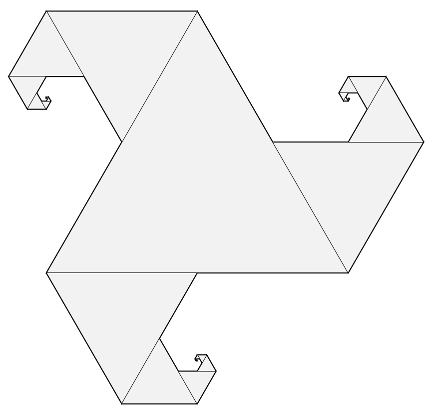
XXXIV OLIMPIADA COSTARRICENSE DE MATEMÁTICAS

MEP - UCR - TEC - UNA - UNED - MICITT

SOLUCIÓN
II ELIMINATORIA



Nivel III

$(10^{\circ} - 11^{\circ} - 12^{\circ})$

2022

Estimado estudiante:

La Comisión de las Olimpiadas Costarricenses de Matemáticas 2022 le saluda y le da la más cordial bienvenida a la Primera Eliminatoria Nacional de estas justas académicas, deseándole los mayores éxitos.
La prueba consta de un total de 12 preguntas de selección única y dos preguntas de desarrollo.

Puede consultar la lista de estudiantes clasificados a partir del **viernes 8 de Julio**, en la siguiente dirección electrónica:

www.olcoma.ac.cr

INDICACIONES GENERALES

- Esta eliminatoria tiene un formato virtual por tanto las respuestas a las preguntas que se le formulan, deben ser consignadas ÚNICAMENTE en la plataforma de EstudiaU de la UNED. En los casos debidamente justificados y comunicados a la comisión, se hará en la hoja de respuestas que se le ha entregado.
- Debe trabajar en forma individual.
- Los dibujos que aparecen en la prueba no necesariamente están hechos a escala.
- Los únicos instrumentos cuyo uso se permite son los necesarios para escribir y dibujar. Se prohíbe el uso de libros, libretas de notas, tablas y calculadora.
- El examen tiene una duración máxima de tres horas.

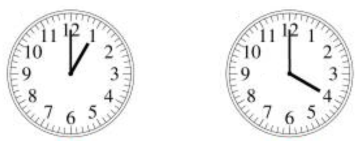
SIMBOLOGÍA

$\overline{AB}$	segmento de extremos A y B	$\angle ABC \cong \angle DEF$	congruencia de ángulos
AB	medida de $\overline{AB}$	$\triangle ABC \cong \triangle DEF$	congruencia de triángulos
$\overrightarrow{AB}$	rayo de extremo A y que contiene a B	$ABC \leftrightarrow DEF$	correspondencia respectiva entre puntos
$\overleftrightarrow{AB}$	recta que contiene los puntos A y B	$\triangle ABC \sim \triangle DEF$	semejanza de triángulos
$\angle ABC$	ángulo de rayos $\overrightarrow{BA}$ y $\overrightarrow{BC}$	$\overline{AB} \cong \overline{CD}$	congruencia de segmentos
$m\angle ABC$	medida de $\angle ABC$	$\widehat{AB}$	arco de extremos A y B
$\triangle ABC$	triángulo de vértices A, B, C	$m\widehat{AB}$	medida de $\widehat{AB}$
$\square ABCD$	cuadrilátero de vértices A, B, C, D	(ABC)	área de ΔABC
$\parallel$	paralelismo	$(ABCD)$	área de $\square ABCD$
$\perp$	perpendicularidad	$P-Q-R$	P, Q, R puntos colineales, con Q entre los puntos P y R

I Parte: Selección única **Valor 24 puntos, 2 puntos c/u**

Instrucciones:En cada uno de los siguientes ejercicios se le proporcionan cuatro opciones de respuestas, resuelva cada ejercicio y seleccione la opción que antecede a la respuesta correcta.

