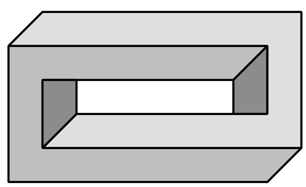
XXXIV OLIMPIADA COSTARRICENSE DE MATEMÁTICAS

MEP - UCR - TEC - UNA - UNED - MICITT

SEGUNDA ELIMINATORIA NACIONAL



Nivel I

(7°)

2022

Estimado estudiante:

La Comisión de las Olimpiadas Costarricenses de Matemáticas 2022 le saluda y le da la más cordial bienvenida a la Primera Eliminatoria Nacional de estas justas académicas, deseándole los mayores éxitos.
La prueba consta de un total de 12 preguntas de selección única y dos preguntas de desarrollo.

Puede consultar la lista de estudiantes clasificados a partir del **viernes 7 de octubre**, en la siguiente dirección electrónica:

www.olcoma.ac.cr

INDICACIONES GENERALES

- Esta eliminatoria tiene un formato virtual por tanto las respuestas a las preguntas que se le formulan, deben ser consignadas ÚNICAMENTE en la plataforma de EstudiaU de la UNED.
- Debe trabajar en forma individual.
- Los dibujos que aparecen en la prueba no necesariamente están hechos a escala.
- Los únicos instrumentos cuyo uso se permite son los necesarios para escribir y dibujar. Se prohíbe el uso de libros, libretas de notas, tablas y calculadora.
- El examen tiene una duración máxima de tres horas.

SIMBOLOGÍA

$\overline{AB}$	segmento de extremos A yB	$\angle ABC \approx \angle DEF$	congruencia de ángulos
AB	medida de $\overline{AB}$	$\triangle ABC \cong \triangle DEF$	congruencia de triángulos
$\overrightarrow{AB}$	rayo de extremo A y que contiene a B	$ABC \leftrightarrow DEF$	correspondencia respectiva entre puntos
$\overleftrightarrow{AB}$	recta que contiene los puntos A y B	$\triangle ABC \sim \triangle DEF$	semejanza de triángulos
$\angle ABC$	ángulo de rayos $\overrightarrow{BA}$ y $\overrightarrow{BC}$	$\overline{AB} \cong \overline{CD}$	congruencia de segmentos
$m\angle ABC$	medida de $\angle ABC$	$\widehat{AB}$	arco de extremos A y B
$\triangle ABC$	triángulo de vértices A, B, C	$m\widehat{AB}$	medida de $\widehat{AB}$
$\square ABCD$	cuadrilátero de vértices A, B, C, D	(ABC)	área de ΔABC
$\parallel$	paralelismo	$(ABCD)$	área de $\square ABCD$
$\perp$	perpendicularidad	$P-Q-R$	P, Q, R puntos colineales, con Q entre los puntos P y R

I Parte: Selección única **Valor 24 puntos, 2 puntos c/u**

Instrucciones:En cada uno de los siguientes ejercicios se le proporcionan cuatro opciones de respuestas, resuelva cada ejercicio y seleccione la opción que antecede a la respuesta correcta.

1. Carlos y Pedro tienen 4 y 7 kilogramos de maní respectivamente, y deciden venderle algunos a César, de manera que los reúnen y los dividen en partes iguales. Si César les paga 2750 colones, y ese dinero lo reparten entre Carlos y Pedro de modo que a cada uno le corresponde de acuerdo con la cantidad de maní que aportaron a la parte de César, entonces la cantidad de dinero que le toca a Pedro corresponde a

   (a) 800 colones

   (b) 2000 colones

   (c) 2500 colones

   (d) 250 colones

- Opción correcta: (c)
- Solución: Como a César le corresponden $11/3$ kilogramos de maní, entonces Pedro le aporta $7 - 11/3 = 10/3$ kilogramos. De modo que Pedro aporta un $10/11$, así que lo que le corresponde es $2750 \cdot 10/11 = 2500$ colones.

2. Pablo tiene en su casa 2 paquetes con 18 vasos cada paquete, desea construir una pirámide apilando vasos en línea de tal forma que cada nivel superior que construye posee un vaso menos que el nivel inmediato inferior. ¿Cuántos vasos le sobran a Pablo si desea hacer la pirámide tan alta como le sea posible?

