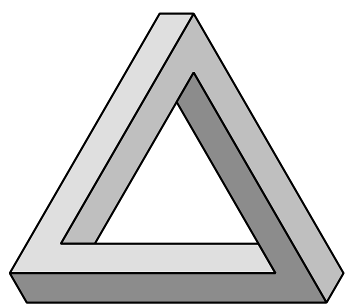
XXXIV Olimpiada Costarricense de Matemáticas

MEP–UCR–ITCR–UNA–UNED–MICITT

Solución

II Eliminatoria



Nivel II

(8° – 9°)

2022

INDICACIONES GENERALES

Estimado estudiante:

La Comisión de las Olimpiadas Costarricenses de Matemáticas 2022 le saluda y le da la más cordial bienvenida a la Segunda Eliminatoria Nacional de estas justas académicas, deseándole los mayores éxitos.
La prueba consta de un total de 12 preguntas de selección única y 2 de desarrollo.

Puede consultar la lista de estudiantes clasificados a partir del **viernes 8 de Julio**, en la siguiente dirección electrónica:

www.olcoma.ac.cr

- Esta eliminatoria tiene un formato virtual por tanto las respuestas a las preguntas que se le formulan, deben ser consignadas ÚNICAMENTE en la plataforma de EstudiaU de la UNED. En los casos debidamente justificados y comunicados a la comisión, se hará en la hoja de respuestas que se le ha entregado.
- Debe trabajar en forma individual.
- Los dibujos que aparecen en la prueba no necesariamente están hechos a escala.
- Los únicos instrumentos cuyo uso se permite son los necesarios para escribir y dibujar. Se prohíbe el uso de libros, libretas de notas, tablas y calculadora.
- El examen tiene una duración máxima de tres horas.

SIMBOLOGÍA

$\overline{AB}$	segmento de extremos A y B	$\angle ABC \cong \angle DEF$	congruencia de ángulos
AB	medida de $\overline{AB}$	$\triangle ABC \cong \triangle DEF$	congruencia de triángulos
$\overrightarrow{AB}$	rayo de extremo A y que contiene a B	$ABC \leftrightarrow DEF$	correspondencia respectiva entre puntos
$\overleftrightarrow{AB}$	recta que contiene los puntos A y B	$\triangle ABC \sim \triangle DEF$	semejanza de triángulos
$\angle ABC$	ángulo de rayos $\overrightarrow{BA}$ y $\overrightarrow{BC}$	$\overline{AB} \cong \overline{CD}$	congruencia de segmentos
$m\angle ABC$	medida de $\angle ABC$	$\widehat{AB}$	arco de extremos A y B
$\triangle ABC$	triángulo de vértices A, B, C	$m\widehat{AB}$	medida de $\widehat{AB}$
$\square ABCD$	cuadrilátero de vértices A, B, C, D	(ABC)	área de ΔABC
$\parallel$	paralelismo	$(ABCD)$	área de $\square ABCD$
$\perp$	perpendicularidad	$P-Q-R$	P, Q, R puntos colineales, con Q entre los puntos P y R

I Parte: Selección única **Valor 24 puntos, 2 puntos c/u**

Instrucciones:En cada uno de los siguientes ejercicios se le proporcionan cuatro opciones de respuestas, resuelva cada ejercicio y seleccione la opción que antecede a la respuesta correcta.

Items II Eliminatoria

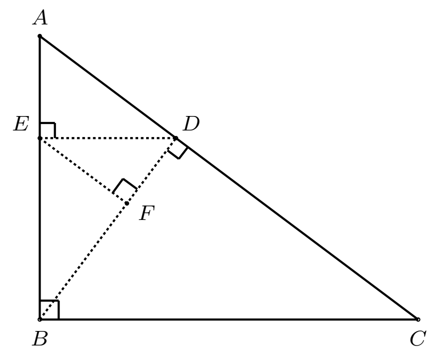
1. De acuerdo con los datos de la figura en la cual $AB = 3$, $BC = 4$, el valor de EF corresponde a