1. En una habitación rectangular hay dos relojes idénticos, de agujas, en paredes opuestas. Dichos relojes están colocados de la forma usual, funcionan perfectamente, pero no tienen la hora correcta. Carlos observa que cuando su reloj de pulsera marca la 1:00 y el reloj en la pared a su izquierda marca las 4:00; además, en ese instante las agujas de las horas de los relojes en las paredes son paralelas y las agujas de los minutos apuntan al 12. Más tarde, Carlos entra de nuevo a la habitación y observa que su reloj de pulsera marca las 4:00.



1:00 *4:00*

Basándose en la información anterior, el reloj de la derecha puede marcar

(a) las 5:00 o las 7:00.

(b) las 7:00 o las 9:00.

(c) las 9:00 o las 11:00.

(d) las 5:00 o las 11:00.

- Opción correcta: (d)
- A las 1:00 Carlos observa que las agujas horarias son paralelas, es decir que en reloj de la derecha (abajo en la figura) puede marcar las 2:00 o 8:00. Por lo tanto, a las 4:00 el reloj de la izquierda marca las 7:00, mientras que el de la derecha puede marcar 5:00 (2:00 + 3 horas) o bien 11:00 (8:00 + 3 horas).

Carlos *Izquierda* *Derecha*

2. Sea $P(x)$ un polinomio de grado 3 tal que $-1, -2$ y 3 son sus ceros. Con certeza, se puede afirmar que un factor del polinomio $Q(x) = P(x) - x^3 + 3x^2 - 4x + 12$ corresponde a

   a) $x + 1$
   b) $x + 2$
   c) $x - 3$
   d) $x + 3$

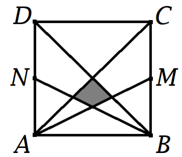
- Opción correcta: (c)
- Solución: Como $-1, -2, 3$ son ceros de $P(x)$, por el teorema del factor se tiene que $x+1$, $x+2$ y $x-3$ son factores del polinomio. Como $P(x)$ es un polinomio cúbico, entonces lo anterior implica que existe una constante C tal que $P(x) = C(x+1)(x+2)(x-3)$.

  Además, $-x^3 + 3x^2 - 4x + 12 = -x^2(x-3) - 4(x-3) = -(x-3)(x^2+4)$. Por lo tanto,

  $$Q(x) = C(x+1)(x+2)(x-3) - (x-3)(x^2+4) = (x-3)[C(x+1)(x+2) - (x^2+4)].$$

  Lo anterior implica que $x - 3$ es un factor de $Q(x)$. Para descartar las otras opciones, se puede tomar $C = 1$ y obtener $Q(x) = (x-3)(3x-2)$, el cual no contiene ninguno de los otros factores.

3. Sea $\square ABCD$ un cuadrado con área 72 cm^2, y sean M y N los puntos medios de $\overline{BC}$ y $\overline{AD}$, respectivamente.



El área del cuadrilátero sombreado en la figura es igual a

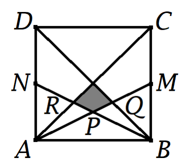
(a) 2 cm^2

(b) 3 cm^2

(c) 4 cm^2

(d) 5 cm^2

- Opción correcta: (b)
- Solución: Sea P, Q, R los puntos de intersección como en la figura.



Empezamos observando que el cuadrilátero $ABMN$ es un rectángulo de área 36 cm^2, por lo que $(ABP) = (36 \text{ cm}^2)/4 = 9 \text{ cm}^2$.