   Opciones de respuesta:

   (a) 0

   (b) 2

   (c) 3

   (d) 5

- Opción correcta: (a)
- Solución: Pablo tiene un total de 36 vasos para elaborar la pirámide; al apilar los vasos, con certeza sabemos que el nivel más alto de la pirámide tiene 1 vaso, el nivel justo debajo tiene 2 vasos, el siguiente nivel 3 vasos y así sucesivamente, si sumamos los niveles obtenemos $1+2+3+4+5+6+7+8=36$ Por lo tanto el total de vasos sobrantes es cero.

3. La cantidad de números de 3 dígitos que tienen exactamente una vez a los dígitos 3 y 4, y que además son divisibles por 12, corresponde a

   (a) 0

   (b) 2

   (c) 4

   (d) 6

- Opción correcta: (c)
- Solución:

Sea a el dígito que falta para formar el número buscado, como el números es divisible por 12, entonces es divisible por 3 y por 4.

Al ser divisible por 3, entonces $3+4+a$ debe ser múltiplo de 3, por lo que a puede tomar los valores de $2, 5, 8$

Como además debe ser divisible por 4, entonces el número debe ser par, por lo que 3 no puede ser el dígito de las unidades, además los dos últimos dígitos deben formar un número divisible por 4 .

Así tomando el 2 sólo tenemos los números 432 y 324.

Tomando el 5 no tenemos ningún número.

Tomando el 8 tenemos los números 348 y 384

4. Mónica tiene escritos en la pizarra los números del 1 al 100. Ella borra de la pizarra los números que pueden ser escritos como suma de tres números enteros positivos consecutivos. De los números que quedan, Samira borra los números que pueden ser escritos como suma de cinco números enteros positivos consecutivos. La cantidad de números que quedan escritos en la pizarra es

   (a) 66

   (b) 60

   (c) 56

   (d) 50

- Opción correcta: (c)
- Solución: Se borran los números que son suma de tres enteros positivos consecutivos. Se borran:
  $1+2+3=6$
  $2+3+4=9$
  y todos los múltiplos de 3, mayores o iguales a 6 y menores a 100. Entonces se borra $99/3-1=32$ números. También debe borrarse los números que son suma de cinco enteros positivos consecutivos. Se borran:
  $1+2+3+4+5=15$
  $2+3+4+5+6=20$
  y todos los múltiplos de 5, mayores o iguales a 15 y menores a 100. Entonces se borra $100/5-2=18$. Se considera que los múltiplos de 3 y 5 se contaron dos veces. Es decir se contaron 15, 30, 45, 60, 75 y 90 dos veces.
  Entonces se borran: $32+18-6=34$ números. Por tanto quedan escritos 56 números.

5. Un barco se encuentra a 4 km de un muelle. Enciende sus luces y empieza a navegar en línea recta del muelle $0,5$ km por minuto. En determinado momento se detiene y luego continua en la misma dirección y a la misma velocidad. Al cabo de una hora y 30 minutos de haber encendido las luces, el barco se encuentra a 37 km del muelle. ¿Cuánto tiempo se detuvo el barco?

   (a) 6

   (b) 12

   (c) 16

   (d) 24

- Opción correcta:(d)
- Solución: Considere que el barco se detiene cuando se encuentra a 37 km del muelle. Antes de que el barco inicie la navegación, se encuentra a 4 km del muelle. Después de la navegación se encuentra a 37 km del muelle. Entonces, el barco ha navegado $37-4=33$ km. Como la velocidad del barco es de $0,5$ km por minuto, se puede deducir que 1 km lo recorre en 2 minutos. Entonces, 33 km los navega en 66 minutos el barco.

  Así que el barco debió estar detenido durante $90-66=24$ minutos.

