^2bx + 5x^2 &= 4a^4b^2 - 12a^2bx + 9x^2 + 5x^2 - 9x^2 \\ &= (2a^2b - 3x)^2 - 4x^2 \\ &= (2a^2b - 3x - 2x)(2a^2b - 3x + 2x) \\ &= (2a^2b - 5x)(2a^2b - x) \end{aligned}$$

Así

$$\begin{aligned} 4a^4b^2 - 12a^2bx + 5x^2 = 0 &\Leftrightarrow (2a^2b - 5x)(2a^2b - x) = 0 \\ &\Leftrightarrow (2a^2b - 5x = 0) \vee (2a^2b - x = 0) \\ &\Leftrightarrow \left(x = \frac{2a^2b}{5}\right) \vee (x = 2a^2b) \end{aligned}$$

Sin pérdida de generalidad tomamos $x_1 = \dfrac{2a^2b}{5}$ y $x_2 = 2a^2b$

$$\Rightarrow |x_1 - x_2| = \left|\frac{2a^2b}{5} - 2a^2b\right| = \left|-\frac{8a^2b}{5}\right| = \frac{8a^2b}{5} \text{ (por hipótesis } b \geq 0)$$

Respuesta correcta: Opción a.

10. Si las soluciones de la ecuación $x^2 + px + q = 0$ son el cubo de las soluciones de la ecuación $x^2 + mx + n = 0$ entonces se cumple que

    (a) $p = m^3 - 3mn$
    (b) $p = m^3 + 3mn$
    (c) $p + q = m^3$
    (d) $\left(\frac{m}{n}\right)^3 = \frac{p}{q}$

Solución

Si a y b son las soluciones de la ecuación $x^2 + px + q = 0$ entonces $-m = a + b$, $-p = a^3 + b^3$, $n = ab$, $q = a^3b^3$. Como $(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 = a^3 + b^3 + 3ab(a + b)$ se obtiene $-m^3 = -p + 3n(-m)$, es decir, $p = m^3 - 3mn$.

Respuesta correcta: Opción a.

11. Sea la función de segundo grado $f(x) = ax^2 + bx + c$ con $a \neq 0$ tal que $f(0) = f(3)$, una de sus intersecciones con el eje x es $(1, 0)$ y la componente "y"del vértice es $\frac{-1}{4}$. Determine la otra intersección con el eje x.

    (a) $(2, 0)$
    (b) $(-1, 0)$
    (c) $(-2, 0)$
    (d) No hay otra intersección

Solución

Dado que $f(0) = f(3)$ tenemos $c = 9a + 3b + c$ entonces $0 = 9a + 3b$ y así $b = -3a$.

Como $(1, 0)$ es una intersección con el eje x tenemos que $f(1) = 0$, entonces $a + b + c = 0$ y sustituyendo b obtenemos $a - 3a + c = 0$ y así $c = 2a$.

Ahora tenemos que $\dfrac{4ac - b^2}{4a} = \dfrac{-1}{4}$, sustituyendo b y c obtenemos $\dfrac{4a(2a) - (-3a)^2}{4a} = \dfrac{-1}{4}$ entonces $\dfrac{8a^2 - 9a^2}{4a} = \dfrac{-1}{4}$ y así $\dfrac{-a^2}{4a} = \dfrac{-1}{4}$, de lo anterior $-a = -1$ y entonces $a = 1$.
Ahora sustituyendo a en b y c obtenemos $b = -3$ y $c = 2$, de esta forma tenemos que la función dada es $f(x) = x^2 - 3x + 2$ y la otra intersección con el eje x viene dada por $(2, 0)$.

Respuesta correcta: Opción a.

12. Si a y b son números enteros positivos y $a^b = 36^{15}$ y $b^a = 1000000^{36}$. Entonces el resultado de $a + b$ corresponde a

    (a) $\log 10^{216}$
    (b) 226
    (c) 360
    (d) 2014

Solución

Note que $a^b = 36^{15} \Rightarrow a^b = (6^2)^{3\cdot 5} \Rightarrow a^b = (6^3)^{2\cdot 5} \Rightarrow a^b = 216^{10}$, mientras que, $b^a = 1000000^{36} \Rightarrow b^a = (10^6)^{36} \Rightarrow b^a = 10^{216}$, por lo que $a = 216$ y $b = 10$. Entonces $a + b = 226$.

Respuesta correcta: Opción b.