Por ángulos alternos entre paralelas notamos que $\triangle ANR \sim \triangle CBR$. Esto implica que

$$\frac{AR}{CR} = \frac{AN}{CB} = \frac{1}{2}.$$

Las alturas desde B en los triángulos ABR y CBR son iguales, por lo que

$$\frac{(ABR)}{(CBR)} = \frac{AR}{CR} = \frac{1}{2}.$$

Como $(ABR) + (CBR) = (ABC) = 36 \text{ cm}^2$, entonces lo anterior implica que $(ABR) = 12 \text{ cm}^2$ y $(CBR) = 24 \text{ cm}^2$. Recordando que $(ABP) = 9 \text{ cm}^2$, deducimos que $(APR) = (ABR) - (ABP) = 3 \text{ cm}^2$. Análogamente podemos obtener que $(BPQ) = 3 \text{ cm}^2$. Finalmente, el área de un cuarto de cuadrado es $72 \text{ cm}^2/4 = 18 \text{ cm}^2$, con lo que concluimos que el área del cuadrilátero sombreado es $[18 - 9 - 3 - 3] \text{ cm}^2 = 3 \text{ cm}^2$.

4. El número de pares ordenados de números reales (a, b) que satisfacen las ecuaciones

$$\begin{cases} 3a^2 + 2b^2 & = & 7ab \\ a^2 - b^2 & = & 12 \end{cases}$$

corresponde a

(a) 1

(b) 2

(c) 3

(d) 4

- Opción correcta: (b)
- Solución: De la primera ecuación se obtiene que

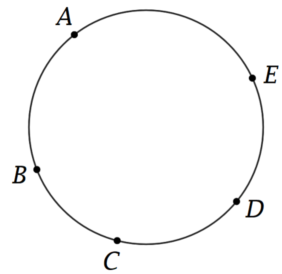
$$3a^2 - 7ab + 2b^2 = 0 \Longrightarrow (a - 2b)(3a - b) = 0 \Longrightarrow a = 2b \vee a = b/3.$$

Si $a = 2b$, entonces la segunda ecuación implica que $3b^2 = 12 \Longrightarrow b = \pm 2$. Por lo tanto $a = 2b = \pm 4$, y así se obtienen dos pares ordenados de soluciones: $(4, 2)$ y $(-4, -2)$.

Si $a = b/3$, la segunda ecuación implica que $\dfrac{-8}{9}b^2 = 12$ y esto significa que no hay soluciones reales.

Por tanto existen solo dos pares ordenados (a, b) que satisfacen el sistema de ecuaciones.

5. Sean A, B, C, D, E puntos en un círculo en sentido antihorario (como en la figura).



Suponga que $AB = DE$ y $AC = CE$ (la figura es ilustrativa y estas hipótesis no están representadas en ella). Considere las siguientes afirmaciones:

I) $BC = CD$,

II) $AD = BE$,

III) $AE = BD$.

Entonces, con total certeza se puede afirmar que son verdaderas

(a) solo I y II

(b) solo I y III

(c) solo II y III

(d) I, II y III

- Opción correcta: (a)
- Solución: De acuerdo con el dibujo, la hipótesis $AB = DE$ implica que los arcos $\widehat{AB}$ y $\widehat{DE}$ tienen la misma medida. Con esto se deduce que

$$m\widehat{ABD} = m\widehat{AB} + m\widehat{BCD} = m\widehat{DE} + m\widehat{BCD} = m\widehat{BDE}.$$

La igualdad de la medida de estos arcos implica que $AD = BE$, por lo que II es verdadera.

Igualmente, la condición $AC = CE$ implica que los arcos que los arcos $\widehat{ABC}$ y $\widehat{CDE}$ tienen la misma medida. Con esto se deduce que

$$m\widehat{BC} = m\widehat{ABC} - m\widehat{AB} = m\widehat{CDE} - m\widehat{DE} = m\widehat{CD}.$$

La igualdad de la medida de estos arcos implica que $BC = CD$, por lo que I es verdadera.

Ahora vamos a determinar si es posible afirmar con certeza que III es verdadera o no. Anteriormente dedujimos que las hipótesis del problema implican la igualdad de arcos $m\widehat{AB} = m\widehat{DE}$ y $m\widehat{BC} = m\widehat{CD}$.