   (a) $\frac{125}{144}$

   (b) $\frac{144}{125}$

   (c) $\frac{108}{125}$

   (d) $\frac{125}{108}$



- Opción correcta: (b)
- Solución:
  Por Pitágoras se tiene que $AC = 5$
  Si $\alpha = m\angle BAC$ y $\beta = m\angle ACB$, y se realiza la suma de ángulos internos para todos los triángulos rectángulos formados en el interior del $\triangle ABC$, se tiene:
  Por tanto $\triangle ABC \sim \triangle ADB \sim \triangle DEB \sim \triangle DFE$ por criterio AA.
  Usando $\triangle ABC$ y $\triangle ADB$ se tiene que
  $\dfrac{AC}{AB} = \dfrac{BC}{BD} \Rightarrow \dfrac{5}{3} = \dfrac{4}{BD} \Rightarrow BD = \dfrac{12}{5}$

  Usando $\triangle ABC$ y $\triangle DEB$ se tiene que

  $\dfrac{AC}{BD} = \dfrac{AB}{ED} \Rightarrow \dfrac{5}{\frac{12}{5}} = \dfrac{3}{ED} \Rightarrow ED = \dfrac{36}{25}$ Usando $\triangle ABC$ y $\triangle DFE$ se tiene que
  $\dfrac{AC}{ED} = \dfrac{BC}{EF} \Rightarrow \dfrac{3}{\frac{36}{25}} = \dfrac{4}{EF} \Rightarrow EF = \dfrac{144}{125}$

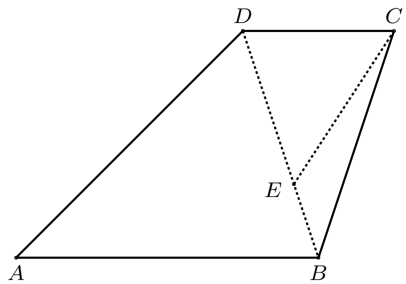
2. Dada la siguiente figura se tiene que $\overline{CD} \parallel \overline{AB}$, $AB = 2CD$ y $DB = 3EB$, determine $\dfrac{(ABCD)}{(DCE)}$

(a) 9

(b) 3

(c) $\frac{9}{2}$

(d) $\frac{1}{9}$



- Opción correcta: (c)

- Solución: La razón de las alturas h_1 del trapecio $\square ABCD$ y h_2 del $\triangle DCE$ desde la base $\overline{DC}$ viene dada por $\dfrac{h_1}{h_2} = \dfrac{DB}{DE} = \dfrac{3}{2}$, así tenemos:

$$\frac{(\square ABCD)}{(\triangle DCE)} = \frac{h_1 \cdot (DC + AB)}{h_2 \cdot DC} = \frac{h_1}{h_2} \cdot \frac{3DC}{DC} = \frac{3}{2} \cdot 3 = \frac{9}{2}$$

3. Considere las siguientes listas de números escritos en forma fraccionaria:
   Lista 1: $\frac{0}{2022}, \frac{1}{2022}, \frac{2}{2022}, \ldots, \frac{2021}{2022}, \frac{2022}{2022}$.

   Lista 2: $\frac{0}{9099}, \frac{1}{9099}, \frac{2}{9099}, \ldots, \frac{9098}{9099}, \frac{9099}{9099}$.
   En la primera lista se tiene 2023 fracciones y en las segunda lista se tiene 9100 fracciones. La cantidad de fracciones de la primera lista que son iguales a la segunda lista corresponde a

   a) 996
   b) 1012
   c) 2022
   d) 3033

- Opción correcta: (b)
- Solución: Se tiene 1012 fracciones iguales de la primera lista con la segunda lista. Observe que $2022 = 2 \cdot 1011$ y $9099 = 3^2 \cdot 1011$. Luego, $\frac{j}{2022} = \frac{k}{9099}$ si y solo si $\frac{j}{2} = \frac{k}{9}$ y entonces $k = \frac{9j}{2}$ por lo que k será entero si j es par. Para cada j par, con $0 \leq j \leq 2022$, se tendrán que $\frac{j}{2022}$ está en la segunda lista y de estos números hay 1012.