6. María, Fernando y Santiago tienen cada uno dos fichas enumeradas con números enteros. La suma de las fichas enumeradas de María es 26. Luego Fernando a 26 le suma sus fichas enumeradas y obtiene 41. Por último, Santiago a 41 le suma sus fichas enumeradas y obtiene 58. La menor cantidad de fichas enumeradas con números pares que pueden ser sumadas por María, Fernando y Santiago corresponde a

   (a) 1

   (b) 2

   (c) 3

   (d) 4

- Opción correcta: (b)
- Solución: Observe que las fichas enumeradas de María tiene que ser ambas pares o impares, pues su suma es un número par. Por otro lado, observe que la suma de las fichas enumeradas de Fernando es $41 - 26 = 15$, entonces una de sus fichas tiene que tener enumeración par y la otra impar. Mientras que la suma de las fichas enumeradas de Santiago es $58 - 41 = 17$, entonces una de sus fichas tiene que tener enumeración par y la otra impar. Por lo anterior, la menor cantidad de fichas pares que pueden ser sumadas por María, Fernando y Santiago son dos fichas.

7. En una empresa reconocida desean renovar la junta directiva, para ello se abre un concurso y se postulan las siguientes personas: Pedro, Juan, Karol, Lucía, Emma, Jose y Marta. La junta directiva está compuesta por un presidente, un vicepresidente, un secretario y un director de marketing. Además, se sabe que una persona no puede ocupar dos cargos. ¿Cuántas posibles directivas se pueden formar?

   Opciones de respuesta:

   (a) 823 543

   (b) 840

   (c) 256

   (d) 35

- Opción correcta: (b)
- Solución: La cantidad de juntas directivas se puede calcular multiplicando las posibilidades de puestos para presidente (7) por las de vicepresidente (6) por las de secretario (5) por las de director (4) entonces

$$7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 = 840$$

8. Si a, b, c, d son números primos distintos tales que $a+b+c=42$ y $b+c+d=45$, entonces el valor de $a+b+c+d$ es

   (a) 47

   (b) 49

   (c) 51

   (d) 53

- Opción correcta: (a)
- Solución:
  Como el único número primo par es 2 y $a+b+c=42$, necesariamente alguno de ellos es precisamente el 2. Por otro lado, en $b+c+d=45$ se deduce que todos son impares; por lo tanto, $a=2$, $b+c=40$ y $d=5$. Por lo tanto $a+b+c+d=47$

9. Un número es considerado olcómico si:

   a) tiene todos sus dígitos diferentes.

   b) es el resultado de sumar 4 a un múltiplo de 5.

   Por ejemplo: 49 es olcómico, pues $49 = 45 + 4 = 5 \cdot 9 + 4$. La suma de los dígitos del mayor número olcómico de cuatro dígitos corresponde a

   (a) 22

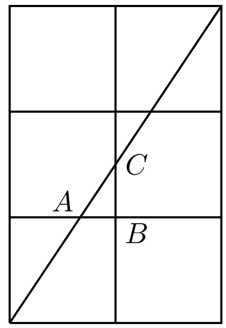
   (b) 28

   (c) 30

   (d) 36

- Opción correcta: (b)
- Solución: De acuerdo con el problema, un número es olcómico si sus dígitos son diferentes. Se esta buscando el mayor número olcómico de cuatro dígito, entonces los primeros tres dígitos del número olcómico es de la forma $987x$. Hace falta determinar el valor del dígito x. Observe que x no puede ser 6 o 5, al sumarle 4 a un número que es múltiplo de 5 termina en 4 o 9. x no puede ser 9, los dígitos tienen que ser distinto. Por lo tanto, el valor de $x = 4$. El mayor número olcómico es 9874. La suma de los dígitos de dicho número es 28.

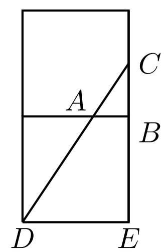
10. En la siguiente figura, el lado de cada cuadrado tiene medida 4, entonces el área del $\triangle ABC$ corresponde a



(a) 1
(b) $\frac{4}{3}$
(c) $\frac{3}{2}$
(d) $\frac{3}{4}$

- Opción correcta: (b)
- Solución:

Consideremos la siguiente figura



Es claro que $BC = 2$ y así $CE = 6$, entonces $(DEC) = 12$, además $(DEC) = (ABC) + (DEBA)$.