Sin embargo, podemos ver que los pasos anteriores son reversibles y esta igualdad de arcos también implica las hipótesis del problema. Si se mantienen fijos los puntos B, C, D de manera que $m\widehat{BC} = m\widehat{CD}$ y se varían A y E de forma que se siga cumpliendo $m\widehat{AB} = m\widehat{DE}$, es posible ver que no necesariamente se puede deducir que $AE = BD$. Por lo tanto, solo se puede afirmar que I y II son verdaderas.

6. La cantidad de números primos p, tales que $25p+1$ es un cuadrado perfecto es

   (a) 0
   (b) 1
   (c) 2
   (d) 3

   Opción correcta: (b)

   Solución:

   De acuerdo con el enunciado, debe cumplirse que $25p+1=k^2$ para algún entero positivo k. Como $p \geq 2$, entonces $k^2 \geq 51$, lo que implica que $k \geq 8$. Luego,

$$25p+1=k^2 \Longrightarrow 25p=k^2-1=(k-1)(k+1),$$

   lo que implica que $k-1$ y $k+1$ dividen a $25p$. Los divisores de $25p$ son $\{1,5,25,p,5p,25p\}$. Como $k-1<k+1$, entonces $k-1$ no puede ser $5p$ ni $25p$, por lo que debe ser algún elemento de $\{1,p,5,25\}$.

   Si $k-1=1$ entonces $k=2$ que no es posible. Si $k-1=5$ entonces $k=6$, que tampoco es posible. Si $k-1=25$, entonces $k=26$, con lo cual

$$25p=k^2-1=(26-1)(26+1)=25\cdot 27,$$

   pero 27 no es primo. Por último, si $k-1=p$ entonces $k=p+1$. Sustituyendo en la ecuación se obtiene que

$$25p=p(p+2) \Rightarrow 25=p+2 \Rightarrow p=23,$$

   que sí es una solución.

7. Sean $a, b \in \mathbb{R}$, con $a \neq 0$ y $b \neq 0$. Considere la función f dada por $f(x) = ax^2 + bx$. Si la ecuación $f(f(x)) = 0$ tiene exactamente tres soluciones, entonces el valor de b corresponde a
   (a) 1
   (b) 2
   (c) 3
   (d) 4

- Opción correcta: (d)
- Solución: Se tiene que

$$\begin{aligned} f(f(x)) &= a(ax^2+bx)^2 + b(ax^2+bx) \\ &= (ax^2+bx)(a(ax^2+bx)+b) = x(ax+b)(a^2x^2+abx+b). \end{aligned}$$

Note que los ceros de los dos primeros factores son $x = 0$ y $x = -b/a$. Estas son soluciones de la ecuación $f(f(x)) = 0$, pero no son ceros del factor $a^2x^2 + abx + b = ax(ax + b) + b$, pues $b \neq 0$. Por lo tanto, para que dicha ecuación tenga exactamente tres soluciones debe cumplirse que el factor $a^2x^2 + abx + b$ tenga sus dos raíces iguales. Esto implica que el determinante de dicha expresión debe anularse, es decir, $a^2b^2 - 4a^2b = 0$, lo que implica que $a^2b(b-4) = 0$. Y dado que a y b son distintos de cero, entonces b toma el valor de 4.

8. En el plano hay 25 puntos, de los cuales hay 4 pintados de azul y 21 de rojo. Los puntos rojos pertenecen a un solo plano π y no hay tres de ellos alineados; ninguno de los puntos azules pertenecen al plano π. Excepto por el plano π, no hay ningún otro plano que contenga cuatro de estos 25 puntos. Considere el conjunto S de todos los planos distintos formados por tres de estos 25 puntos (el plano π se cuenta una sola vez). La probabilidad de que un plano de S esté formado por un vértice rojo y dos azules es igual a

   (a) $\dfrac{6}{126}$

   (b) $\dfrac{126}{971}$

   (c) $\dfrac{840}{970}$

   (d) $\dfrac{126}{970}$

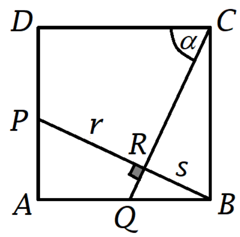
   La opción correcta es la **(b)**.