4. Si Diana piensa en dos números naturales, tales que, si los suma o los resta el resultado es un número primo, pero la diferencia de sus cuadrados es 253, entonces el producto de los números que Diana esta pensando corresponde a
   (a) 102
   (b) 253
   (c) 328
   (d) 476

- Opción correcta: (a)
- Solución:
  Tomemos x como el número mayor y y como el número menor.
  Se tiene que $x+y$ es primo y $x-y$ es primo.
  Además $x^2-y^2=253$
  Como $253=11\cdot 23$
  Usando la formula notable
  $x^2-y^2=(x-y)(x+y)=253$
  $(x-y)(x+y)=11\cdot 23$
  entonces $x+y=23$ y $x-y=11$
  Por lo que $x=17$ y $y=6$ El producto de estos números es $17\cdot 6=102$

5. Sean x, y números reales que satisfacen la igualdad $(4x-1)^2 + (5x+3y)^2 = 0$. Determine el valor de $x - y$.

   (a) $\frac{-2}{3}$

   (b) $\frac{-1}{6}$

   (c) $\frac{1}{6}$

   (d) $\frac{2}{3}$

- Opción correcta: *d*
- Solución:
  Para que la expresión $(4x-1)^2+(5x+3y)^2 = 0$ debe cumplirse que $(4x-1)^2 = 0$ y $(5x+3y)^2 = 0$. Así:

$$4x - 1 = 0 \Longrightarrow x = \frac{1}{4}$$

Sustituyendo este valor en $5x + 3y = 0$ se tiene

$$5 \cdot \frac{1}{4} + 3y = 0 \Longrightarrow 3y = \frac{-5}{4} \Longrightarrow y = \frac{-5}{12}$$

Finalmente,

$$x - y = \frac{1}{4} - \frac{-5}{12} = \frac{2}{3}$$

6. La cantidad de números positivos de tres dígitos que son divisibles por 12 pero que no son divisibles por 9 es

   (a) 45

   (b) 50

   (c) 55

   (d) 60

- Solución:
  Los números de tres dígitos divisibles por 12 van desde $108 = 12 \cdot 9$ hasta $996 = 12 \cdot 83$, los cuales son $83 - 9 + 1 = 75$ números.

  De estos se deben restar los que son divisibles por 9, es decir, números que son divisibles por 12 y 9 al mismo tiempo. Como el mínimo común múltiplo de 12 y 9 es 36, dichos números deben ser divisibles por 36. Luego, la cantidad de números de tres dígitos divisibles por 36 van desde $108 = 36 \cdot 3$ hasta $972 = 36 \cdot 27$, los cuales son $27 - 3 + 1 = 25$ números.

  Entonces hay $75 - 25 = 50$ números que cumplen lo pedido.

7. Si a, b son números reales tales que $\dfrac{2b-a}{a+b} = \dfrac{a-b}{2b+a}$, entonces el valor de $\dfrac{3b^2}{2a^2}$ es

   (a) $\dfrac{3}{5}$

   (b) $\dfrac{2}{5}$

   (c) $\dfrac{5}{2}$

   (d) $\dfrac{5}{3}$

- Solución:

$$\begin{aligned}
\frac{2b-a}{a+b} = \frac{a-b}{2b+a} \quad &\Rightarrow \quad (2b-a)(2b+a) = (a-b)(a+b) \\
&\Rightarrow \quad 4b^2 - a^2 = a^2 - b^2 \\
&\Rightarrow \quad 5b^2 = 2a^2 \\
&= \quad b^2 = \frac{2}{5}a^2
\end{aligned}$$

Luego $\dfrac{3b^2}{2a^2} = \dfrac{3 \cdot \frac{2}{5}a^2}{2a^2} = \dfrac{3}{5}$

8. Sea $\square ABCD$ un cuadrilátero tal que $m\angle BAD = 60°$, $m\angle ABC = 90°$ y $m\angle ADC = 120°$. Si M es el punto medio de $\overline{BC}$, $m\angle CMD = 45°$ y $MD = 6$, entonces el valor de AB es