Sea $x = AB$ entonces:

$$(DEC) = (ABC) + (DEBA)$$
$$\frac{DE \cdot CE}{2} = \frac{x \cdot BC}{2} + \frac{(x + DE) \cdot BE}{2}$$
$$\frac{4 \cdot 6}{2} = \frac{2x}{2} + \frac{(x+4) \cdot 4}{2}$$
$$12 = x + 2x + 8$$
$$4 = 3x$$
$$\frac{4}{3} = x$$

Así tenemos que $(ABC) = \frac{4}{3}$

11. En un reloj analógico, las agujas de las horas y los minutos se mueven de forma continua a velocidad constante (aunque las dos velocidades son distintas). En algún momento entre las 2:00 p.m. y las 3:00 p.m. las agujas forman un ángulo de 180°. Esto sucede

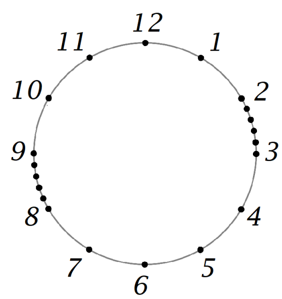
    (a) entre las 2:41 p.m. y 2:42 p.m.

    (b) entre las 2:42 p.m. y 2:43 p.m.

    (c) entre las 2:43 p.m. y 2:44 p.m.

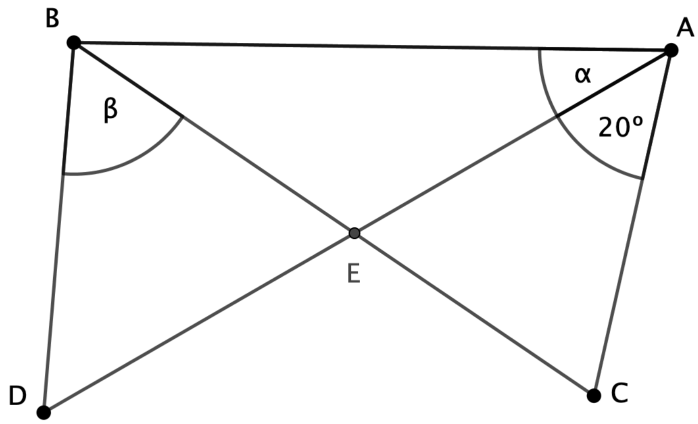
    (d) entre las 2:44 p.m. y 2:45 p.m.

- Opción correcta: (c)
- Solución: Consideremos el reloj analógico con la división usual en 5 minutos: $12, 1, 2, \ldots, 11$. Como la aguja de las horas está entre el 2 y el 3, y las agujas forman un ángulo de 180° entre sí, entonces la aguja de los minutos debe estar entre el 8 y el 9. Es decir, la hora deben ser entre las $2:40$ y $2:45$.



Ahora subdividamos los arcos entre el 2 y el 3, y el 8 y el 9 en cinco partes iguales (correspondientes a los minutos). Cuando la aguja de la hora recorre una de estas subdivisiones, eso corresponde a $60/5 = 12$ minutos. Por lo tanto, si la aguja de la hora está sobre cada una una de estas nuevas subdivisiones entre las 2 y las 3, entonces las horas correspondientes son $2:12$, $2:24$, $2:36$ y $2:48$. Dado que el evento sucede entre $2:40$ y $2:45$, entonces la aguja de la hora debe estar entre la que marca $2:36$ y $2:48$. Si las agujas forman un ángulo de 180°, entonces lo anterior quiere decir que la hora debe estar entre las $2:43$ y $2:44$.

12. En el dibujo tenemos $\overline{DE} = \overline{EA} = \overline{BE} = \overline{AC}$. Además, α y β son medidas de ángulos. ¿ Cuál es el valor de la razón $\dfrac{\alpha}{\beta}$?



(a) $\dfrac{5}{4}$

(b) $\dfrac{2}{7}$

(c) $\dfrac{4}{5}$

(d) $\dfrac{7}{2}$

- Opción correcta: (c)
- Solución:
El $\triangle EAC$ es isósceles además $\measuredangle A + \measuredangle C + \measuredangle E = 180°$ por tanto $\measuredangle E = 80°$

El $\triangle BED$ es isósceles además $\measuredangle \beta + \measuredangle D + \measuredangle E = 180°$ por tanto $\measuredangle \beta = 50°$

$\measuredangle BEA + \measuredangle BEA = 180°$ dado que son par lineal, por tanto $\measuredangle BEA = 100°$

El $\triangle BEC$ es isósceles además $\measuredangle E + \measuredangle \alpha + \measuredangle BEA = 180°$ por tanto $\measuredangle \alpha = 40°$

Por tanto $\dfrac{\alpha}{\beta} = \dfrac{40}{50} = \dfrac{4}{5}$

II Parte: Desarrollo **Valor 14 puntos, 7 puntos c/u**

Instrucciones: Conteste (o resuelva) en forma clara y ordenada los siguientes ejercicios. En esta parte deben desarrollar y escribir **todos** los procedimientos que le permitieron llegar a su respuesta.