   Los puntos que forman el plano pueden ser tres rojos, dos rojos y uno azul, uno rojo y dos azules, o tres azules. Todos estos planos van a ser distintos porque no hay cuatro de ellos que pertenezcan a un mismo plano (excepto el caso de los puntos rojos y el plano π). Vamos a contar la cantidad en cada uno de estos casos:

   - Tres rojos: Cualesquiera tres de ellos forman al plano π (porque no están alineados).
   - Dos rojos y uno azul: los dos puntos rojos se pueden escoger de $21 \cdot 20/2 = 210$ formas y el punto azul de 4 formas. Por lo tanto, hay $210 \cdot 4 = 840$ planos en este caso.
   - Un rojo y dos azules: los dos puntos azules se pueden escoger de $4 \cdot 3/2 = 6$ formas y el punto rojo de 21 formas. Por lo tanto, hay $6 \cdot 21 = 126$ planos en este caso.
   - Tres azules: escoger tres puntos es lo mismo que no escoger un punto azul, por lo tanto esto se puede hacer de 4 formas.

   Por lo tanto, la cantidad total de planos distintos es igual a $1 + 840 + 126 + 4 = 971$ planos distintos. En conclusión, la probabilidad es $\dfrac{126}{971}$.

9. En el cuadrado $ABCD$ los puntos P y Q pertenecen a $\overline{AD}$ y $\overline{AB}$ respectivamente. Los segmentos $\overline{BP}$ y $\overline{CQ}$ se intersecan formando un ángulo recto en R.



Si $PR = r$, $RB = s$ y $m\angle DCQ = \alpha$, entonces la expresión $\cos(\alpha) \cdot \sin(\alpha)$ es igual a

(a) $\dfrac{r}{r+s}$

(b) $\dfrac{s}{r+s}$

(c) $\dfrac{\sqrt{rs}}{r+s}$

(d) $\dfrac{r-s}{r+s}$

Opción correcta: (b)

Solución: Primero determinamos algunos ángulos con base en las hipótesis. Observamos que $m\angle BCR = 90° - \alpha$ y como $\angle BRC = 90°$, entonces concluimos que $\angle CBR = \alpha$. Además, por ángulos entre paralelas, obtenemos que $m\angle APB = m\angle CBP = m\angle CBR = \alpha$.

Ahora usamos los ángulos anteriores para determinar el resultado. Sea l el lado del cuadrado. En el triángulo ABP tenemos que $\sin\alpha = l/(r+s)$, y en el triángulo BCR tenemos que $\cos\alpha = s/l$. De esta forma concluimos que

$$\cos(\alpha) \cdot \sin(\alpha) = \frac{s}{l} \cdot \frac{l}{r+s} = \frac{s}{r+s}.$$

10. La cantidad de pares ordenados de números enteros positivos (m, n), donde m es menor o igual a 2022, tales que
$$m^2 + n^2 = m^3$$
corresponde a

(a) 44
(b) 45
(c) 2020
(d) 1010

Opción correcta: **(a)**.

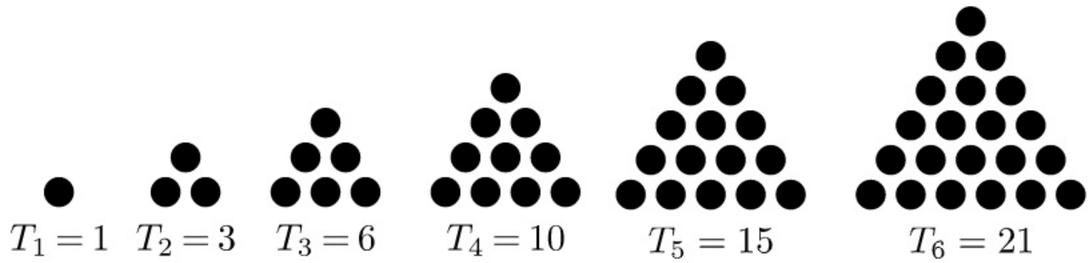
Observe que

$$m^2 + n^2 = m^3 \iff n^2 = m^3 - m^2 = m^2(m-1) \iff \frac{n^2}{m^2} = m - 1.$$