   (a) $3\sqrt{2} + 2\sqrt{6}$

   (b) $2\sqrt{2} + 3\sqrt{6}$

   (c) $4\sqrt{6}$

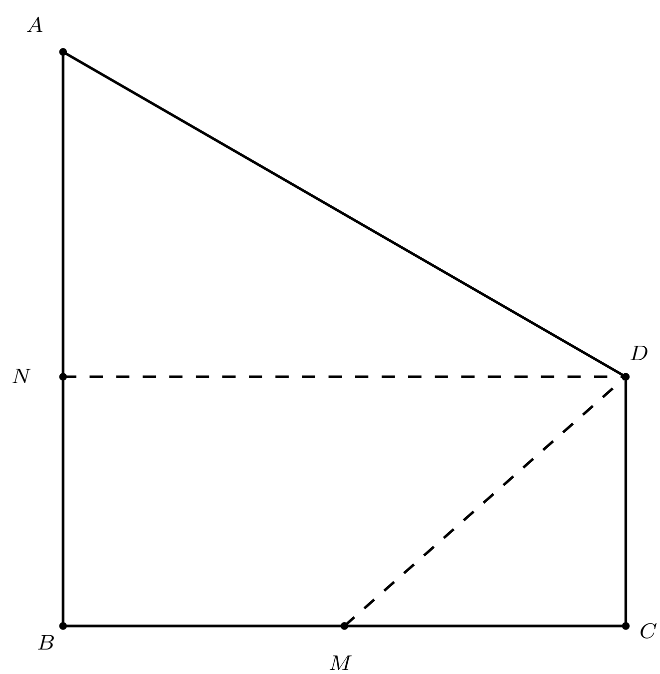
   (d) $6\sqrt{2}$

- Solución:
  Como la suma de los águlos internos de un cuadrilátero es $360°$, de la información dada se deduce que $m\angle BCD = 90°$. Sea N el pie de la perpendicular a $\overline{AB}$ desde D, entonces $\square BCDN$ es un rectángulo.

  El $\triangle MCD$ es rectángulo isósceles, con $MD = 6$, de donde $MC = CD = 3\sqrt{2}$. Entonces $BN = 3\sqrt{2}$ y $BC = ND = 6\sqrt{2}$.

  Luego, el $\triangle AND$ es semiequilátero, con $m\angle BAD = m\angle NAD = 60°$ y $ND = 6\sqrt{2}$, de donde $AD = 4\sqrt{6}$ y $AN = 2\sqrt{6}$.

  Entonces, en $AB = 3\sqrt{2} + 2\sqrt{6}$,



9. Hay tres cajas con bolas azules (A) y rojas (R), una de las cuales tiene tres azules, otra dos azules y una roja, y otra una azul y dos rojas. Se tienen etiquetas AAA, AAR y ARR para identificarlas (según la cantidad de bolas azules y rojas en cada caja), pero la persona encargada de hacerlo se equivoca y coloca mal todas las etiquetas. Es decir, ninguna etiqueta corresponde con la caja respectiva.

   El menor número de bolas que hay que sacar, sin ver el interior de la caja, para poder determinar con total certeza el contenido correcto de las tres cajas es

   (a) Una bola

   (b) Dos bolas

   (c) Tres bolas

   (d) Cuatro bolas

- Opción correcta: (b)
- Solución: Empezamos viendo que sacar una bola no es suficiente. Por ejemplo, independiente de la caja de la que se escoja sacar la bola, si la bola que se saca es azul no es posible concluir nada, pues las tres cajas tienen al menos una bola azul.

  Vamos a demostrar que sacar dos bolas es suficiente. Tomemos dos bolas de la caja con etiqueta AAR. Sabemos que esta caja corresponde a alguna de las configuraciones AAA o ARR. Si alguna de las dos bolas es roja, entonces su etiqueta correcta tuvo que haber sido ARR; a partir de esto deducimos que la etiqueta correcta de la que tiene AAA tuvo que haber sido AAR, y por lo tanto la de ARR tuvo que haber sido AAA. En caso contrario, es decir, si las dos bolas fueron azules, entonces su etiqueta correcta tuvo que haber sido AAA; a partir de esto deducimos que la etiqueta correcta de la que tiene ARR tuvo que haber sido AAR, y por lo tanto la de AAA tuvo que haber sido ARR.