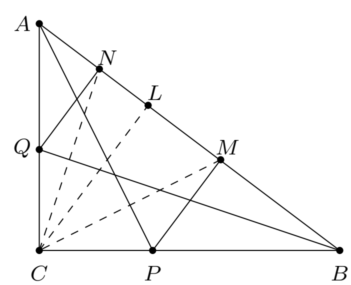
II Parte: Desarrollo

Instrucciones. Los siguientes ejercicios deben ser resueltos en las hojas adicionales que se le entregaron. Conteste los ejercicios en forma ordenada, completa y clara, se califica procedimiento y respuesta.

1. Sea el $\triangle ABC$, recto en C, las bisectrices interiores de $\angle BAC$ y $\angle ABC$ intersecan a $\overline{BC}$ y a $\overline{CA}$ en los puntos P y Q respectivamente. Sean M y N los pies de las perpendiculares desde P y Q al lado $\overline{AB}$ respectivamente, determine $m\angle MCN$.

Solución

Considere la figura



Se tiene que $m\angle CAP = m\angle PAM$ ($\overline{AP}$ bisectriz), además $m\angle ACP = m\angle PMA$ (son rectos) y así $m\angle APC = m\angle APM$ (suma de ángulos internos de un triángulo) y por el criterio $A-L-A$ tenemos que $\triangle CAP \cong \triangle MAP$ y entonces $\overline{CP} \cong \overline{MP}$. Sea L el pie de la perpendicular desde C sobre $\overline{AB}$, así tenemos que $\overline{PM} \parallel \overline{CL}$, ahora $m\angle PCM = m\angle PMC$ ($\triangle CPM$ es isósceles) y $m\angle PMC = m\angle MCL$ (alternos internos entre paralelas) y entonces $m\angle PCM = \angle MCL$.
De forma análoga $m\angle QCN = m\angle NCL$ y así tenemos:

$$\begin{aligned}
m\angle QCN + m\angle NCL + \angle PCM + \angle MCL = 90^\circ &\implies 2m\angle NCL + 2m\angle MCL = 90^\circ \\
&\implies 2(m\angle NCL + m\angle MCL) = 90^\circ \\
&\implies m\angle NCL + m\angle MCL = 45^\circ \\
&\implies m\angle MCN = 45^\circ
\end{aligned}$$

2. Sean x, y, z números enteros tales que $x+y+z$ es divisible por 6 y $x^2+y^2+z^2$ es divisible por 36. Pruebe que $x^3+y^3+z^3$ es divisible por 8.

Solución

Como $x+y+z$ es divisible por 6 todos los números son pares o sólo uno de los números es par. Si solamente uno de los números es par el residuo de dividir $x^2+y^2+z^2$ por 4 es 2 que contradice que $x^2+y^2+z^2$ es divisible por 36, por tanto, todos los números son pares y existen enteros a, b, c tales que $x^3+y^3+z^3 = (2a)^3+(2b)^3+(2c)^3 = 8(a^3+b^3+a^3)$ y $x^3+y^3+z^3$ es divisible por 8.

3. Sea $f : \mathbb{N} \cup \{0\} \to \mathbb{R}$ tal que $f(0) \neq 0, f(1) = 1$ y $f(n)f(m) = f(n+m) + f(n-m)$ para todo $n, m \in \mathbb{N} \cup \{0\}, n \geq m$. Determine el valor de $f(2014)$.

Solución

Tomando $n = m = 0$ se tiene $f(0)f(0) = f(0) + f(0) \Rightarrow (f(0))^2 = 2f(0) \Rightarrow f(0) = 2$, pues $f(0) \neq 0$.

Tomando $m = 1$ se tiene $f(n)f(1) = f(n+1) + f(n-1) \Rightarrow f(n+1) = f(n) - f(n-1)$, pues $f(1) = 1$

Utilizando esta igualdad se pueden calcular los demás valores, veamos:
$f(2) = f(1) - f(0) = 1 - 2 = -1$
$f(3) = f(2) - f(1) = -1 - 1 = -2$
$f(4) = f(3) - f(2) = -2 - -1 = -1$
$f(5) = f(4) - f(3) = -1 - -2 = 1$
$f(6) = f(5) - f(4) = 1 - -1 = 2$

Vemos que hay un periodo de longitud 6.
Como $2014 = 335 \cdot 6 + 4$, se tiene que $f(2014) = f(4) = -1$