Ahora bien, como $m - 1 \in \mathbb{N}$ entonces $\dfrac{n^2}{m^2} = \left(\dfrac{n}{m}\right)^2 \in \mathbb{N}$ y por ende $m - 1$ debe ser un número cuadrado perfecto. Sea $k \in \mathbb{Z}^+$ tal que $k^2 = m - 1$; como $0 < m \leqslant 2022$ entonces $-1 < k^2 \leqslant 2021$ y por ende $0 \leqslant k \leqslant 44$, pues $44 < \sqrt{2021} < 45$.

Finalmente, note que $k \neq 0$ pues en ese caso se tendría que $n = 0$. Por ende hay un total de 44 pares (m, n) de enteros positivos números que satisfacen la ecuación.

11. Observe la siguiente sucesión



Los números mostrados en la imagen anterior son los primeros seis términos de la sucesión de números triangulares, denotado por T_n.
Existen dos números triangulares consecutivos, tales que su suma es ocho veces el valor de su resta. El producto de estos dos números triangulares consecutivos es:

(a) 588

(b) 1008

(c) 1620

(d) 2475

- Opción correcta: (b)
- Solución:
Primero buscamos un patrón para la suma de dos números triangulares consecutivos. Para $n = 1$, tenemos que $T_1 + T_2 = 1 + 3 = 4$; para $n = 2$, tenemos que $T_2 + T_3 = 3 + 6 = 9$; para $n = 3$, tenemos que $T_3 + T_4 = 6 + 10 = 16$. Con esto podemos notar que estamos obteniendo como resultado de la suma el cuadrado del $n + 1$, es decir $T_n + T_{n+1} = (n + 1)^2$.

  Para la diferencia, observamos que la figura en el $(n + 1)$-ésimo paso se construye a partir de la figura en el n-ésimo paso agregándole una fila de longitud $n + 1$. Por lo tanto, $T_{n+1} - T_n = n + 1$.

  Sean n y $n + 1$ las posiciones de los dos números consecutivos que buscamos. Las observaciones anteriores y la condición del problema implican que $(n + 1)^2 = 8(n + 1)$. Como $n + 1$ es un factor a ambos lados podemos cancelarlo y concluir que el $n + 1 = 8$, es decir, $n = 7$. Como $T_6 = 21$, entonces $T_7 = 21 + 7 = 28$ y $T_8 = 28 + 8 = 36$, con lo que concluimos que el producto de estos números es 1008.

- Solución alternativa: El resultado conocido como la suma de Gauss nos da que

$$T_n = 1 + 2 + \ldots + n = \frac{n(n+1)}{2}.$$

  Por lo tanto, buscamos resolver

$$\frac{n(n+1)}{2} + \frac{(n+1)(n+2)}{2} = 8\left(\frac{(n+1)(n+2)}{2} - \frac{n(n+1)}{2}\right).$$

Podemos simplificar el factor $(n+1)$ para obtener la ecuación

$$\frac{n}{2} + \frac{n+2}{2} = 8\left(\frac{n+2}{2} - \frac{n}{2}\right) \iff \frac{2n+2}{2} = 8 \cdot \frac{(n+2)-n}{2} \iff n+1 = 8 \iff n = 7.$$

Por lo tanto, el producto de dichos números triangulares es

$$\frac{7 \cdot 8}{2} \cdot \frac{8 \cdot 9}{2} = 16 \cdot 7 \cdot 9 = 112 \cdot 9 = 1008.$$