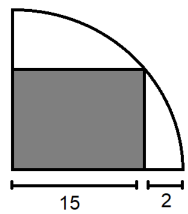
10. Considere un cuarto de círculo con un rectángulo inscrito como se muestra en la figura (la cual no está hecha a escala). Si la longitud de la base del rectángulo es 15 y la longitud del segmento restante es 2, entonces la razón entre las áreas del cuarto de circulo y el rectágulo corresponde a

   (a) $\dfrac{289\pi}{480}$

   (b) $\dfrac{289\pi}{900}$

   (c) $\dfrac{17\pi}{60}$

   (d) $\dfrac{\pi}{4}$



- Opción correcta: (c)

- Solución: En primer lugar, observamos que el radio del círculo es 17. Con esto podemos calcular el área del cuarto del círculo

$$C = \frac{1}{4}\pi \cdot 17^2 = \frac{289\pi}{4}.$$

Para determinar el área del rectángulo hay que encontrar la altura h. Para este fin usamos el teorema de Pitágoras:

$$h^2 + 15^2 = 17^2 \Longrightarrow h^2 = 17^2 - 15^2 = 64$$

Por lo tanto, $h = 8$ y el área del rectángulo es $R = 15 \cdot 8 = 120$. Con esto deducimos que la razón entre las áreas del cuarto de circulo y el rectágulo es

$$\frac{C}{R} = \frac{289\pi}{480}.$$

11. Tres amigas Alexandra, Mariel y Sofía lanzan dos dados al aire. Alexandra les propone establecer un evento con la sumas de los números obtenidos en las caras al caer y ver quién gana. Mariel indica que la suma será un cuadrado perfecto. Sofía menciona que la suma será un múltiplo de 5, mientras que Alexandra dice que la suma será un número mayor que 9. Con certeza se puede asegurar que

    (a) Alexandra tiene la mayor probabilidad de ganar.

    (b) Mariel tiene la mayor probabilidad de ganar.

    (c) Sofía tiene la mayor probabilidad de ganar.

    (d) Mariel y Sofía tienen la misma probabilidad de ganar

- Opción correcta: *d*

- Solución:
  Al lanzar dos dados al aire se tienen $6 \cdot 6 = 36$ posibilidades. En la siguiente tabla se detallan las sumas:

2	3	4	5	6	7
3	4	5	6	7	8
4	5	6	7	8	9
5	6	7	8	9	10
6	7	8	9	10	11
7	8	9	10	11	12

Mariel: $P(M) = \dfrac{7}{36}$

Sofía: $P(S) = \dfrac{7}{36}$

Alexandra: $P(A) = \dfrac{6}{36}$

Se puede concluir que Mariel y Sofía tienen la misma probabilidad de acertar.

12. Un entrenador de atletismo programa un calentamiento con sus muchachos de la siguiente forma: Coloca una línea de salida y a 20 metros de la línea de salida coloca un primer cono, a partir de este coloca 24 conos más a 8 metros de distancia uno de otro. Los atletas deben tocar el primer cono y regresar a línea de salida, luego tocar el segundo cono y regresar a línea y así sucesivamente hasta tocar el cono 25 y regresar a la línea. Al finalizar el calentamiento, la distancia en metros recorrida por cada atleta es

    (a) $2900m$

    (b) $3100m$

    (c) $5800m$

    (d) $6200m$

- Opción correcta: c
- Solución:
  Observe que cada atleta debe regresar a línea por lo cual el recorrido se duplica. Sea d la distancia total recorrida, de esta forma se tiene que

$$\begin{aligned} d &= 2 \cdot (20 + (20 + 8 \cdot 1) + (20 + 8 \cdot 2) + ... + (20 + 8 \cdot 24)) \\ &= 2 \cdot (20 \cdot 25 + 8 \cdot (1 + 2 + 3 + ... + 24)) \\ &= 2 \cdot \left(20 \cdot 25 + 8 \cdot \frac{24 \cdot 25}{2}\right) \\ &= 2 \cdot (500 + 8 \cdot 300) \\ &= 2 \cdot 2900 \\ &= 5800 \end{aligned}$$

II Parte: Desarrollo **Valor 14 puntos, 7 puntos c/u**

Instrucciones: Conteste (o resuelva) en forma clara y ordenada los siguientes ejercicios. En esta parte deben desarrollar y escribir **todos** los procedimientos que le permitieron llegar a su respuesta.

1. Alexander, Erick y Leonel juegan un juego durante k rondas. En cada ronda se asigna x puntos al que finalice primero, y puntos al segundo y z puntos al tercero, con $x > y > z > 0$. Al finalizar el juego, Erick obtiene 21 puntos, Leonel 11 puntos y Alexander 8 puntos. Si Leonel ganó la primer ronda entonces, ¿quién obtuvo más veces el segundo lugar?, ¿cuántos turnos se jugaron? ¿cuál fue la distribución de pts que realizaron?