1. Cuatro amigos de apellidos Garro, Benavides, Acuña y Brenes tienen como lengua materna el español. Cada uno de ellos habla exactamente dos idiomas distintos al español. Uno de ellos habla francés, dos hablan italiano, dos hablan alemán y 3 hablan inglés. Se sabe que:

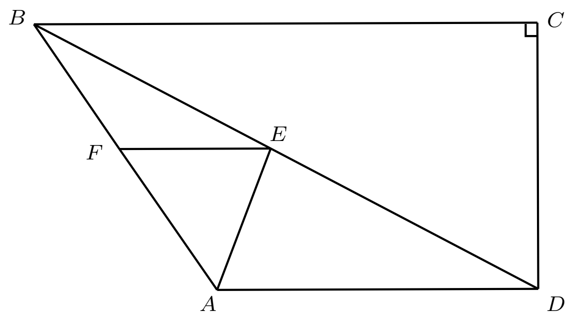
   - Carlos no habla inglés.
   - Tanto Mario como el de apellido Brenes hablan alemán.
   - Alonso habla italiano.
   - El de apellido Benavides no habla ninguno de los idiomas que habla Daniel y el de apellido Acuña.

   Determine el apellido de Carlos, de Mario, de Alonso y de Daniel, e indique los idiomas que habla cada uno de ellos.

- Solución: Dado que Carlos no habla inglés y hay 3 amigos que sí hablan dicho idioma, entonces Mario, Alonso y Daniel hablan inglés. Luego, como El de apellido Benavides no habla ninguno de los idiomas que habla Daniel y el de apellido Acuña, y como Daniel habla inglés, entonces Carlos debe ser el de apellido Benavides. Alonso no puede ser el de apellido Brenes porque si no hablaría 3 idiomas: inglés, alemán e italiano. Así que Daniel debe ser el de apellido Brenes y habla inglés y alemán. Finalmente, Carlos habla francés e italiano, por lo que Mario es el de apellido Acuña (habla inglés y alemán) y Alonso es el de apellido Garro y habla inglés e italiano.

2. Sea $\square ABCD$ un trapecio rectángulo con $\overline{AD} \parallel \overline{BC}$ y $\overline{BC} \perp \overline{CD}$, y sean E, F puntos tales que $B-E-D$, $B-F-A$, $\overline{EF} \parallel \overline{AD}$ y $EF = EA$. Si $m\angle ABC = 55°$ y $\overline{BD}$ biseca al $\angle ABC$ determine $m\angle FEA$.

- Solución: Considere la figura



Como $m\angle ABC = 55°$ y $\overline{BD}$ biseca al $\angle ABC$ entonces $m\angle ABD = m\angle CBD = \frac{55°}{2}$ y así $m\angle BDA = \frac{55°}{2}$ por ser alternos internos entre paralelas y también $m\angle FEB = \frac{55°}{2}$ por ser correspondientes entre paralelas.

Por suma de ángulos internos del $\triangle BFE$ se tiene que $m\angle BFE = 125°$. y por teorema del ángulo externo en el $\triangle FEA$ se tiene que $125° = m\angle FEA + m\angle AFE$ y así $125° - m\angle FEA = m\angle AFE$.

Como $EF = EA$ entonces $\triangle FEA$ es isósceles y así $m\angle AFE = m\angle FAE$, por suma de ángulos internos del $\triangle FEA$ tenemos que $m\angle AFE + m\angle FAE + m\angle FEA = 180°$ y así $2m\angle AFE + m\angle FEA = 180°$ y sustituyendo $m\angle AFE$ tenemos $2 \cdot (125° - m\angle FEA) + m\angle FEA = 180°$ y así $250° - m\angle FEA = 180°$ de donde se tiene que $m\angle FEA = 70°$