12. La cantidad de pares ordenados de enteros positivos (a, b), con $a \leq b$, tales que

$$a^b \cdot b^a = 2^{48}$$

es igual a

(A) 1
(B) 2
(C) 3
(D) 4

Opción correcta: (C)

Solución: Como a y b dividen a 2^{48}, entonces ambos deben ser potencias de 2. Sea $a = 2^c$ y $b = 2^d$, con $0 \leq c \leq d$. Esto implica que

$$a^b \cdot b^a = (2^c)^{2^d} \cdot (2^d)^{2^c} = 2^{c \cdot 2^d + d \cdot 2^c},$$

con lo cual obtenemos la ecuación $c \cdot 2^d + d \cdot 2^c = 48$. En primer lugar, observamos que si $c \geq 4$, entonces como $c \cdot 2^d + d \cdot 2^c \geq d \cdot 2^c \geq 4 \cdot 2^4 > 48$, por lo que no hay soluciones en este caso. Por lo tanto, solo hay que considerar los casos $0 \leq c \leq 3$.

Con $c = 0$ obtenemos $d = 48$, lo cual da $(a, b) = (1, 2^{48})$.

Si $c = 1$, entonces obtenemos $2^d + 2d = 48$. La función $f(x) = 2^x + 2x$ es creciente y $f(5) < 48 < f(6)$, por lo que no hay soluciones enteras en este caso.

Si $c = 2$, entonces obtenemos $2 \cdot 2^d + 4d = 48$, o bien $2^d + 2d = 24$. En este caso observamos que $f(4) = 24$, y dado que la función es creciente obtenemos que esta es la única solución. Esto nos da $(a, b) = (2^2, 2^4) = (4, 16)$.

Finalmente, si $c = 3$, entonces obtenemos que $3 \cdot 2^d + 8d = 48$. La función $g(x) = 3 \cdot 2^x + 8x$ es creciente y observamos que $g(3) = 48$. Esto implica que la única solución en este caso es $(a, b) = (2^3, 2^3) = (8, 8)$.

Por lo tanto, la cantidad de pares ordenados de soluciones es 3.

II Parte: Desarrollo **Valor 14 puntos, 7 puntos c/u**

Instrucciones: Conteste (o resuelva) en forma clara y ordenada los siguientes ejercicios. En esta parte deben desarrollar y escribir **todos** los procedimientos que le permitieron llegar a su respuesta.

1. Rosa y Valeria son amigas que cumplen años el mismo día; Rosa nació en el siglo XX (del año 1900 al 1999) y Valeria en el siglo XXI (del año 2000 al 2099). En uno de sus cumpleaños ambas notaron que al sumar los cuatro dígitos de su año de nacimiento cada una obtenía su edad actual. Ese día, ambas tenían menos de 99 años. Determine la diferencia de sus edades.

- Solución: Sean $19ab$ y $20cd$ los años de nacimiento de Rosa y Valeria, respectivamente. Vamos a calcular las diferencias de edad de dos formas distintas. En primer lugar, podemos restar los años de nacimiento $20cd - 19ab$; usando notación desarrollada tenemos que

$$20cd - 19ab = (2000 + 10c + d) - (1900 + 10a + b) = 100 - 10a - b + 10c + d.$$

Asimismo, dado que ambas observaron la propiedad sobre el año de nacimiento y sus edades, tenemos que la edad de Rosa es $1+9+a+b = 10+a+b$ y la edad de Valeria es $2+0+c+d = 2+c+d$. Como Rosa es mayor, la diferencia de edades es

$$(10 + a + b) - (2 + c + d) = 8 + a + b - c - d.$$

Comparando las dos expresiones anteriores obtenemos que

$$100 - 10a - b + 10c + d = 8 + a + b - c - d \Longleftrightarrow 11a + 2b - 11c - 2d = 92.$$