   Solución:
   Observe que la cantidad de puntos asignada por turnos corrresponde a $x + y + z$. Si se juega k turnos y el puntaje final del juego fue de 21, 11 y 8 entonces $k(x + y + z) = 21 + 11 + 8 = 40$. Además, $x > y > z > 0$, con lo cual se deduce que $z \geq 1$, $y \geq 2$ y $x \geq 3$, es decir, $x + y + z \geq 6$, por lo tanto, la cantidad máxima de turnos jugados fue $k \leq \frac{40}{6}$, con k siendo un divisor de 40. De esta forma $k \in \{1, 2, 4, 5\}$

   a) Si $k = 1$ y Leonel ganó la primer ronda entonces contradice la hipotesis $x > y > z > 0$, además el ganador final fue Erick.

   b) Si $k = 2$ y Leonel ganó la primer ronda significa que el puntaje máximo otorgado por turno es menor a 11, por cual sería imposible que Erick obtenga 21 puntos en 2 turnos, si en el primero no ganó.

   c) Si $k = 4$, entonces $x + y + z = 10$. Las posibles tripletas que cumplan dicha condición son $(7, 2, 1)$, $(6, 3, 1)$, $(5, 4, 1)$, $(5, 3, 2)$.

   1) Si el puntaje elegido es $(7, 2, 1)$ y Leonel ganó la primer ronda, entonces Erick deberá ganar las otras tres rondas pero igualaría los 21 pts y necesariamente sumó pts en la primer ronda. Por lo tanto, no es posible.
   2) Si es $(6, 3, 1)$ y Leonel ganó la primer ronda, entonces Erick ganó las otras 3 rondas y finaliza segundo en la primer ronda para satisfacer lo indicado en la hipótesis, mientras Leo gana la primera, un segundo lugar en cualquiera de las otras 3 rondas y tercero en otras dos, por cual Alexander se ubicaría segundo en 2 de las rondas. Esta distribución cumple lo indicado.
   3) Si es $(5, 4, 1)$, al ganar Leonel la primer ronda, será imposible que Erick sume 21 pts.
   4) Si es $(5, 3, 2)$, al ganar Leonel la primer ronda, será imposible que Erick sume 21 pts.

   d) Si $k = 5$, entonces $x + y + z = 8$, por lo cual las posibles tripletas de distribución de puntos es $(4, 3, 1)$ y $5, 2, 1$.

   1) Si el puntaje elegido es $(4, 3, 1)$ y Leonel ganó la primer ronda, entonces Erick no llegará a 21 pts ni ganando las 4 rondas restantes.
   2) Si es $(5, 4, 1)$, al ganar Leonel la primer ronda, Erick deberá ganar las otras 4 rondas y haber quedado tercero en la primer ronda. Alexander necesariamente queda segundo en el primer ronda, y tendrá que quedar tercero en las otras 4 para sumar los 8pts en total y finalmente Leonel sumará 5 de la primer ronda y será segundo en las otras 4 pero sobrepasa los 11 pts obtenidos en total.

   Se jugaron 4 rondas, con una distribución de puntos $(6, 3, 1)$ y Alexander fue quién obtuvo más veces el segundo lugar.

2. Considere a y b enteros positivos, con $b < 15$. Si $10^{2022} = 15a + b$, determine la suma de los dígitos de $a + b$.

- Solución: Observe que cuando dividimos las potencias de 10 entre 15 obtenemos el siguiente patrón:

$$10^2 = 15 \cdot 6 + 10$$
$$10^3 = 15 \cdot 66 + 10$$
$$10^4 = 15 \cdot 666 + 10$$
$$10^5 = 15 \cdot 6666 + 10$$
$$10^6 = 15 \cdot 66666 + 10$$
$$10^n = 15 \cdot \overbrace{66666 \cdots 6666666}^{n-1} + 10$$

Es decir
$$10^{2022} = 15 \cdot \overbrace{66666 \cdots 6666666}^{2021} + 10$$
con lo cual $a = \overbrace{66666 \cdots 6666666}^{2021}$ y $b = 10$. Finalmente $a + b = \overbrace{66666 \cdots 6666676}^{2021}$ entonces la suma de los dígitos de $a + b$ corresponde a $6 \cdot 2020 + 7 = 12127$.