Reacomodando lo anterior, deducimos que esto es equivalente a $11(a - c) + 2(b - d) = 92$. Como a, b, c, d son dígitos, entonces $b - d \leq 9$ y por lo tanto $2(b - d) \leq 18$. Esto implica que

$$11(a - c) = 92 - 2(b - d) \geq 92 - 18 = 74,$$

por lo que $a - c$ debe ser 7, 8 o 9. Como $2(b - d)$ y 92 son pares, entonces $11(a - c)$ debe ser par, y por lo tanto $a - c = 8$. Por lo tanto, la ecuación $11(a - c) + 2(b - d) = 92$ implica que $b - d = (92 - 88)/2 = 2$. Como $a - c = 8$ y $b - d = 2$, entonces podemos sustituir en las expresiones anteriores para la diferencia de edades y concluir que esta es igual a

$$8 + a + b - c - d = 8 + (a - c) + (b - d) = 8 + 8 + 2 = 18.$$

Por lo tanto, Rosa es 18 años mayor que Valeria.

2. En una feria se encuentra una atracción con los números enteros en la recta, que se juega de la siguiente manera:

   - Antes de empezar, la persona que juega debe escoger tirar exactamente la moneda cuatro, cinco, seis o siete veces (y respeta tal decisión).
   - La posición inicial (antes de lanzar por primera vez la moneda) es el número 1.
   - En cada turno, la persona que juega tira una moneda justa (50 % de salir escudo o corona) y se mueve al entero de la izquierda (resta 1) si sale escudo o al entero de la derecha (suma 1) si sale corona.

   Si al final de los lanzamientos la persona se encuentra en un entero múltiplo de 3, entonces recibe un triciclo como premio. Si Maricela quiere ganarse el triciclo, entonces determine cuántas veces debe tirar la moneda para maximizar sus posibilidades.

- Solución: Vamos a estudiar los posibles enteros en los que Maricela puede terminar luego de varios lanzamientos y vamos a determinar la probabilidad de que se encuentre en estos. Para hacer esto, vamos a contar la cantidad de recorridos que llevan a tales enteros y dividirlos por la cantidad total de recorridos (2^n para el caso de n lanzamientos de moneda). Con base en el siguiente diagrama podemos obtener la cantidad de recorridos que llevan a un entero sumando los de los dos vecinos en la etapa anterior (de manera que se forma una especie de triángulo de Pascal):

posición	**-6**	-5	-4	**-3**	-2	-1	**0**	1	2	**3**	4	5	**6**	7	8
inicio	–	–	–	–	–	–	–	1	–	–	–	–	–	–	–
1 lanz.	–	–	–	–	–	–	**1**	–	1	–	–	–	–	–	–
2 lanz.	–	–	–	–	–	1	–	2	–	**1**	–	–	–	–	–
3 lanz.	–	–	–	–	1	–	**3**	–	3	–	1	–	–	–	–
4 lanz.	–	–	–	**1**	–	4	–	6	–	**4**	–	1	–	–	–
5 lanz.	–	–	1	–	5	–	**10**	–	10	–	5	–	**1**	–	–
6 lanz.	–	1	–	**6**	–	15	–	20	–	**15**	–	6	–	1	–
7 lanz.	**1**	–	7	–	21	–	**35**	–	35	–	21	–	**7**	–	1

De esta forma vemos que la cantidad de recorridos que terminan en un múltiplo de 3 para cuatro, cinco, seis y siete lanzamientos es

$$1+4=5, \quad 10+1=11, \quad 6+15=21, \quad 1+35+7=43,$$

por lo que la probabilidad de que Maricela termine en un múltiplo de 3 luego de cuatro, cinco, seis y siete lanzamientos es

$$\frac{5}{16}, \quad \frac{11}{32}, \quad \frac{21}{64}, \quad \frac{43}{128},$$

respectivamente. Es posible verificar sencillamente que

$$\frac{5}{16} < \frac{21}{64} < \frac{43}{128} < \frac{11}{32}.$$

Por lo tanto, si Maricela quiere maximizar la probabilidad de obtener el triciclo, entonces debe tirar la moneda cinco veces.